This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

KIRCHHOFF,

GESAMMELTE ABHANDLUNGEN.

DEUERLICH'sche
BUCHHANDLUNG
in Göttingen

Phys 85.1

DEUERLICH'sche
BUCHHANDLUNG
in Göttingen

Phys 85.1

G. Hirschhoff.

GESAMMELTE

LEIPZIG,
JOHANN AMBROSIUS BARTH.
1882.

GESAMMELTE

ABHANDLUNGEN

VON

G. KIRCHHOFF.

MIT PORTRAIT UND ZWEI LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

LEIPZIG,
JOHANN AMBROSIUS BARTH.
1882.

Phys85.1

1892

Alle Rechte vorbehalten.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort.

Ich komme einer an mich ergangenen Aufforderung nach, indem ich die Mehrzahl meiner in verschiedenen Zeitschriften zerstreuten Abhandlungen vereinigt der Oeffentlichkeit übergebe. Abgesehen von einigen unbedeutenden und nur die Form betreffenden Verbesserungen sind dieselben unverändert abgedruckt. Bei der Ordnung habe ich gesucht die Arbeiten verwandten Inhalts einander nahe zu bringen und, so weit das hiermit verträglich war, die chronologische Reihenfolge beibehalten.

Berlin, im Dezember 1881.

G. Kirchhoff.

Inhaltsverzeichniss.

Seite

Ueber den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige 1

Nachtrag zu dem vorigen Aufsatze 17

Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird 22

Ueber die Anwendbarkeit der Formeln für die Intensitäten der galvanischen Ströme in einem Systeme linearer Leiter auf Systeme, die zum Theil aus nicht linearen Leitern bestehen 33

Ueber eine Ableitung der Ohm'schen Gesetze, welche sich an die Theorie der Elektrostatik anschliesst 49

Ueber die stationären elektrischen Strömungen in einer gekrümmten leitenden Fläche 56

Ueber die Messung elektrischer Leitungsfähigkeiten 66

Ueber die Vertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln . 78

Zur Theorie des Condensators 101

Bestimmung der Constanten, von welcher die Intensität inducirter elektrischer Ströme abhängt 118

Ueber die Bewegung der Elektricität in Drähten 131

Ueber die Bewegung der Elektricität in Leitern 154

Zur Theorie der Entladung einer Leydener Flasche 168

Zur Theorie der Bewegung der Elektricität in unterseeischen und unterirdischen Telegraphendrähten 182

Ueber den inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen 193

Zur Theorie des in einem Eisenkörper inducirten Magnetismus . . 228

Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe 237

Ueber die Schwingungen einer kreisförmigen elastischen Scheibe . 279

Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes 285

Ueber das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation bei Stäben von federhartem Stahl 316

Seite

Ueber die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt 339
Ueber die Reflexion und Brechung des Lichts an der Grenze krystallinischer Mittel 352
Ueber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit . 376
Ueber die Kräfte, welche zwei unendlich dünne, starre Ringe in einer Flüssigkeit scheinbar auf einander ausüben können . . 404
Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen 416
Ueber stehende Schwingungen einer schweren Flüssigkeit 428
Versuche über stehende Schwingungen des Wassers 442
Ueber einen Satz der mechanischen Wärmetheorie und einige Anwendungen desselben 454
Bemerkung über die Spannung des Wasserdampfes bei Temperaturen, die dem Eispunkte nahe sind 482
Ueber die Spannung des Dampfes von Mischungen aus Wasser und Schwefelsäure 485
Ueber die Leitungsfähigkeit des Eisens für die Wärme 495
Ueber den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung 540
Ueber den Winkel der optischen Axen des Aragonits für die verschiedenen Fraunhofer'schen Linien 557
Ueber die Fraunhofer'schen Linien 564
Ueber den Zusammenhang zwischen Emission und Absorption von Licht und Wärme 566
Ueber das Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht . . . 571
Chemische Analyse durch Spectralbeobachtungen 598
Zur Geschichte der Spectral-Analyse und der Analyse der Sonnenatmosphäre 625

Ueber den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige.[1])

Leitet man einen constanten galvanischen Strom durch eine Metallscheibe, so wird sich die Elektricität in dieser auf eine bestimmte Weise vertheilen. Die Art der Vertheilung kann man nach den von Ohm aufgestellten Prinzipien theoretisch ermitteln. Ich habe die dazu nöthige Rechnung unter der Voraussetzung, dass der Zustand der Scheibe ein stationärer geworden sei, in dem Falle durchgeführt, dass die Scheibe eine kreisförmige ist, und dass die Elektricität durch einen Draht in sie hinein, durch einen zweiten aus ihr heraustrete. Das Resultat wurde besonders einfach, wenn der Ein- und der Austrittspunkt in der Peripherie der Scheibe liegen; in diesem Falle habe ich dasselbe durch Versuche geprüft und, wie es mir scheint, eine hinreichende Bestätigung gefunden. Ich will hier zuerst die theoretischen Betrachtungen angeben, und dann die Experimente beschreiben, die ich angestellt habe.

Bestimmen wir die Lage eines Punktes der leitenden Ebene durch die rechtwinkligen Coordinaten x und y, so ist die elektrische Spannung desselben, u, eine Function von x und y; d. h. es ist:

$$u = f(x, y).$$

Die Gleichung $f(x, y) = u_0$ stellt, wenn u_0 eine Constante bezeichnet, ein Curve dar, in der alle Punkte dieselbe Spannung haben. Wir betrachten zwei solche unendlich naheliegende „Curven gleicher Spannung:“

$$f(x, y) = u_0$$
$$f(x, y) = u_0 + \mathrm{d}u,$$

1) Pogg. Annal. Bd. 64. 1845.

nehmen in der ersten 2 unendlich naheliegende Punkte A, B an (Fig. 1.), und ziehen in ihnen die Normalen; diese sind zugleich Normalen der zweiten Curve in den Punkten A', B', so dass $ABA'B'$ ein unendlich kleines Rechteck ist, bei dem jeder Punkt der Seite AB die Spannung u_0, und jeder Punkt der Seite $A'B'$ die Spannung $u_0 + du$ hat; durch dieses Rechteck fliesst also, nach den Ohm'schen Principien, in der Zeiteinheit in der Richtung von AA' eine Elektricitäts-menge, die

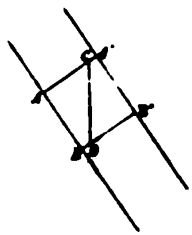


Fig. 1.

$$= -k.\delta.AB.\frac{du}{AA'}$$

ist, wo k die Leitungsfähigkeit und δ die unendlich kleine Dicke der Scheibe bezeichnet. Dieselbe Menge von Elektricität fliesst durch eine jede Linie CD, die wir durch das Rechteck $ABA'B'$ ziehen; ziehen wir CD parallel der x Axe, und setzen den Winkel, den AA', d. h. die Richtung des Stromes, mit dieser bildet, $= \varphi$, so ist die Elektricitätsmenge, die durch CD fliesst:

$$= -k\delta CD.\sin\varphi.\frac{du}{AA'}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch auf eine andere Form bringen; es ist nämlich:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

wo dx und dy die Unterschiede der Coordinaten von A und A' bezeichnen; hieraus folgt:

$$\frac{du}{AA'} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi;$$

da ferner der Punkt A dieselbe Spannung hat, wie B, so muss

$$o = \frac{\partial u}{\partial x}\sin\varphi - \frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi$$

sein; aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$\frac{du}{AA'}\cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{du}{AA'}\sin\varphi = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Der obige Ausdruck ist also:

$$= -k.\delta.CD\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Da die Lage des Coordinatensystemes eine ganz willkürliche war, so ist das Resultat der angestellten Untersuchung: dass durch irgend ein lineares Element ds in der Zeiteinheit eine Menge von Elektricität fliesst, die

$$= -k.\delta.ds\frac{\partial u}{\partial N}$$

ist, wenn wir mit $\frac{\partial u}{\partial N}$ die Differentiation nach der Richtung der Normale von ds bezeichnen.

Durch diese Bemerkung wird es leicht, die Bedingung zu finden, der u genügen muss, damit der elektrische Zustand der Scheibe ein stationärer sein könne. Betrachten wir nämlich eine geschlossene Curve in derselben, innerhalb der ihr keine Elektricität zugeführt wird, so muss die Summe aller Elektricitätsmengen, die durch diese Curve fliessen, $= o$ sein; es muss also:

$$\int ds.\frac{\partial u}{\partial N} = o$$

sein, wenn dieses Integral über die ganze Curve ausgedehnt wird. Bezeichnen wir die Winkel, die N mit den Coordinatenaxen bildet, durch (N, x) und (N, y), so haben wir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial N} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos(N, x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(N, y)\\ dx &= -ds.\cos(N, y)\\ dy &= ds.\cos(N, x),\end{aligned}$$

und die Gleichung wird diese [1]):

$$\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}dy - \frac{\partial u}{\partial y}dx\right) = o.$$

---

1) Da die betrachtete Curve eine ganz beliebige war (ausser dass sie gewisse Punkte nicht umschliessen sollte), so kann diese Bedingung nicht anders erfüllt werden, als dass $\frac{\partial u}{\partial x}dy - \frac{\partial u}{\partial y}dx$ ein vollständiges Differential, $= dv$, ist; d. h. es muss:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = o$$

sein. Die Gleichung $dv = o$, d. h. $v = \text{const.}$ stellt ein System von Curven dar, die die Curven gleicher Spannung senkrecht schneiden, d. h. die Strömungslinien.

Denken wir uns den Fall, dass die Elektricität durch einzelne Punkte in die Scheibe und aus ihr heraustrete, und betrachten nun zweitens eine geschlossene Curve, die einen von den Eintrittspunkten umschliesst, so muss in Bezug auf sie:

$$-k.\delta.\int ds.\frac{\partial u}{\partial N} = -k.\delta.\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}dy - \frac{\partial u}{\partial y}dx\right) = E$$

sein, wenn E die Elektricitätsmenge bezeichnet, die durch diesen Punkt der Scheibe zugeführt wird.

Als dritte Bedingung für u tritt noch hinzu, dass für die Grenze der Scheibe $\frac{\partial u}{\partial N} = o$ sein muss, weil durch diese an keiner Stelle Elektricität zu- oder abfliessen soll; d. h. dass die Curven gleicher Spannung die Grenze senkrecht schneiden [1]). Ist die Scheibe unbegrenzt, so fällt die letzte Bedingung fort; an ihre Stelle tritt die, dass die Spannung in der Unendlichkeit = einer constanten endlichen Grösse ist.

---

1) Bestände die Scheibe aus zwei Stoffen von verschiedener Leitungsfähigkeit, so würden für die Berührungscurve beider folgende Bedingungen hinzukommen (wenn k und k' die Leitungsfähigkeiten, u und u' die Spannungen bezeichnen):

$$k.\frac{\partial u}{\partial N} = k'.\frac{\partial u'}{\partial N}$$

und $u - u' =$ der elektromotorischen Kraft, die durch die Berührung der beiden Stoffe erzeugt wird.

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u'}{\partial s};$$

wir erhalten durch Division dieser Gleichung und der ersten:

$$k.\frac{\frac{\partial u}{\partial N}}{\frac{\partial u}{\partial s}} = k'.\frac{\frac{\partial u'}{\partial N}}{\frac{\partial u'}{\partial s}}$$

Es ist aber $\frac{\frac{\partial u}{\partial N}}{\frac{\partial u}{\partial s}}$ = der cotg. des Winkels, den die Richtung des Stromes im ersten Medium mit N bildet; nennen wir diesen Winkel φ, und den entsprechenden für das zweite Medium φ', so haben wir:

$$tg\,\varphi : tg\,\varphi' = k : k'.$$

Diese Proportion giebt das Gesetz an, nach dem ein elektrischer Strom gebrochen wird, wenn er aus einem Medium in ein anderes tritt.

Wir wollen zuerst den Fall näher betrachten, dass die Scheibe unbegrenzt ist. Es seien A_1, $A_2 .. A_n$ die Einströmungspunkte (ich will der Kürze halber jetzt unter diesem Namen sowohl die Einströmungspunkte im engern Sinne als auch die Ausströmungspunkte verstehen, und will die Elektricitätsmengen, die durch die letzteren abfliessen, als negative einströmende bezeichnen); die Elektricitätsmengen, die durch diese in der Zeiteinheit in die Scheibe treten, seien $E_1, E_2 .. E_n$, wobei $E_1 + E_2 + .. + E_n = o$ sein muss; bezeichnen wir dann die Entfernungen eines Punktes in dieser von A_1, $A_2 ..$ durch r_1, $r_2 .. r_n$, so lässt sich leicht zeigen, dass wir allen aufgestellten Bedingungen genügen, wenn wir:

$$u = M - \frac{E_1}{2\pi . k . \delta} \log r_1 - \frac{E_2}{2\pi . k . \delta} \log r_2 - .. - \frac{E_n}{2\pi . k . \delta} \log r_n$$

setzen, wo M eine Constante bedeutet.

Bilden wir nämlich das unbestimmte Integral

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right),$$

so finden wir dieses:

$$= - \frac{1}{2\pi k \delta} \Big(E_1 . (r_1, R) + E_2 . (r_2, R) + .. + E_n . (r_n, R) \Big),$$

wenn wir durch (r_1, R) , (r_2, R).. die Winkel bezeichnen, die r_1, r_2.. mit einer festen Linie R bilden. Nehmen wir von diesem Integral die Grenzen in Bezug auf eine geschlossene Curve, welche keinen von den Einströmungspunkten umschliesst, so wird es $= o$; umschliesst die Curve einen von den Punkten A_1, $A_2 ..$, etwa A_1, so wird das Integral in Bezug auf sie $= - \frac{1}{k \delta} . E_1$; also die Menge von Elektricität, die in der Zeiteinheit durch sie hindurchströmt, $= E_1$. Die dritte Bedingung wird ebenfalls erfüllt, denn für einen Punkt in der Unendlichkeit ist $r_1 = r_2 = ..$; also:

$$u = M + \frac{1}{2\pi k \delta} (E_1 + E_2 + .. E_n) \log r_1$$
$$= M.$$

Derselbe Ausdruck für u wird auch gelten, wenn die Scheibe begrenzt ist, sobald nur die Grenze die Curven gleicher Spannung senkrecht schneidet.

Nehmen wir an, dass es nur zwei Einströmungspunkte gäbe, so ist:

$$u = M + N . \log \frac{r_2}{r_1},$$

wo $N . 2\pi k\delta = E_1 = -E_2$ gesetzt ist; die Curven gleicher Spannung werden also dargestellt durch die Gleichung:

$$\frac{r_2}{r_1} = \text{const};$$

sie sind also Kreise, welche über der Entfernung zweier Punkte als Durchmesser beschrieben sind, die zu A_1 und A_2 harmonisch liegen. Die Curven, welche diese senkrecht schneiden (d. h. die Strömungscurven), sind die Kreise, welche durch A_1 und A_2 gelegt werden können; wird die Scheibe also durch einen oder mehrere solcher Kreise begrenzt, so hat u den angegebenen Werth[1]).

Den beiden ersten Bedingungen für u wird für eine begrenzte Scheibe immer genügt durch:

$$u = M - \frac{1}{2\pi k\delta}\big(E_1 \log r_1 + E_2 \log r_2 + .. + E_n \log r_n + E'_1 \log r'_1 + E_2 \log r'_2 + . + E'_m \log r'_m\big),$$

wo $r_1, r_2 .., E_1, E_2 ..$ dieselbe Bedeutung wie oben haben, wo ferner $r'_1, r'_2 ..$ die Entfernungen des in Rede stehenden Punktes der Scheibe von willkürlichen Punkten $A'_1 A'_2 ..$, die ausserhalb dieser liegen, bezeichnen, und $E'_1, E'_2 ..$ beliebige Coëfficienten sind. In manchen Fällen wird man die Punkte $A', A'_2 ..$ und die Coëfficienten $E'_1, E'_2 ..$ so bestimmen können, dass auch der dritten Bedingung genügt wird, d. h. dass die Curven u = const. die Grenze der Scheibe rechtwinklig schneiden. Ist die Scheibe eine kreisförmige, so ist dieses immer möglich.

Betrachten wir zunächst den Fall, dass nur zwei Einströmungspunkte vorhanden sind, so ist der Ausdruck für u, wenn wir wieder $2\pi k\delta N = E_1 = -E_2$ setzen:

$$u = M + N\left(\log \frac{r_2}{r_1} + \log \frac{r'_2}{r'_1}\right),$$

1) Die Curven, welche alle Punkte enthalten, die von gleich starken Strömen durchflossen werden, sind in diesem Falle Lemniscaten, deren Gleichung $r_1 . r_2 = \text{const.}$ ist.

wo wir die Punkte A'_1 und A'_2 durch folgende Construction finden: Wir verbinden den Mittelpunkt der Scheibe, C, (Fig. 2.) mit A_1 und A_2, und schneiden auf den verlängerten Linien CA_1, CA_2 zwei solche Stücke CA'_1 und CA'_2 ab, dass der Radius der Scheibe die mittlere Proportionale zwischen CA_1 und CA'_1, und zwischen CA_2 und CA'_2 ist[1]).

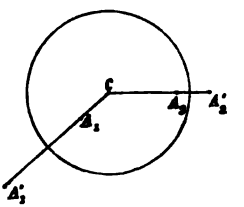


Fig. 2.

---

1) Der Beweis dafür, dass die Curven $\log\frac{r_2}{r_1} + \log\frac{r'_2}{r'_1} = \text{const.}$ die Grenze der Scheibe senkrecht schneiden, ist folgender: Die Gleichung der Curven, welche jene rechtwinklig schneiden, ist:

$$v = (r_2, R) - (r_1, R) + (r'_2, R) - (r'_1, R) = \text{const.}$$

Führen wir rechtwinklige Coordinaten ein, so wird dieses eine Gleichung des vierten Grades. Sowohl die Curven: $\log\frac{r_2}{r_1} = \text{const.}$ als auch die Curven: $\log\frac{r'_2}{r'_1} = \text{const.}$ schneiden den Kreis, der durch die vier Punkte A_1, A_2, A'_1, A'_2 gelegt werden kann, rechtwinklig; dieser wird also auch von den Curven $\log\frac{r_2}{r_1} + \log\frac{r'_2}{r'_1} = \text{const.}$ rechtwinklig geschnitten; seine Gleichung muss daher auch in der Gleichung $v = \text{const.}$ enthalten sein; wir schliessen daraus, dass der linke Theil dieser Gleichung, wenn sie auf o gebracht ist, sobald wir den Constanten passende Werthe geben, sich in zwei Factoren zerlegen lässt, von denen der eine der linke Theil der auf o gebrachten Gleichung des durch A_1, A_2, A'_1, A'_2 gelegten Kreises ist; es lässt sich zeigen, dass der andere Factor, wenn er $= o$ gesetzt wird, die Gleichung der Grenze der Scheibe bildet. Machen wir C zum Anfangspunkte der Coordinaten, setzen wir $CA_1 = \varrho_1$, $CA_2 = \varrho_2$, $CA'_1 = \varrho'_1$, $CA'_2 = \varrho'_2$, nennen wir ferner den Winkel, den ϱ_1 mit der x Axe bildet, φ_1 und den Winkel, den ϱ_2 mit ihr bildet, φ_2, so werden die Gleichungen der beiden in Rede stehenden Kreise:

$$x^2 + y^2 - \varrho_1 \cdot \varrho'_1 = o \text{ (oder } x^2 + y^2 - \varrho_2 \cdot \varrho'_2 = 0)$$

und:

$$x^2 + y^2 + \frac{(\varrho_1 + \varrho'_1)\sin\varphi_2 - (\varrho_2 + \varrho'_2)\sin\varphi_1}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)} x$$

$$- \frac{(\varrho_1 + \varrho'_1)\cos\varphi_2 - (\varrho_2 + \varrho'_2)\cos\varphi_1}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)} y + \varrho_1 \cdot \varrho'_1 = o.$$

Haben wir n Einströmungspunkte, so wird der Ausdruck für u, wenn wir der Kürze wegen N_i für $\frac{E_i}{2\pi k\delta}$ setzen:

$$u = M - N_1(\log r_1 + \log r'_1) - N_2(\log r_2 + \log r'_2) - \ldots - N_n(\log r_n + \log r'_n),$$

wo wir die Punkte $A'_1, A'_2 \ldots$ wieder durch dieselbe Construction finden, indem wir C mit $A_1, A_2 \ldots$ verbinden und auf den verlängerten Verbindungslinien solche Stücke $CA'_1, CA'_2 \ldots$ abschneiden, dass der Radius der Scheibe die mittlere Proportionale zwischen CA_1 und CA'_1, zwischen CA_2 und CA'_2 u. s. w. ist [1]).

Beschreiben wir um die einzelnen Einströmungspunkte geschlossene Curven, und denken wir uns, dass diesen Curven die Elektricität nicht durch die Punkte $A_1, A_2 \ldots$ zugeführt würde, sondern auf irgend eine andere Weise (etwa durch Cylinderoberflächen, die in ihnen errichtet sind), doch so, dass einem jeden Punkte dieser Curven gerade so viel zugeführt wird, wie früher, so wird sich der elektrische Zustand der Scheibe (mit Ausnahme der Flächen der Curven) nicht ändern, es wird also für u derselbe Ausdruck gelten. Wir wollen zu diesen Curven

---

Die Gleichung $v = C$ wird, wenn wir für R die y Axe annehmen:

$$C = \operatorname{arctg}\frac{x-\varrho_2\cdot\cos\varphi_2}{y-\varrho_2\sin\varphi_2} - \operatorname{arctg}\frac{x-\varrho_1\cos\varphi_1}{y-\varrho_1\sin\varphi_1} + \operatorname{arctg}\frac{x-\varrho'_2\cos\varphi_2}{y-\varrho'_2\sin\varphi_2} - \operatorname{arctg}\frac{x-\varrho'_1\cos\varphi_1}{y-\varrho'_1\sin\varphi_1}.$$

Bringen wir diese Gleichung auf eine algebraische Form und setzen $C = \varphi_1 - \varphi_2$, so erhalten wir eine Gleichung, welche identisch mit dem Product der beiden ersten Gleichungen ist.

1) Da nämlich $N_1 + N_2 + \ldots + N_n = o$ ist, so lässt sich u unter folgender Form darstellen:

$$u = M - \sum\frac{N_k - N_\lambda}{n}(\log r_k + \log r'_k - \log r_\lambda - \log r_\lambda'),$$

wo die Summe in Bezug auf k und λ zu nehmen ist, doch so, dass λ immer grösser als k ist (denn suchen wir in den beiden Ausdrücken für u die Coëfficienten von $\log r_i + \log r'_i$, so finden wir sie gleich); ein einzelnes Glied dieses Ausdrucks = const. gesetzt, stellt nach dem Vorigen ein System von Curven dar, welche die Grenze der Scheibe senkrecht schneiden; ein solches System stellt also auch die Summe, = const. gesetzt, dar.

unendlich kleine Kreise nehmen, deren Mittelpunkte A_1, A_2.. sind; diesen Kreisen wurden von den Punkten A_1, A_2.. die Elektricitätsmengen E_1, E_2.. zugeführt, und zwar vertheilte sich eine jede gleichmässig auf alle Theile des zugehörigen Kreises[2]); denken wir uns also diese Kreise als die Peripherien der Flächen, in denen die Scheibe von Drähten berührt wird, die ihr die Elektricitätsmengen E_1, E_2.. zuführen, so wird der aufgestellte Ausdruck für u Gültigkeit haben, wenn wir annehmen können, dass der Strom in einem jeden Drahte gleichmässig in Bezug auf seine Axe vertheilt sei. In einiger Entfernung von der Scheibe findet diese Vertheilung im Drahte statt, da also die Möglichkeit da ist, dass sie bis zum Ende des Drahtes bleibe, so wird dieses wirklich eintreffen.

Wir haben bis jetzt E_1, E_2.. immer als unmittelbar gegeben betrachtet; verfolgen wir ein bestimmtes Experiment, so müssen wir diese Grössen erst durch Rechnung ermitteln. Ich will von dieser Rechnung ein einfaches Beispiel geben, wobei wir zugleich den Widerstand der Scheibe finden werden.

Zwei um A_1 und A_2 beschriebene Kreise seien die beiden Enden eines Drahtes, der den Radius ϱ und die Leitungsfähigkeit k' habe. In einem Querschnitte des Drahtes D habe die elektromotorische Kraft K ihren Sitz; es soll der elektrische Zustand der Schliessung ermittelt werden.

Bezeichnen wir die Länge des Drahtes von dem Quer-

---

2) Die Curven gleicher Spannung in der Nähe des Punktes A_1 werden die concentrischen Kreise $r_1 = \text{const.}$, weil hier r_1 unendlich klein gegen $r_2, r_3\, r'_1, r'_2$.. ist; und hieraus folgt, dass sich die Elektricität vom Punkte A_1 gleichmässig nach allen Richtungen hin verbreitet. Diese Betrachtung gilt jedoch nicht, wenn A_1 sehr nahe an der Peripherie der Scheibe liegt, denn dann wird auch r'_1 unendlich klein. Befindet sich also einer von den Drähten sehr nahe an der Grenze, so wird der für u aufgestellte Ausdruck für Punkte, die nahe am Draht liegen, nicht gelten; dass er dennoch für entfernte Punkte gilt, ergiebt sich, wenn wir für den Draht eine unendliche Zahl sehr nahe liegender Einströmungspunkte substituiren. Hieraus ergiebt sich denn auch, dass im allgemeinen Fall die Gestalt der Drähte in Bezug auf die Spannung der entfernt liegenden Punkte von gar keinem Einfluss ist, wenn sie nur als unendlich dünn betrachtet werden können.

schnitte D bis zu einem andern Querschnitte mit l, so ist die Spannung dieses:

$u' = m - nl$ } für die eine Hälfte des Drahtes,
$u' = m - K + nl$ } für die andere Hälfte.

Die Spannung eines Punktes der Scheibe ist:

$$u = M - \frac{E}{2\pi . k . \delta} \log \frac{r_1 . r'_1}{r_2 . r'_2}.$$

Hier bedeutet E die Intensität des Stromes, der durch den Draht fliesst; es ist also:

$$E = n . k' . \pi \varrho^2, n = \frac{E}{k' . \pi \varrho^2}$$

Sind die Werthe von l, die zu den durch A_1 und A_2 gelegten Querschnitten des Drahtes gehören, l_1 und l_2, so sind die Spannungen in diesen [1]):

$$u'_1 = m - \frac{E}{k' . \pi . \varrho^2} l_1$$

$$u'_2 = m - K + \frac{E}{k' . \pi . \varrho^2} l_2.$$

Die Peripherien dieser Querschnitte gehören aber auch der Scheibe an, folglich ist:

$$u'_1 = M - \frac{E}{2\pi k \delta} \log \frac{\varrho . A_1 A'_1}{A_1 A_2 . A_1 A'_2}$$

$$u'_2 = M - \frac{E}{2\pi k \delta} \log \frac{A_2 A_1 . A_2 A'_1}{\varrho . A_2 A'_2}.$$

(Da nämlich ϱ unendlich klein ist, so können wir in u'_1 für r'_1 A_1 A'_1 u. s. w. setzen). Aus diesen Gleichungen ergiebt sich:

$$K = E . \left\{ \frac{(l_1 + l_2)}{k . \pi \varrho^2} + \frac{1}{2\pi k \delta} \log \left(\left(\frac{A_1 A_2}{\varrho} \right)^2 . \frac{A_1 A'_2 . A'_1 A_2}{A_1 A_2 . A_2 A'_2} \right) \right\}.$$

Bezeichnen wir den Widerstand der Scheibe mit ω, den des Drahtes mit ω', so muss:

$$K = E . (\omega' + \omega)$$

1) Diese Ausdrücke sind nicht strenge richtig; denn in der Nähe der Scheibe gilt nicht die Gleichung $u = m - nl$, weil die Ströme in dem Drahte hier nicht parallel mit seiner Axe sind; doch da wir ϱ als unendlich klein betrachten, so können wir diesen Umstand vernachlässigen. — Auf dieselbe Art müssen wir die Gleichung $\omega = \frac{l_1 + l_2}{k . \pi \varrho^2}$ rechtfertigen.

sein; da nun:

$$\omega' = \frac{l_1 + l_2}{k' \cdot \pi \varrho^2}$$

ist, so ist:

$$\omega = \frac{1}{2\pi k \delta} \cdot \log \left\{ \left(\frac{A_1 A_2}{\varrho} \right)^2 \cdot \frac{A_1 A'_2 \cdot A_2 A'_1}{A_1 A'_1 \cdot A_2 A'_2} \right\}.$$

Ich wende mich jetzt zur Beschreibung der Versuche, welche ich angestellt habe.

Ich benutzte zu ihnen eine kreisförmige Scheibe von dünnem Kupferblech, die einen Fuss im Durchmesser hatte; an zwei Punkten ihres Randes, die $\frac{3}{4}$ F. von einander abstanden, waren zwei dünne Kupferdrähte angelöthet, die mit den Polen einer Hydrokette in Verbindung gesetzt wurden. Setzte ich auf die Scheibe die Enden zweier Drähte, deren andere Enden in die Quecksilberschälchen eines Multiplicators getaucht waren, so musste die Magnetnadel desselben eine Ablenkung erleiden, wenn die Punkte der Scheibe, in denen diese berührt wurde, eine verschiedene Spannung hatten; sie musste keine Ablenkung erleiden, wenn die berührten Punkte in *einer* Curve gleicher Spannung lagen. Liess ich also den einen Draht fest stehen und suchte mit dem andern solche Punkte, dass die Magnetnadel keine Ablenkung erlitt, so konnte ich beliebig viele Punkte finden, die in der durch den Fusspunkt des ersten Drahtes gezogenen Curve gleicher Spannung lagen. Nach der Theorie sollte diese Curve ein Kreis sein, der über einem Durchmesser beschrieben ist, dessen Endpunkte zu den Einströmungspunkten harmonisch sind; ich suchte also einen solchen Kreis zu zeichnen, der den gefundenen Punkten möglichst nahe läge. In der folgenden Tabelle geben die erste Columne den Radius dieses Kreises, die folgenden die Entfernungen der gefundenen Punkte von ihm an (die Einheit ist $\frac{1}{100}$ Zoll).

Radius	Entfernungen.
114	+1, −1, −1, +1
278	0, 0, 0, 0, 0, +1
604	+1, +1, +1, 0, −1, −1, −3, −2, 0, −4, +7,
590	−1, −2, −1, 0, 0, 0, +3
285	0, −1, −1, −1, 0, −2, +7
117	0, 0, −1, +1
∞	+2, +2, 0, −2, −3, 0, 0, +2, +4, +6, +3, 0.

Die Figur 3, zeigt die ungefähre Lage der beobachteten Punkte. (Die letzte Reihe in der Tabelle bezieht sich auf die Punkte, welche nahe an der Mittellinie *BC* liegen, und giebt ihre Entfernungen von dieser an.)

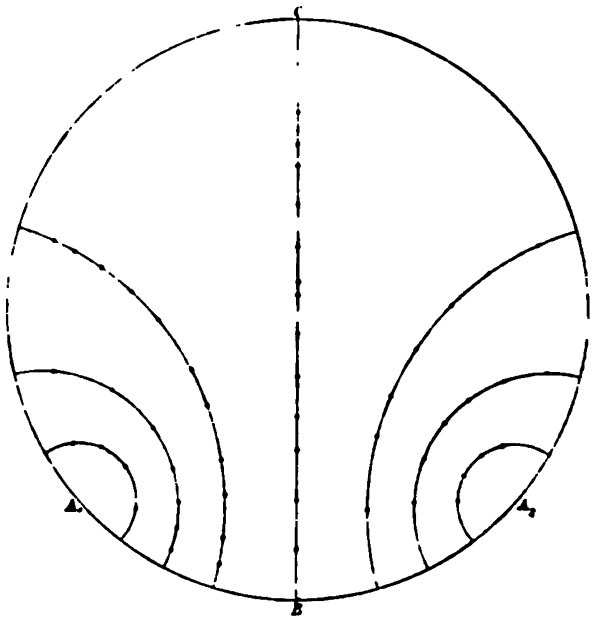


Fig. 3.

Die Abweichungen sind so geringe, dass sie wohl hinreichend aus der ungleichmässigen Leitungsfähigkeit der Kupferscheibe und aus Beobachtungsfehlern erklärt werden können. Lässt man diese Erklärung zu, so beweist dieses Experiment, dass die Spannung in einem jeden Punkte der Scheibe eine Funktion von $\frac{r_2}{r_1}$, d. h. dass:

$$u = f\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

ist; welche Function f ist, zeigt ein anderer Versuch.

Ich leitete durch die Scheibe den Strom einer constanten Hydrokette, und berührte sie an zwei Punkten mit den Enden

zweier Drähte, in deren Schliessung ausser dem Multiplicator eine schwache, aus Kupfer und Zink gebildete, Thermokette eingeschaltet war. Wählte ich jetzt die beiden Berührungspunkte so, dass durch den Multiplicator kein Strom ging, so musste die Differenz ihrer Spannungen gleich der elektromotorischen Kraft der Thermokette sein. Ich nahm den einen Berührungspunkt in der Verbindungslinie der Einströmungspunkte an, und las an einer Scale seine Entfernungen von diesen, r_1 und r_2, ab; dann suchte ich in derselben Linie den entsprechenden Berührungspunkt; die Entfernungen dieses von den Einströmungspunkten will ich R_1 und R_2 nennen; es war $r_1 + r_2 = R_1 + R_2 = 39$, und ich fand:

r_1	5	10	15	20	25	30.
R_1	10,4	17,3	22,8	28	31,5	34,4.

Hieraus ergiebt sich das Gesetz, welches r_1, r_2, R_1, R_2 nahe befolgen:

$$\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{R_2}{R_1} = \text{const.}$$

Berechnete ich nämlich nach diesem Gesetze R_1 aus r_1, so fand ich folgende Abweichungen:

Fehler von R_1	+ 0,4	− 0,1	− 0,4	+ 0,2	0,0	− 0,2.
R_1	10,4	17,3	22,8	28	31,5	34,4.

Dieselben Versuche, wie in der Verbindungslinie der Einströmungspunkte, stellte ich jetzt noch in einem durch diese gelegten Kreise an, der den Radius 5 Zoll hatte. Diesen Kreis hatte ich eingetheilt, um die Lage der Berührungspunkte bequem ablesen zu können; nenne ich die Bögen von dem einen Einströmungspunkte bis zu diesen beiden Punkten φ und Φ, so fand ich:

φ.	10	20	30	40	50	60	70	80.
Φ.	25,4	48,3	62,5	70,9	78,7	84	88,75	92.

Der Bogen von dem einen Einströmungspunkte bis zum andern war = 100; hieraus berechnete ich r_1, r_2, R_1, R_2 und untersuchte, ob diese Grössen auch hier dem oben ausgesprochenen Gesetze folgten. Die Fehler, welche dann bei Φ vorausgesetzt werden mussten, waren:

Φ.	25,4	48,3	62,5	70,9	78,7	84	88,75	92.
Fehler von Φ.	+ 0,2	+ 0,3	− 0,4	− 1,4	0,0	− 0,3	0,6	0,0.

Die Fehler dieser und der vorigen Beobachtungsreihe können, meiner Meinung nach, hinreichend erklärt werden theils als Beobachtungsfehler, theils aus der ungleichmässigen Leitungsfähigkeit der Kupferscheibe, so dass folgendes Gesetz als durch das Experiment bewiesen angesehen werden kann: Wenn $f\left(\frac{r_2}{r_1}\right) - f\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ constant ist, so ist auch $\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{R_1}{R_2}$ constant. Es ist nämlich nach dem Früheren $f\left(\frac{r_2}{r_1}\right) - f\left(\frac{R_2}{R_1}\right) =$ der Differenz der Spannungen der Berührungspunkte.

Hieraus ist es leicht, die Funktion f zu finden; setzen wir nämlich $\frac{r_2}{r_1} = p$, $\frac{R_2}{R_1} = P$, so beweist der eben ausgesprochene Satz, dass:

$$f(p) - f(P) = F\left(\frac{p}{P}\right)$$

ist, wo F eine noch unbekannte Function bezeichnet; setzen wir $\frac{p}{P} = q$, so wird die Gleichung:

$$f(qP) - f(P) = F(q)$$

oder, wenn wir partiell nach P differenziren:

$$q \cdot f'(qP) - f'(P) = o;$$

also, wenn wir $P = 1$ setzen:

$$\begin{aligned} f'(q) &= \frac{f'(1)}{q} \\ &= \frac{N}{q} \\ f(q) &= M + N \log q \\ u &= M + N \log \frac{r_2}{r_1}, \end{aligned}$$

wo M und N zwei willkürliche Constanten bezeichnen.

Anmerkung.

Ich habe mir viele Mühe gegeben, den für den Widerstand der Scheibe aufgestellten Ausdruck durch Experimente zu prüfen; doch waren die Veränderungen, die der Widerstand erlitt, wenn die Entfernung der Drähte variirt wurde, so kleine

Grössen, dass die Beobachtungen eine Unsicherheit erhielten, bei der sie unmöglich etwas für oder gegen die Theorie beweisen konnten. Eine Hauptschwierigkeit, auf die ich ausserdem bei diesen Versuchen stiess, war die: zu bewirken, dass die Drähte die Scheibe immer mit derselben Innigkeit berührten; dieses konnte noch am besten dadurch bewirkt werden, dass ich statt der Kupferscheibe eine Quecksilberscheibe anwandte, in die ich die Drähte hineintauchte.

Um die kleinen Veränderungen des Widerstandes beobachten zu können, traf ich folgende Vorrichtung: Der Strom einer starken Hydrokette theilte sich in die beiden Arme ACB und ADB (Fig. 4), die Punkte C und D waren durch einen Zwischenbogen verbunden, in den ein Multiplicator eingeschaltet war; AC enthielt die Scheibe mit den beiden Drähten, durch die der Strom durch diese hindurch geleitet wurde, BC einen Rheostaten; AD war ein kurzer dicker, BD ein langer dünner Kupferdraht. Stellte ich nun den Rheostaten so, dass durch den Multiplicator kein Strom ging, so musste, wie ich gleich beweisen will (wenn die Widerstände von AC, BC, .. durch (AC), (BC), .. bezeichnet werden):

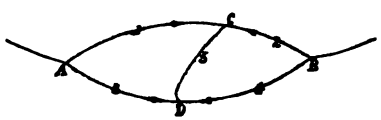


Fig. 4.

$$(AC) : (BC) = (AD) : (BD)$$

sein. Die Veränderungen von (AC) waren also den unmittelbar beobachteten Veränderungen von (BC) proportional; einer kleinen Veränderung von (AC) entsprach aber eine bedeutende von (BC).

Um die angegebene Proportion auf eine bequeme Weise ableiten zu können, will ich zuerst den folgenden Satz beweisen:

Wird ein System von Drähten, die auf eine ganz beliebige Weise mit einander verbunden sind, von galvanischen Strömen durchflossen, so ist:

1) wenn die Drähte 1, 2, .. μ in einem Punkte zusammenstossen,

$$I_1 + I_2 + .. + I_\mu = o,$$

wo I_1, I_2, .. die Intensitäten der Ströme bezeichnen, die jene

Drähte durchfliessen, alle nach dem Berührungspunkte zu als positiv gerechnet;

2) wenn die Drähte 1, 2, .. ν eine geschlossene Figur bilden,

$$I_1 . \omega_1 + I_2 . \omega_2 + .. + I_\nu . \omega_\nu$$

= der Summe aller elektromotorischen Kräfte, die sich auf dem Wege: 1, 2 .. ν befinden; wo ω_1, ω_2, .. die Widerstände der Drähte, I_1, I_2 .. die Intensitäten der Ströme bezeichnen, von denen diese durchflossen werden, alle nach *einer* Richtung als positiv gerechnet.

Der erste Theil dieses Satzes ist eine unmittelbare Folge davon, dass dem Berührungspunkte der Drähte 1, 2, .. μ eben so viel Elektricität zugeführt, als entzogen wird; der Beweis des zweiten Theiles ist folgender: die elektrische Spannung eines Punktes im Drahte i ist $= m_i - n_i l_i$, wo l_i die Entfernung desselben vom Anfangspunkte dieses Drahtes bezeichnet; nennen wir die ganze Länge dieses l_i und die elektromotorische Kraft, die ihren Sitz in der Berührungsstelle dieses und des folgenden Drahtes hat, K_i, so erhalten wir durch die Betrachtung der Spannungen der Berührungspunkte je zweier auf einander folgenden Drähte die Gleichungen:

$$\begin{aligned} m_1 - n_1 l_1 + K_1 &= m_2 \\ m_2 - n_2 l_2 + K_2 &= m_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_\nu - n_\nu l_\nu + K_\nu &= m_1 . \end{aligned}$$

Es ist also:

$$n_1 l_1 + n_2 l_2 + .. + n_\nu l_\nu = K_1 + K_2 + .. + K_\nu ;$$

da aber $I_i = n_i k_i q_i$ und $\omega_i = \frac{l_i}{k_i . q_i}$ ist, wo k_i die Leitungsfähigkeit und q_i den Querschnitt des Drahtes i bezeichnet, so können wir diese Gleichung schreiben:

$$I_1 . \omega_1 + I_2 \omega_2 + .. + I_\nu . \omega_\nu = K_1 + K_2 + .. + K_\nu$$

w. z. b. w.

Dieser Satz liefert uns durch wiederholte Anwendung immer so viel Gleichungen, als zur Bestimmung aller I's nöthig sind. Wenden wir ihn auf den vorliegenden Fall an, so erhalten wir

durch ihn (wenn wir die Drähte durch die in Fig. 4 beigeschriebenen Zahlen bezeichnen), da $I_5 = o$ sein soll:

$$I_1 + I_2 = o, \; I_1 \cdot \omega_1 - I_3 \omega_3 = o$$
$$I_3 + I_4 = o, \; I_2 \; \omega_2 - I_4 \omega_4 = o$$

Aus diesen Gleichungen folgt: $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_3}{\omega_4}$.

Nachtrag zu dem vorigen Aufsatze.[1])

Ich habe mich in diesem Aufsatze damit beschäftigt, die Elektricität zu ermitteln, die sich in einer Metallscheibe bildet, durch welche man einen constanten galvanischen Strom gehen lässt, und eine Beobachtungsmethode angegeben, durch welche ich das theoretisch gefundene Resultat experimentell geprüft habe. Es giebt noch ein anderes, naheliegendes Mittel, hier die Theorie mit dem Experimente zu vergleichen; nämlich die Beobachtung der Wirkung der Scheibe auf eine Magnetnadel; ich habe über diese Wirkung mit einer kreisförmigen Scheibe, bei der der Strom durch die beiden Endpunkte eines Durchmessers ein- und austrat, Experimente angestellt, und will jetzt angeben, in wie weit ich die Beobachtungen mit der Rechnung in Uebereinstimmung fand. Es ist meine Absicht zuerst die theoretischen Betrachtungen auseinanderzusetzen, die der Rechnung zum Grunde liegen, und dann die Versuche zu beschreiben, die ich gemacht habe.

Hängt man über einer horizontalen Scheibe, die von galvanischen Strömen durchflossen wird, eine Magnetnadel auf, so erleidet diese eine Ablenkung aus dem magnetischen Meridiane. Um diese berechnen zu können, ist es nöthig zuerst die Wirkung der Scheibe auf einen Magnetpol zu ermitteln, oder vielmehr nur die horizontale Componente dieser Wirkung. Wir wollen diese Aufgabe unter einer Voraussetzung behandeln, welche es möglich macht, sie sehr leicht allgemein zu lösen, nämlich unter der Voraussetzung, dass sich der Magnetpol unendlich nahe an der Scheibe befindet. In diesem Falle tragen zu der horizontalen Componente nur die Theile der

1) Pogg. Annal. Bd. 67. 1846.

Scheibe bei, welche unmittelbar unter dem Magnetpol liegen; alle entfernt liegenden Theile derselben geben nur eine vertikale Componente, weil die Richtung der Kraft, mit der ein Stromelement auf einen Pol wirkt, senkrecht auf der durch beide gelegten Ebene ist. Die horizontale Componente ändert sich also nicht, wenn wir annehmen, dass die entfernt liegenden Theile auf eine andere, als die wirklich stattfindende, Weise von Strömen durchflossen werden; denken wir uns die Scheibe unbegrenzt und überall in der Richtung und mit der Intensität von Elektricität durchströmt, wie an dem unter dem Pole liegenden Theile, so kommt unsere Aufgabe darauf zurück: die Wirkung einer gleichmässig von Elektricität durchflossenen, unbegrenzten Ebene auf einen Magnetpol zu ermitteln.

Wir machen die gegebene Ebene zur xy Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems, nennen die Coordinaten des Poles a, b, c, die Quantität magnetischer Flüssigkeit, die er enthält, μ, die Coordinaten eines Punktes der Ebene x, y, den Winkel, den die Richtung der Ströme mit der x Axe bildet, φ und die Intensität derselben i; dann sind die nach der x und y Axe genommenen Componenten der Kraft, welche von der Ebene auf den Pol ausgeübt wird:

$$X = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\mu i c . \sin\varphi}{((x-a)^2+(y-b)^2+c^2)^{\frac{3}{2}}} . dx\,dy$$

$$Y = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu i c . \cos\varphi}{((x-a)^2+(y-b)^2+c^2)^{\frac{3}{2}}} . dx\,dy$$

Diese Integrale lassen sich leicht auflösen; ihre Werthe sind:

$$X = -2\pi\mu i . \sin\varphi$$
$$Y = \quad 2\pi\mu i . \cos\varphi .$$

Wir haben gesehen, dass dieselben Ausdrücke auch noch gelten werden, wenn die Scheibe nicht gleichmässig von Elektricität durchströmt wird, sobald sich der Pol nur nahe genug an derselben befindet; dann müssen aber für i und φ die Werthe gesetzt werden, die diesen Grössen für die Projection des Poles auf die Scheibe zukommen. Befolgen die Ströme *das* Gesetz, dass die elektrische Spannung eines jeden Punktes

x, $y = u(x,y)$ ist, so ist für diesen Punkt, wenn die Leitungsfähigkeit der Scheibe $=1$ gesetzt wird:

$$i.\sin\varphi = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$i.\cos\varphi = -\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Sind also die horizontalen Coordinaten des Poles x und y, so sind die Kräfte, die auf ihn wirken:

$$X = \quad 2\pi\mu.\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$Y = -2\pi\mu.\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Hieraus findet man nun leicht, dass eine Magnetnadel, die sich sehr nahe an der Scheibe befindet, bei der man die magnetischen Flüssigkeiten in ihren Endpunkten concentrirt denken kann, und welche um ihren Mittelpunkt in einer horizontalen Ebene drehbar ist, ein Drehungsmoment erleidet, welches:

$$= \pi M\left(\frac{d\,u(x',y')}{dl} + \frac{d\,u(x'',y'')}{dl}\right)$$

ist, wo M das magnetische Moment der Nadel, x', y', und x'', y'' die horizontalen Coordinaten ihrer Endpunkte bezeichnen, und $\frac{d}{dl}$ die Differentiation nach der Richtung ihrer Axe andeuten soll.

Hat also die Nadel die Ablenkung ψ aus dem magnetischen Meridiane durch die Scheibe erlitten, so haben wir, wenn H die horizontale Componente des Erdmagnetismus bezeichnet, die Gleichung:

$$H.\sin\psi = \pi\left(\frac{d\,u(x',y')}{dl} + \frac{d\,u(x'',y'')}{dl}\right).$$

Mit dieser Gleichung habe ich die Beobachtungen, welche ich gemacht habe, verglichen. Die Voraussetzungen, welche in der obigen Betrachtung über die Magnetnadel gemacht sind, suchte ich möglichst dadurch zu erfüllen, dass ich eine sehr kleine Nadel anwandte, und diese der Scheibe beinahe bis zur Berührung näherte. Bei der Kleinheit der Nadel (sie bestand aus einem $\frac{1}{4}$ Zoll langen, dünnen Drahtstücke) glaubte ich mich berechtigt, sie als eine magnetische Linie ansehen zu können, bei der die magnetischen Momente der einzelnen Molecüle

constant wären, und die Axen derselben die Richtung der Linie selbst hätten; für eine solche Linie aber kann man immer zwei magnetische Pole substituiren, die sich in ihren Endpunkten befinden. Unter der Nadel befand sich eine kreisförmige Scheibe von Staniol, deren Durchmesser 10 Zoll war; sie war auf ein Stück Spiegelglas geklebt, und liess sich mit diesem in einer gegen den magnetischen Meridian senkrechten Richtung so verschieben, dass der Mittelpunkt der Nadel immer in einem Durchmesser blieb. An den Enden *des* Durchmessers, welcher mit dem magnetischen Meridiane zusammenfiel, waren die Enden zweier Dräthe festgeklemmt, die den Strom einer Daniell'schen Kette durch die Scheibe hindurchleiteten. Um den Einfluss dieser Drähte auf die Ablenkung der Nadel möglichst zu beseitigen, wurden dieselben in der Ebene der Scheibe gehalten. Das Experiment wurde nun so angestellt, dass vermittelst eines Spiegelapparats die verschiedenen Ablenkungswinkel, ψ, beobachtet wurden, die verschiedenen Abständen des Mittelpunktes der Nadel von dem Mittelpunkte der Platte, ϱ, entsprachen. Wurde die Richtung des Stromes umgekehrt, oder wurde $-\varrho$ aus ϱ gemacht, so hätte die Grösse der Ablenkung ungeändert bleiben müssen, wenn keine störenden Einflüsse da gewesen wären; die Ablenkung änderte sich aber, theils deswegen, weil die Verbindungslinie der Einströmungspunkte nicht genau mit dem magnetischen Meridiane zusammenfiel, theils wegen eines constanten Fehlers von ϱ, theils wegen des Einflusses der zuleitenden Dräthe, theils endlich wegen der Ungleichmässigkeit der Staniolscheibe. Die Ablenkungen waren:

		Bei posit. Strom.	Bei negat. Strom.
für $\varrho =$	0	94,8	96,2
	1	90,0	93,8
	2	87,8	89,2
	3	80,6	81,6
	4	71,4	72,0
	5	61,0	61,6
für $\varrho =$	-1	93,4	96,3
	-2	89,9	90,9
	-3	83,0	83,3
	-4	74,0	74,8
	-5	64,2	64,5.

Ich glaubte den Werthen, welche die Ablenkungen erhalten hätten, wenn die angedeuteten Störungen nicht dagewesen wären, nahe zu kommen, indem ich aus den je vier zusammengehörigen Werthen die arithmetischen Mittel nahm. Dadurch erhielt ich folgende Werthe für ψ:

für $\varrho=0$	95,5	für $\varrho=3$	82,2
1	93,4	4	73,1
2	89,5	5	62,8

Ich will über die angegebenen Beobachtungen noch bemerken, dass nach je zweien die Intensität des Stromes und die Richtung des magnetischen Meridians an demselben Apparate beobachtet, und durch Interpolation gefunden wurde, welchen Werth die Intensität, und welche Lage der Meridian zur Zeit einer jeden Ablenkungsbeobachtung hatte. Die angegebenen Zahlen sind auf eine constante Intensität reducirt. (Die Einheit für ψ ist 2′,6, für ϱ $\frac{1}{8}$ Zoll.) Um nun die Beobachtungen mit der Theorie zu vergleichen, berechnen wir ψ aus der Gleichung:

$$H\sin\psi = \pi\cdot\left(\frac{du(x',y')}{dl}+\frac{du(x'',y'')}{dl}\right).$$

Legen wir den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt der Scheibe, und die x Axe in den magnetischen Meridian, so ist, wenn wir den Radius der Scheibe R nennen:

$$u = A + B\cdot\log\frac{(x+R)^2+y^2}{(x-R)^2+y^2},$$

wo A und B unbekannte Constanten sind. Da der Ablenkungswinkel der Nadel sehr klein ist, so können wir:

$$x' = \frac{L}{2} \qquad x'' = -\frac{L}{2}$$
$$y' = \varrho \qquad y'' = -\varrho$$

setzen, wo L die Länge der Magnetnadel, ϱ den Abstand ihres Mittelpunktes vom Mittelpunkte der Scheibe bezeichnet. Schreiben wir ferner noch $\frac{d}{dx}$ für $\frac{d}{dl}$ und ψ für sin ψ, so erhalten wir:

$$\psi = K\frac{\left(R-\frac{L}{2}\right)\left(R+\frac{L}{2}\right)+\varrho^2}{\left\{\left(R-\frac{L}{2}\right)^2+\varrho^2\right\}\left\{\left(R+\frac{L}{2}\right)^2+\varrho^2\right\}}.$$

Berechnen wir nach dieser Formel ψ, indem wir dem ϱ die verschiedenen Werthe geben, für welche wir die Ablenkung der Nadel beobachtet haben, so finden wir, wenn wir K passend bestimmen, folgende Uebereinstimmung zwischen der Rechnung und den Beobachtungen:

ϱ	Rechnung	Beobachtet.	Fehler.
0	96,3	95,5	+0,8
1	94,4	93,4	+1,0
2	88,8	89,5	—0,7
3	81,3	82,2	—0,9
4	72,4	73,1	—0,7
5	63,5	62,8	+0,7.

Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird[1]).

Ist ein System von n Drähten: $1, 2 \ldots n$ gegeben, welche auf eine beliebige Weise unter einander verbunden sind, und hat in einem jeden derselben eine beliebige elektromotorische Kraft ihren Sitz, so findet man zur Bestimmung der Intensitäten der Ströme, von welchen die Drähte durchflossen werden, $I_1, I_2 \ldots I_n$, die nöthige Anzahl linearer Gleichungen durch Benutzung der beiden folgenden Sätze[2]):

I. Wenn die Drähte $k_1, k_2, \ldots$ eine geschlossene Figur bilden, und w_k bezeichnet den Widerstand des Drahtes k, E_k die elektromotorische Kraft, die in demselben ihren Sitz hat, nach derselben Richtung positiv gerechnet wie I_k, so ist, falls $I_{k_1}, I_{k_2}, \ldots$ alle nach *einer* Richtung als positiv gerechnet werden:

$$w_{k_1} I_{k_1} + w_{k_2} I_{k_2} + \ldots = E_{k_1} + E_{k_2} + \ldots$$

II. Wenn die Drähte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ in einem Punkte zusammenstossen, und $I_{\lambda_1}, I_{\lambda_2}, \ldots$ alle nach diesem Punkte zu als positiv gerechnet werden, so ist:

$$I_{\lambda_1} + I_{\lambda_2} + \ldots = 0.$$

---

1) Pogg. Annal. Bd. 72. 1847.

2) S. oben p. 15.

Ich will jetzt beweisen, dass die Auflösungen der Gleichungen, welche man durch Anwendung dieser Sätze für I_1, $I_2 \ldots I_n$ erhält, vorausgesetzt, dass das gegebene System von Drähten nicht in mehrere, völlig von einander getrennte zerfällt, sich folgendermassen allgemein angeben lassen:

Es sei m die Anzahl der vorhandenen Kreuzungspunkte, d. h. der Punkte, in denen zwei oder mehrere Drähte zusammenstossen, und es sei $\mu = n - m + 1$, dann ist

der gemeinschaftliche Nenner aller Grössen I die Summe derjenigen Combinationen von $w_1, w_2, \ldots w_n$ zu je μ Elementen $w_{k_1} . w_{k_2} \ldots . w_{k_\mu}$, welche die Eigenschaft haben, dass nach Fortnahme der Drähte $k_1, k_2, \ldots k_\mu$ *keine* geschlossene Figur übrig bleibt,

und es ist der Zähler von I_λ die Summe derjenigen Combinationen von $w_1, w_2 \ldots w_n$ zu je $\mu - 1$ Elementen, $w_{k_1} . w_{k_2} \ldots . w_{k_{\mu-1}}$, welche die Eigenschaft haben, dass nach Fortnahme von $k_1, k_2, \ldots k_{\mu-1}$, *eine* geschlossene Figur übrig bleibt, und dass in dieser λ vorkommt; eine jede Combination multiplicirt mit der Summe der elektromotorischen Kräfte, welche sich auf der zugehörigen geschlossenen Figur befinden. Die elektromotorischen Kräfte sind hierbei in der Richtung als positiv zu rechnen, in der I_λ als positiv gerechnet ist.

Der leichteren Uebersicht wegen will ich den Beweis, den ich von diesem Satze gebe, in einzelne Abschnitte theilen.

1.

Es sei μ die Zahl, welche angiebt, wie viele Drähte man bei einem beliebigem Systeme *wenigstens* entfernen muss, damit alle geschlossenen Figuren zerstört werden; dann ist μ auch die Anzahl der von einander unabhängigen Gleichungen, welche man durch Anwendung des Satzes I herleiten kann.

Es lassen sich nämlich μ Gleichungen, die von einander unabhängig sind, und aus denen eine jede, die aus dem Satze I folgt, abgeleitet werden kann, auf die folgende Weise aufstellen:

Es seien $1, 2, \ldots \mu - 1$, μ solche μ Drähte, nach deren Fortnahme keine geschlossene Figur übrig bleibt; nach Fortnahme von $\mu - 1$ derselben bleibt dann *eine* geschlossene Figur; auf die geschlossenen Figuren, welche der Reihe nach übrig bleiben, wenn man

$$\begin{array}{llll} & 2, & 3, \ldots . & \mu \\ 1, & & 3, \ldots . & \mu \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & 2, & 3 \ldots & \mu - 1 \end{array}$$

entfernt, wende man den Satz I an.

Von den auf diese Weise gebildeten μ Gleichungen kann keine eine Folge der übrigen sein, weil eine jede eine Unbekannte enthält, welche in allen übrigen nicht vorkommt; die erste allein enthält I_1, die zweite I_2 u. s. f. Aus diesen Gleichungen lässt sich aber auch eine jede andere bilden, die mit Hülfe des Satzes I abgeleitet werden kann; denn eine Gleichung, die aus einer geschlossenen Figur folgt, welche sich aus mehreren zusammensetzen lässt, muss aus den Gleichungen, die aus diesen folgen, (durch Addition oder Subtraction) gebildet werden können; und, wie wir zeigen wollen, kann eine jede geschlossene Figur aus jenen μ Figuren zusammengesetzt werden. Die sämmtlichen geschlossenen Figuren nämlich des gegebenen Systems, welches wir durch S bezeichnen wollen, lassen sich eintheilen, in solche, in denen der Draht μ vorkommt, und in solche, die in dem Systeme S' enthalten sind, welches aus S entsteht, wenn der Draht μ entfernt wird. Nehmen wir an, dass alle Figuren, welche der zweiten Klasse angehören, sich aus den $\mu - 1$ ersten jener μ Figuren zusammensetzen lassen, so sehen wir ein, dass eine jede Figur des Systems S sich aus diesen μ zusammensetzen lassen muss; denn eine beliebige Figur, in der der Draht μ vorkommt, lässt sich zusammensetzen aus einer bestimmten, in der μ vorkommt, und aus solchen, in denen μ nicht vorkommt. Die über das System S' gemachte Annahme lässt sich aber wieder auf eine ähnliche in Bezug auf S'' zurückführen, wenn S'' das System ist, welches aus S durch Entfernung von μ und $\mu - 1$ entsteht; nämlich auf die Annahme, dass alle in S'' vorkommenden geschlossenen Figuren sich aus den $\mu - 2$ ersten jener μ zusammensetzen lassen. Durch Fortsetzung dieser Schlussweise kommen wir endlich auf das System $S^{(\mu-1)}$; da dieses nur eine geschlossene Figur enthält, so ist die Richtigkeit der Annahme, welche wir in Bezug auf dieses machen müssen, um die Wahrheit unserer Behauptung einzusehen, von selbst klar.

2.

Da die Sätze I und II die zur Bestimmung von $I_1, I_2 \ldots I_n$ nöthige Anzahl von Gleichungen liefern müssen, so werden diese, nach dem, was wir eben bewiesen haben, die folgenden sein:

$$\alpha_1^1 w_1 I_1 + \alpha_2^1 w_2 I_2 + .. + \alpha_n^1 w_n I_n = \alpha_1^1 E_1 + \alpha_2^1 E_2 + \ldots + \alpha_n^1 E_n$$
$$\alpha_1^2 w_1 I_1 + \alpha_2^2 w_2 I_2 + \ldots + \alpha_n^2 w_n I_n = \alpha_1^2 E_1 + \alpha_2^2 E_2 + \ldots + \alpha_n^2 E_n$$
. . . . . .
$$\alpha_1^{\mu} w_1 I_1 + \alpha_2^{\mu} w_2 I_2 + \ldots + \alpha_n^{\mu} w_n I_n = \alpha_1^{\mu} E_1 + \alpha_2^{\mu} E_1 + \ldots + \alpha_n^{\mu} E_n$$
$$\alpha_1^{\mu+1} I_1 + \alpha_2^{\mu+1} I_2 + \ldots + \alpha_n^{\mu+1} I_n = 0$$
$$\alpha_1^{\mu+2} I_1 + \alpha_2^{\mu+2}{}_1 I^2 + \ldots + \alpha_n^{\mu+2} I_n = 0$$
. . . . . .
$$\alpha_1^n I_1 + \alpha_2^n I_2 + \ldots + \alpha_n^n I_n = 0,$$

wo die Grössen α theils + 1, theils — 1, theils 0 sind, und wo μ dieselbe Bedeutung wie vorher hat.

Es geht hieraus hervor, dass der gemeinschaftliche Nenner der Grössen I, d. h. die Determinante dieser Gleichungen, eine homogene Function des μten Grades von $w_1, w_2, \ldots w_n$ ist, welche ein jedes einzelne w nur linear und ausser den w's nur Zahlen enthält. Dieses Resultat können wir auch auf die folgende Weise aussprechen: der gemeinschaftliche Nenner der I's ist die Summe der Combinationen von $w_1, w_2 \ldots w_n$ zu je μ Elementen, eine jede Combination mit einem Zahlencoëfficienten multiplicirt. Eben so sieht man ein, dass der Zähler eines jeden I die Summe der Combinationen von $w_1, w_2, \ldots w_n$ zu je $\mu - 1$ ist, eine jede Combination mit einer linearen homogenen Function der Grössen $E_1, E_2, \ldots E_n$ multiplicirt, deren Coëfficienten Zahlen sind.

3.

Zur Bestimmung der Zahlencoëfficienten des Nenners und der Zähler der Grössen I führt die Bemerkung, dass es einerlei ist, ob wir den Widerstand $w_k = \infty$ machen, oder ob wir den Draht k durchschneiden oder entfernen; dass also die Ausdrücke der I's durch die Substitution $w_k = \infty$ in die Auflösungen derjenigen Gleichungen übergehen müssen, die wir durch Anwendung der Sätze I und II auf das System von Drähten er-

halten, welches aus dem gegebenen entsteht, wenn wir den Draht k entfernen. I_k selbst muss für $w_k = \infty$ verschwinden.

Wir wollen unter $1, 2 \ldots \mu-1$ beliebige $\mu-1$ Dräthe verstehen, die Zähler und Nenner der I's durch $w_1 . w_2 \ldots w_{\mu-1}$ dividiren und dann $w_1 = \infty, w_2 = \infty \ldots w_{\mu-1} = \infty$ setzen; dadurch gehe I_λ in (I_λ) über; bezeichnen wir dann die Function der E's, welche im Zähler von I_λ mit

$$w_{k_1} \cdot w_{k_2} \ldots w_{k_{\mu-1}}$$

multiplicirt ist, durch $A^\lambda_{k_1, k_2, \ldots k_{\mu-1}}$ und den Coëfficienten von $w_{k_1} . w_{k_2} \ldots w_{k_\mu}$ im Nenner durch $a_{k_1, k_2, \ldots k_\mu}$ so haben wir

$$(I_\lambda) = \frac{A^\lambda_{1, 2, \ldots \mu-1}}{a_{1, 2 \ldots \mu-1, \mu} . w_\mu + a_{1, 2 \ldots \mu-1, \mu+1} . w_{\mu+1} + \ldots + a_{1, 2 \ldots \mu-1, n} . w_n}$$

Der vorangeschickten Bemerkung zufolge ist, wenn λ unter $1, 2 \ldots \mu-1$ vorkommt:

$$(I_\lambda) = 0,$$

und, wenn λ nicht unter $1, 2 \ldots \mu-1$ vorkommt:

$$(I_\lambda) = I'_\lambda,$$

wo I'_λ die Intensität des Stromes bezeichnet, von dem der Draht λ durchflossen wird, wenn die Drähte $1, 2 \ldots \mu-1$ entfernt sind.

Wir denken uns die Gleichungen aufgestellt, die sich durch Anwendung der Sätze I und II auf das übrig gebliebene Drahtsystem zur Bestimmung von $I'_\mu, I'_{\mu+1}, \ldots I'_n$ ergeben. Der Satz I liefere hier μ' von einander unabhängige Gleichungen; dann ist der gemeinschaftliche Nenner der Grössen I' eine Function des μ'ten Grades von $w_\mu, w_{\mu+1}, \ldots w_n$, und die Zähler derselben sind Functionen des $\mu'-1$ten Grades in Bezug auf dieselben Argumente. Wegen der Definition von μ ist μ' entweder $= 1$ oder > 1. Ist $\mu' > 1$, so müssen, damit die Gleichung $(I_\lambda) = I'_\lambda$ bestehen kann, entweder Zähler und Nenner von I'_λ einen gemeinschaftlichen Factor des $\mu'-1$ten Grades in Bezug auf $w_\mu, w_{\mu+1} \ldots$ haben, oder es muss $(I_\lambda) = 0$ und $I'_\lambda = 0$ sein, oder endlich es muss (I_λ) die Form $\frac{0}{0}$ annehmen.

Der erste dieser 3 Fälle kann nicht stattfinden, wie die folgende Ueberlegung zeigt. Gesetzt es gebe einen Factor der bezeichneten Art; dieser muss dann bei allen I' in Zähler

und Nenner auftreten; er möge die Grösse w_k enthalten; k muss dann ein Draht sein, welcher in einer geschlossenen Figur liegt, weil im anderen Falle w_k in den Gleichungen für I'_μ, $I'_{\mu+1}, \ldots$ gar nicht vorkommen könnte. Da die Zähler und der Nenner der Grössen I' linear in Bezug auf ein jedes w sind, so erhalten wir für diese durch Forthebung jenes Factors Ausdrücke, welche frei von w_k sind. Substituiren wir dieselben in eine der Gleichungen, welche $w_k I'_k$ enthält, so wird diese eine identische; durch partielle Differentiation derselben nach w_k erhalten wir:

$$I'_k = 0.$$

Diese Gleichung kann aber unmöglich immer gelten; sollte dieses der Fall sein, so müsste sie auch richtig bleiben, wenn man beliebig viele der Grössen w gleich ∞ setzt, d. h. wenn man beliebig viele der Drähte entfernt; entfernt man aber so viele Drähte, dass nur *eine* geschlossene Figur übrig bleibt, in welcher k liegt, so kann unmöglich I'_k für beliebige Werthe der Grössen E verschwinden.

Diese Betrachtung lehrt zugleich, dass nicht für alle Werthe von λ die Gleichung $J'_\lambda = 0$ bestehen kann; sie kann es nicht für diejenigen Dräthe, die in geschlossenen Figuren liegen.

Es muss daher, wenn $\mu' > 1$ ist, wenigstens für einige Werthe von λ, der letzte jener drei Fälle stattfinden, d. h. (I_λ) sich unter der Form $\frac{0}{0}$ darstellen. Für $\mu' > 1$ verschwinden also die Zähler und der gemeinsame Nenner von $(I_\mu), (I_{\mu+1}) \cdot \cdot (I_n)$, oder auch, da (I_1), $(I_2) \cdot \cdot (I_{\mu-1})$ gleich Null sind, von $(I_1), (I_2) \cdot \cdot (I_n)$.

Wenn nach Fortnahme der Dräthe 1, $2 \cdot \cdot \mu - 1$ mehr als eine geschlossene Figur bleibt, so kann daher das Produkt

$$w_1 \cdot w_2 \ldots w_{\mu-1}$$

weder in einem Zähler noch in dem Nenner der Grössen I_1, $I_2 \cdot \cdot I_n$ vorkommen.

4.

Jetzt wollen wir die Factoren zu bestimmen suchen, mit denen das Product $w_1 \cdot w_2 \ldots w_{\mu-1}$ in den Zählern und in dem Nenner der I's multiplizirt vorkommt, wenn die Bedingung erfüllt wird, dass nach Fortnahme von 1, $2 \cdot \cdot \mu - 1$ nur eine geschlossene Figur übrig bleibt.

Es enthalte die übrigbleibende Figur die Dräthe: λ_1, λ_2, $\ldots\lambda_\nu$; dann ist, falls λ nicht unter diesen vorkommt:

$$I'_\lambda = 0,$$

und falls λ unter denselben vorkommt:

$$I'_\lambda = \frac{E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \ldots + E_{\lambda_\nu}}{w_{\lambda_1} + w_{\lambda_2} \ldots + w_{\lambda_\nu}},$$

wobei E_{λ_1}, $E_{\lambda_2}\ldots$ nach der Richtung als positiv gerechnet sind, nach welcher I'_λ als positiv gerechnet ist.

Der Nenner dieses Werthes kann sich von dem Nenner der Grösse (I_λ), d. h. von dem Ausdrucke:

$$a_{1,2,\ldots\mu-1,\mu} w_\mu + a_{1,2,\ldots\mu-1,\mu+1} w_{\mu+1} + \ldots + a_{1,2,\ldots\mu-1,n} w_n$$

nur durch einen Zahlenfactor unterscheiden; daher müssen von den Grössen $a_{1,2\ldots\mu-1,\mu}, a_{1,2\ldots\mu-1,\mu+1}\ldots$ alle verschwinden ausser:

$$a_{1,2,\ldots\mu-1,\lambda_1} \; a_{1,2,\ldots\mu-1,\lambda_2} \ldots\ldots a_{1,2\ldots\mu-1,\lambda_\nu}$$

und diese müssen einander gleich sein. Wir schliessen daraus, dass der Coëfficient der Combination $w_{k_1} . w_{k_2} \ldots w_{k_\mu}$ im Nenner der Grössen I nur dann von 0 verschieden sein kann, wenn durch Fortnahme der Dräthe $k_1, k_2 \ldots k_\mu$ alle geschlossenen Figuren zerstört werden; und, dass alle Combinationen, welche diese Bedingung erfüllen, und welche $\mu - 1$ gemeinschaftliche Factoren w enthalten, denselben Coëfficienten haben müssen.

Mit Hülfe hiervon lässt sich beweisen, dass irgend zwei Combinationen

$$w_{k_1} . w_{k_2} \ldots w_{k_\mu} \text{ und } w_{k'_1} . w_{k'_2} \ldots w_{k'_\mu}$$

im Nenner der I's denselben Coëfficienten haben müssen, wenn durch Entfernung sowohl der Dräthe $k_1, k_2 \ldots k_\mu$ als der Dräthe $k'_1, k'_2, \ldots k'_\mu$ alle geschlossenen Figuren zerstört werden.

Um diesen Beweis führen zu können, schicken wir die folgenden Bemerkungen voraus:

Durch Fortnahme der Dräthe $k_1, k_2, \ldots k_\mu$ mögen alle geschlossenen Figuren zerstört werden; dann muss ein jeder dieser Drähte wenigstens in einer geschlossenen Figur vorkommen.

In einer jeden geschlossenen Figur muss aber auch wenigstens einer jener Dräthe vorkommen; wissen wir also von dem Drathe k', dass er in einer geschlossenen Figur liegt, so muss dieser wenigstens mit einem der Dräthe $k_1, k_2 \ldots k_\mu$ in *derselben* geschlossenen Figur liegen.

Ferner muss ein jeder der Dräthe k_1, k_2, .. k_μ in einer geschlossenen Figur vorkommen, in der die $\mu-1$ anderen Drähte nicht vorkommen, k_μ z. B. in derjenigen, welche nach Fortnahme von k_1, k_2, .. $k_{\mu-1}$ übrig bleibt, und welche wir durch f_{k_μ} bezeichnen wollen. Liegt in f_{k_μ} auch der Draht k'_μ, so werden auch durch Fortnahme von k_1, k_2 .. $k_{\mu-1}$, k'_μ alle geschlossenen Figuren zerstört. Mit Hülfe dieser Bemerkung sieht man leicht ein, dass, wenn wir irgend eine geschlossene Figur, f, auswählen, sich immer $\mu-1$ Drähte von der Art finden lassen, dass nach Fortnahme derselben f als einzige geschlossene Figur übrig bleibt. Kommen nämlich in f von den Dräthen k_1, k_2, .. k_μ etwa k_1, k_2, k_3 vor, und ist k'_2 ein Draht, der in f_{k_2}, aber nicht in f, und k'_3 ein Draht, der in f_{k_3}, aber auch nicht in f vorkommt, so sind k'_2, k'_3, k_4 . . . k_μ Dräthe der verlangten Art.

Jenen Beweis wollen wir jetzt auf die Weise führen, dass wir annehmen, die Coëfficienten zweier Combinationen der bezeichneten Art seien einander gleich, wenn diese ν gemeinschaftliche Factoren w haben, und beweisen, dass dann auch die Coëfficienten zweier Combinationen, welche nur $\nu-1$ gemeinschaftliche Factoren haben, einander gleich sein müssen. Ist uns dieses gelungen, so werden wir die Wahrheit der aufgestellten Behauptung dargethan haben.

Die Art des Beweises bleibt dieselbe, welchen Werth für ν wir auch setzen; wir wollen denselben daher nur für einen Werth von ν, für $\nu=3$, durchführen. Wir wollen also beweisen, dass die beiden Combinationen:

$$w_{k_1} \cdot w_{k_2} \cdot w_{k_3} \cdot \ldots w_{k_\mu} \text{ und } w_{k_1} \cdot w_{k_2} \cdot w_{k'_3} \cdot \ldots w_{k'_\mu}$$

denselben Coëfficienten haben müssen.

In dem Systeme von Drähten, welches aus dem gegebenen entsteht, wenn man k_1 und k_2 entfernt, können alle geschlossenen Figuren nicht durch die Fortnahme von weniger als $\mu-2$ Drähten zerstört werden; sie werden zerstört durch die Fortnahme von k_3, k_4 . . k_μ, und durch die Fortnahme von k'_3, k'_4 . . k'_μ; hieraus folgt, dass k'_3 wenigstens mit einem der Drähte k_3, k_4 .. k_μ, wir nehmen an mit k_3, in derselben geschlossenen Figur liegt; diese bleibe als einzige übrig, wenn man k''_4, k''_5 . . k''_μ entfernt; dieselbe bleibt dann von

dem ursprünglichen Systeme als einzige übrig, wenn man k_1, k_2, k''_4, $k''_5 \ldots k''_\mu$ entfernt. Es folgt hieraus, dass die beiden Combinationen:

$$w_{k_1} \cdot w_{k_2} \cdot w_{k_3} \cdot w_{k''_4} \cdot w_{k''_5} \ldots w_{k_\mu''}$$

und

$$w_{k_1} \cdot w_{k_2} \cdot w_{k'_3} \cdot w_{k''_4} \cdot w_{k''_5} \ldots w_{k''_\mu},$$

welche $\mu - 1$ gemeinschaftliche Factoren w haben, denselben Coëfficienten haben müssen. Unserer Annahme zufolge haben aber auch die Combinationen:

$$w_{k_1} \cdot w_{k_2} \cdot w_{k_3} \cdot w_{k_4} \ldots w_{k_\mu} \quad \text{und} \quad w_{k_1} \cdot w_{k_2} \cdot w_{k_3} \cdot w_{k''_4} \ldots w_{k''_\mu}$$

$$w_{k_1} \cdot w_{k_2} \cdot w_{k'_3} \cdot w_{k'_4} \ldots w_{k'_\mu} \quad \text{und} \quad w_{k_1} \cdot w_{k_2} \cdot w_{k'_3} \cdot w_{k''_4} \ldots w_{k''_\mu}$$

paarweise denselben Coëfficienten; es sind also auch die Coëfficienten von

$$w_{k_1} \cdot w_{k_2} \cdot w_{k_3} \ldots w_{k_\mu} \quad \text{und} \quad w_{k_1} \cdot w_{k_2} \cdot w_{k'_3} \ldots w_{k'_\mu}$$

einander gleich.

Wir haben hierdurch bewiesen, dass der gemeinschaftliche Nenner der Γs die Summe derjenigen Combinationen von w_1, $w_2, \ldots w_n$ zu je μ Elementen, $w_{k_1} \cdot w_{k_2} \ldots w_{k_\mu}$ ist, welche die Eigenschaft haben, dass nach Fortnahme der Drähte k_1, $k_2 \ldots k_\mu$ keine geschlossene Figur übrig bleibt; diese Summe mit einem Zahlencoëfficienten multiplicirt. Den Zahlencoëfficienten können wir $= 1$ setzen, wenn wir die Zähler der Γs darnach bestimmen.

Diese Zähler lassen sich jetzt sehr leicht finden. Aus den Gleichungen nämlich:

$$(I_\lambda) = 0 \text{ und } (I_\lambda) = \Gamma_\lambda,$$

von denen die erste gilt, wenn $\lambda \leqq \mu - 1$, die zweite, wenn $\lambda > \mu - 1$ ist, folgt:

$$A^\lambda_{1,2,\ldots\mu-1} = E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \ldots + E_{\lambda_\nu}$$

für den Fall, dass λ unter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\nu$ vorkommt, und

$$A^\lambda_{1,2,\ldots\mu-1} = 0$$

für den entgegengesetzten Fall.

Es ist also der Coëfficient des Gliedes $w_1 \cdot w_2 \ldots w_{\mu-1}$, von welchem wir schon früher gezeigt haben, dass er nur dann von 0 verschieden sein kann, wenn nach Fortnahme von 1, 2, $\ldots \mu - 1$ eine einzige geschlossene Figur übrig bleibt — = 0, wenn in dieser Figur λ nicht vorkommt; kommt λ in ihr vor.

so ist er = der Summe der elektromotorischen Kräfte, die sich auf derselben befinden; diese nach der Richtung positiv gerechnet, nach welcher I_i als positiv gerechnet ist.

5.

Wir müssen jetzt noch, um unseren Satz, wie wir ihn ausgesprochen, bewiesen zu haben, zeigen, dass $\mu = n - m + 1$ ist. Diese Behauptung gilt nur, wenn das gegebene Drahtsystem nicht in mehrere, völlig von einander getrennte, zerfällt, während die bis jetzt angestellten Betrachtungen eine solche Voraussetzung nicht erforderten.

Wie wir gesehen haben, ist μ die Anzahl der von einander unabhängigen Gleichungen, welche sich mit Hülfe des Satzes I ableiten lassen; die Anzahl der von einander unabhängigen Gleichungen, welche der Satz II liefert, muss daher $n - \mu$ sein. Nun lässt es sich aber zeigen, dass unter jener Voraussetzung, diese Anzahl $m - 1$ ist; woraus dann $\mu = n - m + 1$ folgt.

Mehr als $m - 1$ von einander unabhängige Gleichungen lassen sich mit Hülfe des Satzes II nicht ableiten; denn wenden wir denselben auf alle m Kreuzungspunkte an, so kommt in den dadurch entstehenden Gleichungen ein jedes I zwei Mal vor, einmal mit dem Coëfficienten + 1, das andere Mal mit dem Coëfficienten − 1; die Summe sämmtlicher Gleichungen giebt also die identische Gleichung $0 = 0$. Die Gleichungen, welche man durch Anwendung jenes Satzes auf $m - 1$ beliebige Kreuzungspunkte erhält, sind aber von einander unabhängig, denn sie haben die Eigenschaft, dass, wenn wir beliebige und beliebig viele unter ihnen auswählen, in diesen eine oder einige der Unbekannten nur einmal vorkommen. Nennen wir nämlich die Kreuzungspunkte 1, 2, .. m, einen Draht, durch welchen 2 von ihnen, k und λ, mit einander verbunden sind, (k, λ), so kommt in den Gleichungen, welche durch Betrachtung der Punkte $k_1, k_2, .. k_r$ abgeleitet sind, wenn einer derselben, etwa k_1, ausser mit Punkten, die unter $k_2, .. k_r$ vorkommen, noch mit einem anderen, λ, verbunden ist, die Unbekannte $I_{(k_1, \lambda)}$ nur einmal vor. Einer der Punkte $k_1, k_2 .. k_r$ muss aber, ausser mit anderen derselben, noch mit einem Punkte λ verbunden

sein, wenn die Drähte, welche die Punkte k_1, $k_2 .. k_\nu$ mit einander verbinden, nicht ein in sich abgeschlossenes System bilden.

Es sei mir erlaubt, noch einige Bemerkungen zu dem eben bewiesenen Satze zu machen.

Ordnet man die Glieder des Zählers von I_λ nach den Grössen E_1, $E_2 .. E_n$, so wird der Coëfficient von E_k die Summe der, theils positiven, theils negativen, Combinationen von w_1, $w_2, .. w_n$ zu je $\mu - 1$, welche im Nenner der I's sowohl mit w_λ als mit w_k multiplicirt vorkommen; es sind dieses ja gerade die Combinationen $w_{k_1} . w_{k_2} \ldots w_{k_{\mu-1}}$, welche die Eigenschaft haben, dass nach Fortnahme der Drähte $k_1, k_2 .. k_{\mu-1}$ nur eine geschlossene Figur übrig bleibt, und dass in dieser sowohl λ als k vorkommt; positiv ist $w_{k_1} . w_{k_2} .. w_{k_{\mu-1}}$ zu nehmen, wenn in der übrigbleibenden Figur die positive Richtung von I_λ mit der Richtung von E_k zusammenfällt, negativ im entgegengesetzten Falle.

Es geht hieraus unter Anderem hervor, dass, wenn wir aus einem beliebigen Systeme zwei Drähte auswählen, die Intensität des Stromes, welcher in dem einen hervorgebracht wird durch eine elektromotorische Kraft in dem zweiten, gerade dieselbe ist als die Intensität des Stromes, welcher in dem zweiten hervorgebracht wird durch eine eben so grosse elektromotorische Kraft in dem ersten.

Die Bedingung, welche wir für das Vorkommen einer Combination in dem Nenner der I's gefunden haben, lässt sich, wie man leicht einsieht, auch auf die folgende Weise aussprechen: die Combination $w_{k_1} . w_{k_2} \ldots w_{k_\mu}$ kommt vor, wenn die Gleichungen, welche der Satz I liefert, unabhängig in Bezug auf I_{k_1}, $I_{k_2} \ldots$, I_{k_μ} sind; es lässt sich zeigen, dass diese Bedingung mit der übereinkommt, dass es zwischen I_{k_1}, $I_{k_2} ..$, I_{k_μ}, oder einigen dieser Grössen, keine Gleichung giebt, welche aus den Gleichungen, die durch Anwendung des Satzes II entstanden sind, abgeleitet werden kann. Diese Bemerkung wird es häufig leichter machen, die Combinationen aufzustellen, welche im Nenner der I's fehlen. Stossen z. B. die Drähte 1, 2, 3 in einem Punkte zusammen, 3, 4, 5 in einem zweiten, 5, 6, 7 in einem dritten, so fehlen alle Combinationen, welche:

$w_1 \cdot w_2 \cdot w_3$, $w_3 \cdot w_4 \cdot w_5$, $w_5 \cdot w_6 \cdot w_7$
$w_1 \cdot w_2 \cdot w_4 \cdot w_5$, $w_3 \cdot w_4 \cdot w_6 \cdot w_7$
$w_1 \cdot w_2 \cdot w_4 \cdot w_6 \cdot w_7$

enthalten.

Der Nenner der I's bei der, in der Fig. 5 dargestellten, Combination der Drähte ist hiernach die Summe aller Combinationen von w_1, $w_2 \ldots w_6$ zu je drei Elementen, mit Ausnahme der folgenden:

$w_1 \cdot w_2 \cdot w_4$, $w_1 \cdot w_3 \cdot w_5$,
$w_2 \cdot w_3 \cdot w_6$, $w_4 \cdot w_5 \cdot w_6$.

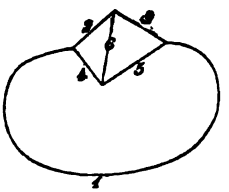


Fig. 5.

Ueber die Anwendbarkeit der Formeln für die Intensitäten der galvanischen Ströme in einem Systeme linearer Leiter auf Systeme, die zum Theil aus nicht linearen Leitern bestehen[1]).

Ohm hat aus den von ihm aufgestellten und nach ihm benannten Principien durch mathematische Betrachtungen für den Fall einer aus linearen Leitern bestehenden, unverzweigten Schliessung die bekannte Formel $J=\frac{K}{R}$ abgeleitet und die entsprechenden Formeln für den Fall, dass ein Theil der Schliessung aus zwei oder mehreren Zweigen besteht; in grösserer Allgemeinheit habe ich später die Formeln für die Stromintensitäten in einem ganz beliebigen Systeme linearer Leiter entwickelt[2]). Der Fall eines Systemes, das nur aus Leitern besteht, welche als linear angesehen werden können, kommt in der Wirklichkeit selten vor, da den Ketten meistens eine Gestalt gegeben wird, die sich an die lineare nicht im Entferntesten anschliesst; und fast in allen Fällen, in denen man jene Formeln angewandt hat, hat man sie auf Systeme angewandt, die zum Theil aus nicht linearen Leitern bestehen. Die Formeln erlauben auch auf solche Systeme eine Anwendung; dass sie

1) Pogg. Annal. Bd. 75. 1848.
2) S. oben p. 15.

diese erlauben, ist aber bis jetzt nicht aus den Ohm'schen Principien mit Strenge und Allgemeinheit nachgewiesen[1]). Dieser Nachweis bildet den Hauptgegenstand der vorliegenden Abhandlung. Derselbe kann allein aus den Gleichungen hergeholt werden, welche die Ohm'schen Principien für die Strömungen liefern, die sich in einem beliebigen Systeme sich berührender Körper bilden; diese Gleichungen will ich daher zuerst im Zusammenhange herleiten, und beweisen, dass dieselben zur vollständigen und eindeutigen Bestimmung der Strömungen ausreichen.

Ist irgend ein System von Körpern vorhanden, die sich berühren, und durch ihre Berührung galvanische Ströme erzeugen, so hat nach der Ohm'schen Vorstellung ein jeder Punkt eines jeden Körpers eine gewisse elektrische Spannung, u, die, wenn die Ströme stationär geworden sind, von der Zeit unabhängig ist. Ich denke mir in einem der Körper 2 unendlich nahe liegende Flächen gleicher Spannung; in der einen von diesen, in derjenigen, in welcher die Spannung die grössere ist, denke ich mir ein Element $d\omega$, von beliebiger Gestalt, und in allen Punkten der Peripherie desselben Normalen errichtet; diese schneiden von der zweiten Fläche ein Element aus, welches dieselbe Gestalt wie $d\omega$ hat, und ich erhalte zwischen den beiden Flächen einen unendlich kleinen Cylinder, bei welchem alle Punkte *eines* Querschnitts dieselbe Spannung haben, und bei dem die Spannung von Querschnitt zu Querschnitt gleichmässig abnimmt. Ich nenne u die Spannung in $d\omega$, N ein unbestimmtes, unendlich kleines Stück der Normale von $d\omega$, die nach der zweiten Fläche gleicher Spannung gerichtet ist; die Spannung, welche ein Querschnitt des Cylinders hat, der dem Werthe von N entspricht, ist dann $u + \frac{\partial u}{\partial N} N$ (wobei $\frac{\partial u}{\partial N}$ negativ sein wird,); es fliesst also, nach Ohm, durch einen jeden Querschnitt des Cylinders in der Zeiteinheit in der Richtung von N eine Elektricitätsmenge, die

$$= -k \cdot d\omega \cdot \frac{\partial u}{\partial N}$$

ist, wo k die Leitungsfähigkeit des betrachteten Körpers bezeichnet.

1) In Bezug hierauf s. Ohm's „galvanische Kette" S. 127.

Ich lege durch den Cylinder eine Ebene, die seine Axe unter einem schiefen Winkel schneidet, und nenne $d\omega'$ den Theil dieser Ebene, der innerhalb des Cylinders liegt. Durch dieses Element $d\omega'$ fliesst dann in der Zeiteinheit ebenfalls in der Richtung von N eine Elektricitätsmenge, die den eben angegebenen Ausdruck hat. Denken wir uns in einem beliebigen Punkte von $d\omega'$ eine Normale nach einer Seite hin errichtet, nennen ein unbestimmtes Stück derselben N' und den Winkel, den sie mit N bildet (N,N'), so haben wir:

$$d\omega = \eta \cos(N,N')\, d\omega',$$

wo $\eta = +1$ oder $= -1$ ist, jenachdem (N,N') ein spitzer oder ein stumpfer Winkel ist: ferner wird, da N die Normale einer Fläche gleicher Spannung ist:

$$\cos(N,N') \cdot \frac{\partial u}{\partial N} = \frac{\partial u}{\partial N'}.$$

Der Ausdruck der durch $d\omega'$ fliessenden Elektricitätsmenge wird daher

$$= -\eta \,.\, k \,.\, d\omega' \,.\, \frac{\partial u}{\partial N'}.$$

Diese Elektricitätsmenge fliesst durch $d\omega'$ nach der Seite, nach welcher N' gerichtet ist, wenn (N,N') ein spitzer Winkel ist, und dann ist $\eta = +1$; sie fliesst nach der entgegengesetzten Seite, wenn (N,N') ein stumpfer Winkel ist, und dann ist $\eta = -1$. Da wir nun, statt zu sagen, eine Elektricitätsmenge E fliesse durch $d\omega'$ von der einen Seite nach der anderen, sagen können, die Elektricitätsmenge $-E$ fliesse von der zweiten Seite nach der ersten, so können wir den Satz aufstellen, dass durch $d\omega'$ nach der Seite, nach welcher N' gerichtet ist, während der Zeiteinheit eine Elektricitätsmenge fliesse, die

$$= -k \,.\, d\omega' \,.\, \frac{\partial u}{\partial N'}$$

ist.

Dieser Satz gilt offenbar für ein jedes Flächenelement, welches in dem Körper angenommen werden kann, denn für ein jedes kann ein solcher kleiner Cylinder, wie wir ihn betrachtet haben, gefunden werden.

Hieraus ist es leicht die Gleichungen abzuleiten, aus denen die stationären Strömungen in unserem Systeme zu bestimmen sind.

Denken wir uns ein beliebiges Stück von einem der Körper, so muss die gesammte Elektricitätsmenge, die durch die Oberfläche, welche dasselbe begrenzt, während einer beliebigen Zeit in dasselbe hineinströmt, = 0 sein, nennen wir also $d\omega$ ein Element dieser Oberfläche, N die nach Innen gerichtete Normale von $d\omega$, so muss das Integral

$$-k\int d\omega \frac{\partial u}{\partial N},$$

ausgedehnt über die ganze Oberfläche, verschwinden.

Drücken wir die Lage eines Punktes in dem Körper durch rechtwinklige Coordinaten x, y, z aus, und betrachten also u als Funktion dieser 3 Grössen, so ist bekanntlich das Integral

$$\int d\omega \frac{\partial u}{\partial N},$$

ausgedehnt über die Oberfläche eines begrenzten Raumes, = dem Integrale

$$-\iiint dx\,dy\,dz \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

ausgedehnt über diesen Raum selbst. Dieses 3fache Integral, ausgedehnt über einen beliebigen Theil unseres Körpers, muss also verschwinden; das kann offenbar nur geschehen, wenn für jeden Punkt des Körpers:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{1}$$

ist.

Wir wollen nun ein Element der Oberfläche unseres Körpers betrachten; ein Theil dieser Oberfläche ist frei, d. h. nur mit Luft in Berührung, die übrigen Theile sind Berührungsflächen unseres Körpers mit andern, zu dem Systeme gehörigen Körpern. Ist $d\omega$ ein Element des freien Theiles der Oberfläche, so wird, wenn wir annehmen, dass in die Luft keine Elektricität entweicht, durch dasselbe keine Elektricität fliessen dürfen, d. h. es muss für dasselbe:

$$\frac{\partial u}{\partial N}=0 \tag{2}$$

sein.

Gehört $d\omega$ der Berührungsfläche zweier Körper des Systems an, so muss durch dasselbe eben so viel Elektricität in den einen Körper hineinströmen, als aus dem andereren herausströmt; sind also u und u_1 die Spannungen in den beiden Körpern, k und k_1 die Leitungsfähigkeiten, ist ferner N die nach dem Innern des einen, N_1 die nach dem Innern des anderen gerichtete Normale von $d\omega$, so muss jetzt:

$$k\frac{\partial u}{\partial N} + k_1\frac{\partial u_1}{\partial N_1} = 0 \tag{3}$$

sein. Für dasselbe Element muss endlich nach Ohm die Gleichung:

$$u - u_1 = U \tag{4}$$

bestehen, wo U die constante Spannungsdifferenz der sich berührenden Körper bezeichnet.

Wenden wir die Gleichungen (1) und (2) auf alle Körper an, aus welchen das System besteht, die Gleichungen (3) und (4) auf alle Berührungsflächen derselben, so erhalten wir alle Bedingungen, welche sich aus den Ohm'schen Principien zur Bestimmung der Strömungen ergeben. Wir wollen nun zeigen, dass durch diese Bedingungen die Strömungen vollkommen bestimmt sind.

Wir nehmen an, es gäbe 2 verschiedene Vertheilungsarten der Elektricität, welche den angegebenen Bedingungen genügen; wir bezeichnen die Spannung in einem unbestimmten Körper des Systemes für die eine Vertheilungsart durch u, für die anderere durch u', und wollen beweisen, dass dann $u - u'$ für alle Punkte desselben Körpers, und auch für alle Körper einen und denselben Werth hat. Hieraus wird dann folgen, dass die Strömungen, die in den beiden Fällen stattfinden, dieselben sein müssen, dass es also nur *eine* Art der Stromverbreitung giebt, die den angegebenen Gleichungen genügt.

Um den in Rede stehenden Beweis zu führen, stellen wir eine ähnliche Betrachtung an, wie Gauss in der Abhandlung: „Untersuchungen über die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte“ anstellt, um zu beweisen, dass der Werth des Potentials von Massen, die ausserhalb einer geschlossenen

Oberfläche liegen, für jeden Punkt im Innern derselben eindeutig bestimmt ist, wenn er für alle Punkte in ihr gegeben ist. Wir setzen $u-u'=v$ und untersuchen den Ausdruck:

$$(5) \qquad \sum k \iiint dx\,dy\,dz \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right\},$$

bei dem die Integration über den ganzen Raum des angenommenen Körpers auszudehnen, und die Summe in Bezug auf alle Körper zu nehmen ist; von diesem Ausdrucke lässt sich zeigen, dass er den Bedingungen zufolge, denen u und u' genügen, verschwindet; da er aber eine Summe lauter positiver Glieder ist, so kann dieses nicht anders geschehen, als wenn die einzelnen Glieder verschwinden, d. h. innerhalb eines jeden Körpers müssen die Grössen

$$\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial z}$$

verschwinden; innerhalb eines jeden Körpers muss also v constant sein; hieraus, in Verbindung mit den Gleichungen, die sich aus (4) ergeben, folgt, dass in dem ganzem Systeme v constant ist.

Dass der Ausdruck (5) wirklich verschwinden muss, sieht man auf die folgende Weise ein: Die Grössen u und u' genügen innerhalb des Körpers, auf den sie sich beziehen, der partiellen Differentialgleichung (1), also genügt auch v derselben; hieraus folgt, wie Gauss a. a. O. gezeigt hat, dass das 3fache Jntegral, welches in (5) mit k multiplicirt ist:

$$= -\int d\omega . v \frac{\partial v}{\partial N}$$

ist, wo $d\omega$ ein Element der Oberfläche des betrachteten Körpers, N die nach Innen gerichtete Normale von $d\omega$ bedeutet, v sich auf den Ort von $d\omega$ bezieht, und die Integration über die ganze Oberfläche ausgedehnt werden muss. Für den freien Theil dieser Oberfläche verschwindet aber $\frac{\partial v}{\partial N}$, da für diesen $\frac{\partial u}{\partial N}$ und $\frac{\partial u'}{\partial N}$ verschwinden müssen; wir dürfen die Integration daher nur über die Theile der Oberfläche unseres Körpers ausdehnen, die dieser mit andern Körpern gemeinschaftlich hat. Dieses Umstandes wegen verwandelt sich der Ausdruck

(5) in eine Summe von Integralen, die sich auf die Berührungsflächen, die in dem Systeme vorhanden sind, beziehen. In Rücksicht auf die Berührungsflächen zweier Körper, auf die sich die Grössen k, v, N und k_1, v_1, N_1 beziehen, haben wir nämlich das Integral

$$\int d\omega \left(k v \frac{\partial v}{\partial N} + k_1 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial N_1} \right)$$

zu bilden, und dann die Summe in Bezug auf alle Berührungsflächen zu nehmen. Aus der Bedingung (4), der u und u' genügen müssen, folgt aber $v = v_1$, und aus der Bedingung (3):

$$k \frac{\partial v}{\partial N} + k_1 \frac{\partial v_1}{\partial N_1} = 0.$$

Daher verschwindet der Coëfficient von $d\omega$ unter dem Integralzeichen, es verschwindet das Integral selbst, ebenso alle ähnlichen Integrale, die sich auf die anderen Berührungsflächen beziehen, und mithin auch der Ausdruck (5).

Aus den Gleichungen nun, aus denen, wie wir gezeigt haben, sich die Strömungen in einem beliebigen Systeme von Leitern eindeutig bestimmen lassen, wollen wir den Beweis für den folgenden Satz herleiten, aus dem die allgemeinere Anwendbarkeit der Formeln hervorgeht, welche für Systeme, die aus linearen Leitern bestehen, bewiesen sind.

Es sei ein System von Leitern vorhanden, welches aus 2 Theilen besteht, die durch 2 Drähte mit einander zusammenhängen; wir denken uns in jedem dieser Drähte einen Querschnitt, und nennen die beiden Theile, in die das System durch diese beiden Querschnitte zerlegt wird, A und B; es bestehe der Theil A aus einer einfachen Reihe verschiedener Körper, d. h. es sei von den Körpern, aus denen A gebildet ist, der erste und letzte (also diejenigen, denen jene beiden Querschnitte angehören) nur mit einem, jeder der anderen nur mit zweien der übrigen in Berührung; dann kann man, ohne die Strömung an irgend einer Stelle von B zu ändern, für A einen linearen Leiter substituiren, in dem eine elektromotorische Kraft ihren Sitz hat, die gleich ist der Summe der Spannungsdifferenzen in A, und der einen Widerstand hat, der nur abhängt von der Gestalt und Leitungsfähigkeit der Körper, aus denen A besteht.

Wir nennen jene beiden Querschnitte a und b, die Spannungen in ihnen u_a und u_b, die Elektricitätsmengen, die während der Zeiteinheit durch b von B nach A, und durch a von A nach B fliessen, und die offenbar einander gleich sind, J, endlich K die Summe sämmtlicher Spannungsdifferenzen in A, diese positiv gerechnet nach einer Weise, die im Folgenden klar hervortreten wird; dann lässt sich zeigen, dass

$$\frac{u_b - u_a + K}{J} \tag{6}$$

eine Grösse ist, die nur abhängt von der Gestalt und Leitungsfähigkeit der Körper, aus denen A besteht, also unabhängig ist von den Spannungsdifferenzen in A und von der Natur und Gestalt der zu B gehörigen Körper.

Die Körper, aus denen A besteht, bezeichnen wir durch 1, 2, . . n, so dass 1 derjenige ist, der mit dem Querschnitte a anfängt, n derjenige, der mit dem Querschnitte b endigt; die Spannungen in diesen Körpern nennen wir u_1, u_2 . . u_n. Diese Grössen genügen dann den Bedingungen, welche wir erhalten, indem wir die Gleichungen (1) und (2) auf die Körper 1, 2, . . n und die Gleichungen (3) und (4) auf die Berührungsflächen (1, 2), (2, 3) . . . . $(n-1, n)$ anwenden; durch diese Bedingungen sind die Grössen u noch nicht bestimmt, sie werden es aber — wovon man sich leicht durch eine der oben durchgeführten analogen Betrachtung überzeugt —, wenn wir die Bedingungen hinzufügen, dass

im Querschnitte a $u_1 = u_a$
im Querschnitte b $u_n = u_b$ werde.

Wir nehmen nun an, dass die Spannungsdifferenzen in A, und dass B geändert werden; die Spannungen in A werden dann andere, jene Grösse (6) bleibt aber, wie wir beweisen wollen, dieselbe. Wir bezeichnen die neuen Spannungen in A durch u_1', u_2', . . u_n', die in den Querschnitten a und b durch u_a', u_b'; die Bedingungen für die Grössen u' erhalten wir dann aus den für die Grössen u geltenden, wenn wir in diesen überall u' für u und für die alten Werthe der Spannungsdifferenzen die neuen setzen. Nun können wir beweisen, dass, wenn die Grössen u bekannt sind, den Gleichungen für die Grössen u' durch die folgende Annahme genügt wird:

$$\begin{aligned} u_1' &= \alpha u_1 + \beta_1 \\ u_2' &= \alpha u_2 + \beta_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u_n' &= \alpha u_n + \beta_n, \end{aligned}$$

wo α, β_1, β_2, . . Constanten sind, die passend bestimmt werden müssen. Den aus (1), (2) und (3) abgeleiteten Gleichungen wird durch diese Annahme genügt, welches auch die Werthe der eingeführten Constanten sein mögen; nennen wir die alten Werthe der Spannungsdifferenzen $U_{1,2}$, $U_{2,3}$, . ., die neuen $U'_{1,2}$, $U'_{2,3}$, . . ., so erhalten wir aus (4) die folgenden Bedingungen:

	für die Grössen u	für die Grössen u'
für (1,2)	$u_1 - u_2 = U_{1,2}$	$u_1' - u_2' = U_{1,2}$
(2,3)	$u_2 - u_3 = U_{2,3}$	$u_2' - u_3' = U_{2,3}$
. . .	. . . . .	. . . . .
(n-1,n)	$u_{n-1} - u_n = U_{n-1,n}$	$u'_{n-1} - u'_n = U_{n-1,n}$.

Endlich haben wir:

für a	$u_1 = u_a$	$u_1' = u_a'$
b	$u_n = u_b$	$u_n' = u_b'$.

Substituiren wir in diese Gleichungen für die Grössen u' die für diese angenommenen Werthe und benutzen die Gleichungen für die Grössen u, so erhalten wir die folgenden Gleichungen für α, β_1, β_2 . . .:

$$\begin{aligned} \beta_1 - \beta_2 &= U'_{1,2} - \alpha U_{1,2} \\ \beta_2 - \beta_3 &= U'_{2,3} - \alpha U'_{2,3} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_{n-1} - \beta_n &= U_{n-1,n} - \alpha U_{n-1,n} \\ \beta_1 - u'_a &= \alpha u_a \\ \beta_n = u'_b &- \alpha u_b. \end{aligned}$$

Allen diesen Gleichungen kann durch eine passende Wahl der Grössen α, β_1, β_2 . . genügt werden; durch jene Annahme der Funktionen u' erhalten wir also eine Bestimmung der Spannungen, die allen Bedingungen genügt, und da es nur eine einzige solche Bestimmung giebt, so ist sie eben diese einzige.

Aus der Form der Funktionen u' geht hervor, dass, wie auch die Spannungsdifferenzen in A und wie B verändert werden mögen, die Strömungscurven in A dieselben bleiben, und dass die Intensität der Strömung in allen Punkten in demselben Verhältnisse wächst. Das Verhältniss, in dem die

Strömungen in unserem Falle gewachsen sind, ist $= \alpha$, so dass, wenn wir die Stromintensität, die wir für die erste Vertheilung der Spannungen durch J bezeichneten, für die zweite durch J' bezeichnen:

$$\frac{J'}{J} = \alpha$$

ist. Berechnen wir nun α aus den für α, β_1, β_2 .. gefundenen Gleichungen, indem wir die vorletzte mit — 1 multipliciren, und dann alle addiren, so finden wir:

$$\alpha = \frac{U'_{12} + U'_{23} + .. + U'_{n-1,n} + u'_b - u'_a}{U_{12} + U_{23} + .. + U_{n-1,n} + u_b - u_a}.$$

Wir haben aber:

$$U_{12} + U_{23} + .. + U_{n-1,n} = K$$

gesetzt; machen wir entsprechend

$$U'_{12} + U'_{23} + .. + U'_{n-1,n} = K',$$

so ist:

$$\alpha = \frac{K' + u'_b - u'_a}{K + u_b - u_a},$$

also

$$\frac{K' + u'_b - u'_a}{J'} = \frac{K + u_b - u_a}{J}.$$

Wir sehen also, dass die Grösse (6) dieselbe bleibt, wenn B und die Spannungsdifferenzen in A geändert werden; sie kann also nur von Gestalt und Leitungsfähigkeit der Körper in A abhängen. Ist A ein linearer Leiter, so ist sie sein Widerstand; wir belegen sie auch in dem allgemeineren, von uns betrachteten, Falle mit diesem Namen, und bezeichnen sie durch R. Man sieht leicht ein, dass R positiv sein muss; denn nehmen wir an, dass sämmtliche Spannungsdifferenzen in $A = 0$ wären, so ist klar, dass $u_b - u_a$ und J gleichzeitig positiv oder negativ sein werden. Diese Bemerkung werden wir später gebrauchen.

Nun wollen wir zeigen, dass die Strömungen in B vollkommen bestimmt sind, wenn von A nur K und R gegeben ist; hieraus folgt dann, dass wir, ohne die Strömungen in B zu ändern, für A einen andern Leiter substituiren können, der den über A gemachten Voraussetzungen genügt, in dem die elektromotorische Kraft K ihren Sitz hat, und dessen Wider-

stand $= R$ ist. Wir können für A also auch einen linearen Leiter, bei dem diese Bedingungen erfüllt sind, substituiren.

Sind K und R gegeben, so kommt zu den Bedingungen, die sich zur Bestimmung der Spannungen in B aus den Gleichungen (1), (2), (3), (4) ergeben, wenn diese auf alle Körper und alle Berührungsflächen in B angewandt werden, noch die Bedingung

(7) $$u_b - u_a = J \cdot R - K.$$

Wir nehmen an, dass allen diesen Bedingungen durch zwei Vertheilungsarten der Elektricität genügt werde, und bezeichnen die Spannung bei der einen durch u, bei der anderen durch u'; dann lässt sich wiederum zeigen, dass $u - u'$ in dem ganzen Systeme constant sein muss, woraus dann die Bestimmtheit der Strömungen folgt. Betrachten wir den Ausdruck (5), bei dem wir die Summe über alle Körper ausgedehnt denken, die zu B gehören, so können wir von diesem auch hier beweisen, dass er verschwindet; durch dieselbe Transformation, die wir oben angewandt haben, verwandelt sich derselbe in eine Summe von Integralen, die über die Berührungsflächen in B auszudehnen sind, und zweier Integrale, die sich auf die Querschnitte a und b beziehen; jene Integrale sind hier, wie oben, $= 0$, die Summe dieser ist:

$$= (J - J')\,[u_a - u'_a - (u_b - u'_b)]$$

oder wegen der Bedingung (7):

$$= -(J - J')^2 \cdot R.$$

Aus der ursprünglichen Gestalt des Ausdrucks (5) ist ersichtlich, dass derselbe nie negativ sein kann, aus der eben abgeleiteten folgt, da R positiv ist, dass er nicht positiv sein kann; er muss also verschwinden.

Hiermit haben wir die Richtigkeit des Seite 39 ausgesprochenen Satzes bewiesen; es ist von selbst klar, wie aus diesem die Gültigkeit der für Systeme linearer Leiter abgeleiteten Formeln für solche Fälle folgt, wie sie am häufigsten bei Versuchen vorkommen.

Ich erlaube mir einige Bemerkungen hier anzuknüpfen, die mit den angestellten Betrachtungen in nahem Zusammenhange stehen.

Die Gleichungen (1), (2), (3), (4), aus denen die Spannungen in einem beliebigen Systeme von Leitern zu bestimmen sind, können in eine Bedingung zusammengefasst werden, der zufolge eine gewisse, von den Spannungen abhängige Grösse den kleinsten Werth erhalten muss, den sie bei den gegebenen Spannungsdifferenzen der Körper annehmen kann. Nimmt man das Joule'sche Gesetz für die Wärmewirkung eines galvanischen Stromes in einem Leiterelemente als richtig an, so ist jene Grösse der Ausdruck der gesammten, während einer gewissen Zeit von den Strömen in dem Systeme erregten Wärmemenge. Diese Bemerkung ist es, welche ich zuerst beweisen will.

Die Wärmemenge, die in einem Drahtelemente von einem Strome, der dasselbe durchfliesst, während einer gewissen Zeit erregt wird, ist nach Joule gleich dem Produkte aus dem Widerstande des Elementes in das Quadrat der Intensität des Stromes. Um hiernach die in einem Körper von beliebiger Gestalt erregte Wärmemenge zu berechnen, betrachte ich ein cylinderförmiges Element in demselben, dessen Axe die Richtung des Stromes an diesem Orte hat. Die in diesem Elemente erregte Wärmemenge wird ebenfalls gleich dem Produkte aus dem Widerstande desselben in das Quadrat der Intensität seines Stromes sein; ist die Länge des Elementes ds, sein Querschnitt $d\omega$, so ist der Widerstand $= \frac{ds}{k\,d\omega}$ und die Intensität $= -k\,d\omega\,\frac{\partial u}{\partial s}$; die in dem betrachteten Elemente erregte Wärmemenge ist also:

$$= k\,.\,d\omega\,.\,ds\,.\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2.$$

Berücksichtigt man nun, dass:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

und dass $d\omega\,ds$ das Volumen des betrachteten Elementes ist, so findet man für die in dem ganzen Körper erregte Wärmemenge den Ausdruck:

$$k\iiint dx\,dy\,dz\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right),$$

wo die Integration über den von dem Körper eingenommenen Raum auszudehnen ist. Nehmen wir die Summe in Bezug auf alle Körper des Systemes, so erhalten wir die gesammte Wärmemenge:

$$(8) \qquad W = \sum k \iiint dx\,dy\,dz \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right).$$

Wir suchen nun die Bedingungen dafür, dass W ein Minimum werde, während die Spannungsdifferenzen der sich berührenden Körper fest bleiben. Wir erhalten diese Bedingungen durch die Gleichung

$$\delta W = 0$$

d. h. dadurch, dass wir die Grössen u um unendlich kleine Funktionen ε vermehren, von dem Werthe, den dadurch W erhält, denjenigen, den es früher hatte, abziehen, nur die unendlich kleinen Grössen erster Ordnuug berücksichtigen, und das Resultat $= 0$ setzen. Die Grössen ε sind hierbei ganz beliebig bis auf die eine Bedingung, dass, wenn ε und ε_1 sich auf zwei Körper beziehen, die sich berühren, für jeden Punkt der Berührungsfläche derselben $\varepsilon - \varepsilon_1 = 0$ ist. Wir erhalten:

$$\delta W = 2 \sum k \iiint dx\,dy\,dz \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right)$$

oder, mit Hülfe einer bekannten Transformation:

$$= -2 \sum k \left\{ \int \varepsilon\, d\omega \frac{\partial u}{\partial N} + \iiint \varepsilon\, dx\,dy\,dz \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right\}.$$

In dem, dem Scheine nach, einfachen Integrale bedeutet $d\omega$ ein Element der Oberfläche des betrachteten Körpers, N die nach Innen gerichtete Normale dieses Elementes, ε bezieht sich auf den Ort von $d\omega$ und die Integration ist über die ganze Oberfläche des Körpers auszudehnen.

Da im Innern eines jeden Körpers ε ganz beliebig ist, so kann die Gleichung $\delta W = 0$ nur bestehen, wenn im Innern eines jeden Körpers:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

ist. Auch für jeden Punkt der freien Oberfläche eines jeden

der Körper ist ε ganz beliebig; es muss daher für einen jeden solchen Punkt:

$$\frac{\partial u}{\partial N} = 0$$

sein. Hiernach verwandelt sich δW in eine Summe von Integralen, die in Bezug auf die einzelnen Berührungsflächen des Systemes zu nehmen sind; berücksichtigen wir die Bedingung, der die Grössen ε unterworfen sein sollten, so wird:

$$\delta W = \sum \int \varepsilon \, d\omega \left(k \frac{\partial u}{\partial N} + k_1 \frac{\partial u_1}{\partial N_1} \right),$$

wo $d\omega$ ein Element einer Berührungsfläche bezeichnet, k, u, N sich auf den einen, k_1, u_1, N_1 sich auf den andern der beiden Körper beziehen, welche dieselbe bilden, ε ganz beliebig ist, die Integration über die ganze Berührungsfläche, die Summation über alle Berührungsflächen ausgedehnt werden soll. Die Gleichung $\delta W = 0$ erfordert daher, dass für jeden Punkt der Berührungsfläche zweier Körper

$$k \frac{\partial u}{\partial N} + k_1 \frac{\partial u_1}{\partial N_1} = 0$$

ist. Fügen wir zu den erhaltenen Bedingungen noch diejenige hinzu, welche wir von vorn herein festgesetzt haben, und die durch die Gleichung

$$u - u_1 = U$$

ausgesprochen wird, so haben wir also dieselben Bestimmungen, welche sich unmittelbar aus den Ohm'schen Principien ergaben.

Es ist noch zu beweisen übrig, dass W wirklich ein Minimum wird, wenn δW verschwindet; es ist dieses der Fall, da die zweite Variation, $\delta^2 W$, stets positiv ist; es ist nämlich:

$$\delta^2 W = \sum k \iiint dx \, dy \, dz \left(\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right)^2 \right).$$

Der für W gefundene Ausdruck hat eine in die Augen fallende Aehnlichkeit mit dem oben gebrauchten Ausdrucke (5); dieselbe Transformation, die wir dort benutzten, werden wir auch hier anwenden können. Durch diese reducirt sich W auf eine Summe von Integralen, die sich auf die Berührungsflächen, die in dem Systeme vorkommen, beziehen; es wird:

$$W = -\sum \int d\omega \left(u k \frac{\partial u}{\partial N} + u_1 k_1 \frac{\partial u_1}{\partial N_1} \right).$$

Nun war aber

$$k \frac{\partial u}{\partial N} + k_1 \frac{\partial u_1}{\partial N_1} = 0$$

und

$$u - u_1 = U;$$

daher wird

$$W = -\sum U \int d\omega \, k \frac{\partial u}{\partial N}$$

oder, wenn wir die Elektricitätsmenge, die in der Zeiteinheit durch die betrachtete Berührungsfläche aus dem Körper, auf den sich u_1 bezieht, nach dem, auf welchen sich u bezieht, fliesst, durch i bezeichnen:

$$W = \sum U.i.$$

Die gesammte in dem Systeme erregte Wärmemenge ist also gleich der Summe der sämmtlichen Spannungsdifferenzen, eine jede multiplicirt mit der Elektricitätsmenge, die während der Zeiteinheit durch die entsprechende Berührungsfläche in der bezeichneten Richtung fliesst.

Die Wärmemenge, die in einem Theile des Systemes erregt wird, erhalten wir, wenn wir in dem Ausdrucke (8) die Integrationen nur über diesen Theil ausdehnen; auch für diesen Fall lässt sich die eben benutzte Transformation anwenden, und wir erhalten durch sie für die in einem Theile des Systemes erregte Wärmemenge einen Ausdruck, welcher

1) aus der Summe der Elektricitätsmengen besteht, welche während der Zeiteinheit durch die Berührungsflächen strömen, so weit diese innerhalb des betrachteten Theiles liegen, eine jede Elektricitätsmenge multiplicirt mit der entsprechenden Spannungsdifferenz, und in der Weisse als positiv oder negativ gerechnet, wie es oben angegeben ist; und 2) der Summe der Elektricitätsmengen, welche während der Zeiteinheit durch die einzelnen Elemente der Flächen, durch welche der betrachtete Theil des Systemes von dem übrigen geschieden wird, in den betrachteten Theil hineinströmen, eine jede Elektricitätsmenge multiplicirt mit der Spannung des entsprechenden Elementes.

Wir wollen uns ein System denken, wie es oben S. 39 angegeben worden ist, und wollen die Wärmemenge be-

rechnen, die in dem Theile A entwickelt wird. Wir behalten hierbei die Bezeichnungen, die dort eingeführt worden sind, bei. Die Elektricitätsmengen, die während der Zeiteinheit durch die einzelnen Berührungsflächen fliessen, sind hier offenbar alle einander gleich, und $= J$; hieraus ergiebt sich die in A erregte Wärmemenge

$$\begin{aligned} &= K.J + u_b J - u_a J \\ &= (u_b - u_a + K)J \\ &= J^2.R. \end{aligned}$$

Hierdurch ist der Satz, der für lineare Leiter durch das Joule'sche Gesetz unmittelbar ausgesprochen ist, auch für Leiter der Art, wie A, nach der Ohm'schen Theorie bewiesen.

Schliesslich will ich noch bemerken, dass aus dem allgemeinen Satze, den ich hier bewiesen habe, nach dem der Ausdruck der gesammten, in einem beliebigen Systeme von Leitern erregten Wärmemenge ein Minimum wird, wenn man die Spannungsdifferenzen der sich berührenden Körper als gegeben betrachtet, — dass aus diesem Satze, wenn man ihn auf ein System linearer Leiter anwendet, die Gleichungen für die Intensitäten der diese durchfliessenden Ströme sich ergeben, welche ich früher abgeleitet habe. [1]) Besteht das System aus n Dräthen, deren Widerstände ω_1, $\omega_2 .. \omega_n$ sind, und deren Ströme die Intensitäten J_1, $J_2 .. J_n$ haben, so ist der Ausdruck der gesammten Wärmemenge:

$$W = \omega_1 J_1^2 + \omega_2 J_2^2 + . + \omega_n J_n^2.$$

Stellen wir die Bedingungen dafür auf, dass die Spannungsdifferenzen in den Berührungspunkten je zweier sich berührender Drähte gleich den gegebenen seien, so erhalten wir, wie ich a. a. O. gezeigt habe, Gleichungen, welche aussagen, dass immer, wenn die Drähte $1, 2, .. r$ eine geschlossene Figur bilden,

$$\omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 + .. + \omega_r J_r$$

gleich der Summe aller Spannungsdifferenzen ist, die sich auf dem Wege $1, 2, .. r$ befinden. Stellt man die Bedingungen dafür auf, dass jener Ausdruck W ein Minimum werde, während diese Gleichungen bestehen, so findet man mit leichter Mühe die übrigen der Gleichungen, welche ich dort gegeben

[1]) S. oben p. 15.

habe, nämlich die Gleichungen, welche aussagen, dass immer, wenn die Drähte 1, 2,..p in einem Punkte zusammenstossen:

$$J_1 + J_2 + .. J_p = 0$$

ist.

Ueber eine Ableitung der Ohm'schen Gesetze, welche sich an die Theorie der Elektrostatik anschliesst.[1])

Ohm ist bei der Ableitung seiner Gesetze der Strömungen in der galvanischen Kette von Voraussetzungen über die Elektricität ausgegangen, die nicht in Uebereinstimmung mit den Voraussetzungen sind, welche man über dieselbe hat machen müssen, um die elektrostatischen Erscheinungen zu erklären; im Widerspruche mit diesen nimmt Ohm an, dass die Elektricität in einem Leiter sich in Ruhe befindet, wenn sie den Rauminhalt desselben mit gleichmässiger Dichtigkeit erfüllt. Wenn es nun an sich schon wünschenswerth erscheinen muss, die Gesetze, denen die Strömungen der Elektricität unterworfen sind, durch Betrachtungen herzuleiten, die sich an die Theorie der Elektrostatik anschliessen, so wird dieses ein Bedürfniss, sobald man eine befriedigende Theorie von Versuchen geben will, bei denen man es sowohl mit strömender als mit ruhender Elektricität zu thun hat, von Versuchen, wie die, welche in neuerer Zeit von Hrn. Kohlrausch an der geschlossenen Kette mit Condensator und Elektrometer angestellt sind[2]). Es ist meine Absicht hier zu zeigen, wie die Ohm'schen Formeln aus dem elektrostatischen Gesetze für die gegenseitige Abstossung der Elektricitätstheilchen sich ableiten lassen, wenn man gewisse Annahmen zu Hülfe nimmt, welche sich auf Fragen beziehen, die in der Theorie der Elektrostatik ganz offen geblieben sind.

Ist einem Leiter Elektricität mitgetheilt, so wird diese sich dann im Gleichgewicht befinden, wenn die Kräfte sich gegenseitig aufheben, die von der freien Elektricität auf ein

1) Pogg. Annal. Bd. 78. 1849.
2) Pogg. Annal. Bd. 78. p. 1.

Elektricitätstheilchen, das sich an irgend einer Stelle im Innern des Leiters befindet, ausgeübt werden. Es findet dieses statt, wenn das Potential der gesammten freien Elektricität in Bezug auf einen Punkt im Innern des Leiters constant ist. Die Rechnung zeigt, dass dieses nur der Fall sein kann, wenn die freie Elektricität sich in gewisser Weise auf der Oberfläche des Leiters angeordnet hat.

Werden zwei verschiedene Leiter, etwa ein Stück Kupfer und ein Stück Zink, welche einzeln keine freie Elektricität enthielten, mit einander in Berührung gebracht, so wird der eine Leiter positiv, der andere negativ elektrisch. Die Elektricität, welche an der Berührungsstelle erregt ist, nimmt bald eine Gleichgewichtslage an; bei dieser muss nothwendig das Potential der gesammten freien Elektricität in Bezug auf alle Punkte eines jeden der beiden Leiter constant sein; daraus folgt, dass freie Elektricität sich nicht in dem Innern der Leiter befinden kann, dass dieselbe also allein auf der Oberfläche dieser gelagert sein muss; ein Theil der Elektrität wird sich an der Berührungsfläche der beiden Leiter binden, ein anderer die freie Oberfläche derselben bedecken. Das Potential aller freien Elektricität in Bezug auf alle Punkte eines jeden der Leiter ist constant; es wird aber für den ersten Leiter einen andern Werth haben, als für den zweiten, denn die Rechnung lehrt, dass, wenn es in beiden Leitern denselben Werth hätte, nirgend freie Elektricität vorhanden sein könnte, da die Summe aller freien Elektricität = 0 ist. Was nun den Unterschied der beiden Werthe des Potentials in den beiden Leitern betrifft, so könnte dieser von dem Stoffe der beiden Leiter und ihrer Gestalt abhängen; ich mache die Annahme, dass er von der letzteren unabhängig ist, und dass er die Grösse ist, die die Spannung der beiden Körper heisst. Wir wollen das Potential aller freien Elektricität in Bezug auf einen Punkt des ersten Leiters durch u_1, dasselbe in Bezug auf einen Punkt des zweiten durch u_2 bezeichnen; dann muss u_1 sowohl als u_2 constant sein; ist ferner $U_{1,2}$ die Spannung der beiden Körper, so muss

$$u_1 - u_2 = U_{1,2}$$

sein.

Denken wir uns mehrere Leiter, etwa 3, so mit einander

in Berührung gebracht, dass der Leiter 1 den Leiter 2 und dieser den Leiter 3 berührt, so wird die Elektricität auf diesen sich immer ins Gleichgewicht setzen können. Nennen wir wieder das Potential der gesammten freien Elektricität für einen Punkt des ersten Leiters u_1, für einen des zweiten u_2 und für einen des dritten u_3, und ferner die Spannung zwischen 1 und 2 $U_{1,2}$, die zwischen 2 und 3 $U_{2,3}$, so ist zu dem Gleichgewicht erforderlich, dass jede der drei Grössen u_1, u_2, u_3 constant ist und dass die Gleichungen

$$u_1 - u_2 = U_{1,2}$$
$$u_2 - u_3 = U_{2,3}$$

erfüllt sind. Nehmen wir aber an, dass die Leiter 1, 2, 3 so mit einander in Berührung gebracht worden sind, dass jeder von ihnen die beiden anderen berührt, so wird nicht immer ein Gleichgewicht der Elektricität auf ihnen möglich sein. Findet ein Gleichgewicht statt, so muss wieder jede der Grössen u_1, u_2, u_3 constant sein, und es müssen die Gleichungen:

$$u_1 - u_2 = U_{1,2}$$
$$u_2 - u_3 = U_{2,3}$$
$$u_3 - u_1 = U_{3,1}$$

erfüllt werden. Die Addition dieser Gleichungen giebt:

$$0 = U_{1,2} + U_{2,3} + U_{3,1};$$

dieser Bedingung müssen also die Spannungen der drei Leiter genügen, wenn ein Gleichgewicht der Elektricität auf ihnen möglich sein soll; der Bedingung wird genügt, wenn die drei Leiter der sogenannten Spannungsreihe angehören.

Wir haben jetzt zu untersuchen, was vorgehen wird, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist. In einem bestimmten Augenblicke wird die Vertheilung der freien Elektricität in dem Systeme eine gewisse sein; ich lasse es unbestimmt, ob diese freie Elektricität sich auch hier nur auf der Oberfläche der Leiter befindet, oder ob sie in ihr Inneres gedrungen ist. Das Potential derselben in Bezug auf einen Punkt eines der Leiter sei u; dieses u ist nicht constant, sondern eine Function der Coordinaten des Punktes, auf den es sich bezieht; daher werden auch die Kräfte, die von der freien Elektricität auf ein Elek-

tricitätstheilchen, das sich an irgend einer Stelle im Innern des Leiters befindet, ausgeübt werden, sich nicht das Gleichgewicht halten, sondern eine bestimmte Resultante liefern. Wir denken uns im Innern des Leiters ein Raumelement v, und bezeichnen jene Resultante für einen Punkt in v durch R. Ist keine freie Elektricität in v vorhanden, so wird daselbst die neutrale elektrische Flüssigkeit zerlegt werden; die positive Elektricität wird in der Richtung von R, die negative in der entgegengesetzten Richtung fortgeführt werden; dabei müssen die Mengen positiver und negativer Elektricität, die in dem Elemente v bewegt werden, und ebenso die Geschwindigkeiten derselben gleich sein. Ich nehme an, dass die Menge der einen oder der anderen Flüssigkeit, die in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt von v getrieben wird, der senkrecht auf der Richtung von R sein soll, und dessen Grösse durch dw bezeichnet werden mag,

$$= dwkR$$

sei, wo k die Leitungsfähigkeit des Körpers bezeichnet. Um zu entscheiden, was in dem Falle geschehen wird, wenn v freie Elektricität enthält, mache ich die Annahme, dass eine Bewegung der elektrischen Flüssigkeiten in einem Leiter nicht anders vor sich gehen kann, als wenn durch jedes Flächenelement in demselben gleichzeitig gleiche Mengen der beiden Elektricitäten nach entgegengesetzten Seiten strömen. Daraus folgt dann, dass, auch wenn v freie Elektricität enthält, durch dw in der Zeiteinheit ebenso viel positive Elektricität in der Richtung von R strömt, als negative in der entgegengesetzten Richtung. Was die Menge der durch dw strömenden Elektricitäten anbetrifft, so nehme ich an, dass sie wiederum

$$= dwkR$$

ist.

Fügt man zu diesen Annahmen, die zum grössten Theile schon von Weber in seinen elektrodynamischen Maassbestimmungen ausgesprochen sind, noch die hinzu, dass die Differenz der Werthe des Potentials der gesammten freien Elektricität für zwei Punkte, die in unmittelbarer Nähe aneinander diesseits und jenseits der Berührungsfläche zweier Leiter liegen, dieselbe bleibt, sei es, dass ein Strom durch die Leiter geht, oder dass die Elektricität sich in ihnen in Ruhe befindet; so

gelangt man unter der Voraussetzung, dass der elektrische Zustand des Systemes ein stationärer geworden ist, zu denselben Gleichungen für das Potential der freien Elektricität, die aus der Ohm'schen Vorstellung für die elektroskopische Kraft, d. i. die Dichtigkeit der Elektricität, sich ergeben.

In der That, nennen wir die Normale des Elementes dw, die die Richtung von R hat, N, so ist

$$R = -\frac{\partial u}{\partial N},$$

also die durch dw in der Zeiteinheit fliessende Menge positiver oder negativer Elektricität

$$= -k\,dw\,\frac{\partial u}{\partial N}.$$

Aus der Ohm'schen Vorstellung folgt derselbe Ausdruck für diese Menge, falls man mit u die elektroskopische Kraft bezeichnet [1]). Aus diesem Ausdrucke kann man aber, ohne auf die Bedeutung von u einzugehn, schliessen, dass wenn der Zustand des Systems ein stationärer geworden ist, u der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

und für jeden Punkt der freien Oberfläche des Leiters der Grenzbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial N} = 0$$

genügen muss; dass ferner für jeden Punkt der Berührungsfläche zweier Körper die Gleichung:

$$k\,\frac{\partial u}{\partial N} + k_1\,\frac{\partial u_1}{\partial N_1} = 0$$

gilt. Zu diesen Bedingungen ist, sowohl bei der Ohm'schen Vorstellung als bei der hier auseinandergesetzten, noch die hinzuzufügen, dass für jeden Punkt derselben Berührungsfläche $u - u_1$ = der Spannung der beiden Körper wird. Für die Grössen u ergeben sich also bei beiden Vorstellungen dieselben Gleichungen; in Bezug auf die Strömungen, die durch die Differentialquotienten dieser Grössen bestimmt sind, erhält man also dieselben Resultate, mag man von der einen oder

1) S. oben p. 34; hier ist Spannung genannt, was Ohm als elektroskopische Kraft bezeichnet.

von der andern ausgehen. Verschiedene Resultate erhält man aber in Betreff der Vertheilung der freien Elektricität in der Kette. Nach Ohm giebt der Werth von u an jeder Stelle des Systems unmittelbar die Dichtigkeit der Elektricität an, nicht so bei der hier entwickelten Ansicht; aus dieser folgt, dass auch bei der geschlossenen Kette freie Elektricität sich nur auf der Oberfläche der Leiter befinden kann. Da nämlich u innerhalb eines der Leiter der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

genügt, so muss u ein Potential von Massen sein, die ausserhalb dieses Leiters liegen; u ist aber das Potential aller freien Elektricität; von dieser kann also kein Theil im Innern jenes Leiters, also überhaupt nicht im Innern irgend eines der Leiter liegen.

Die hier angestellten Betrachtungen gelten, welches auch die Zahl, die Gestalt und die Anordnung der Leiter ist, die mit einander in Berührung gebracht worden sind; sie gelten also auch für den Fall, dass eine Platte eines Condensators mit einem Punkte einer geschlossenen Kette in Verbindung gesetzt ist, und geben daher die Theorie solcher Versuche, wie die oben angeführten des Hrn. Kohlrausch sind. Die Resultate, die sie liefern, sind in vollkommener Uebereinstimmung mit den Ergebnissen dieser Versuche.

Den durchgeführten Betrachtungen liegt das elektrostatische Gesetz der Wirkung elektrischer Theilchen zu Grunde. Aus diesem Gesetze lassen sich die Ampère'schen elektro-dynamischen Erscheinungen und die Inductionserscheinungen nicht erklären; Weber hat ein allgemeineres Gesetz gefunden, durch welches es ihm gelungen ist, jene Erscheinungen zu erklären, ein Gesetz, in dessen Ausdruck die relative Geschwindigkeit der Theilchen, deren Wirkung auf einander betrachtet wird, vorkommt, und das in das elektrostatische übergeht, wenn diese Geschwindigkeit verschwindet. Um die verschiedenen Felder der Elektricitätslehre unter einen Gesichtspunkt zu bringen, muss man sich daher die Aufgabe stellen, die Gesetze der Strömungen in der geschlossenen Kette aus dem Weber'schen Gesetze herzuleiten. Diese Herleitung scheint

schwer zu sein, doch ist es leicht *a posteriori* zu beweisen, dass die Vorstellung von den Strömungen, zu denen die Annahme des elektrostatischen Gesetzes geführt hat, auch mit dem Weber'schen Gesetze in Einklang ist, wenn man noch eine gewisse Hypothese zu Hülfe nimmt, die Hypothese nämlich, dass bei der Berechnung der Kraft, welche eine Scheidung der beiden Elektricitäten in dem Raumelemente v eines der Leiter hervorbringt, die Elektricitäten in v als ruhend angesehen werden müssen. Diese Annahme hat nichts Widerstrebendes, wenn man sich vorstellt, dass die Bewegung der Elektricität in einem Leiter nur von Molecül zu Molecül vor sich geht, so dass jedes Elektricitätstheilchen bei einem Molecüle, bei dem es ankommt, einen Ruhepunkt findet. Bei dieser Vorstellung kann man leicht zugeben, dass die Elektricitätsmenge, die von einem Molecül zu einem benachbarten übergeführt wird, nur durch die Kräfte bedingt wird, die auf die Elektricitätstheilchen ausgeübt werden, während sie noch an jenem Molecül sich in Ruhe befinden, nicht aber durch die Kräfte, die auf sie wirken, während sie schon auf dem Wege zum folgenden Molecül sind. In Bezug auf die Theorie der Induction, die Weber gegeben hat, ist es gleichgültig, ob man diese Annahme macht, oder nicht. Macht man dieselbe, und denkt sich übrigens die Strömungen in der Kette so, wie sie die Voraussetzung des elektrostatischen Gesetzes ergeben hat, so ist es, in Bezug auf die Grösse und die Richtung der Kraft, welche die Elektricitäten in dem Elemente v zu scheiden strebt — also in Bezug auf die elektromotorische Kraft, wie Weber sie nennt —, gleichgültig, ob man von dem elektrostatischen oder dem Weber'schen Gesetze ausgeht. Der Unterschied, der möglich wäre, müsste nämlich herrühren von den Kräften, welche die in den anderen Theilen des Systems strömenden Elektricitäten ausüben, und diese Kräfte tragen nach dem, was Weber bewiesen hat, zu jener elektromotorischen Kraft nichts bei, da die Strömungen constant sind, und gleiche Mengen der beiden Elektricitäten nach entgegengesetzten Richtungen mit derselben Geschwindigkeit führen.

Ueber die stationären elektrischen Strömungen in einer gekrümmten leitenden Fläche.[1])

Hr. Umow hat mir von einer Arbeit Mittheilung gemacht, die sich mit den stationären elektrischen Strömungen in einer gekrümmten, leitenden Platte von überall gleicher, unendlich kleiner Dicke — in einer gekrümmten, leitenden Fläche, wie ich eine solche Platte nennen will — beschäftigt. Er stellt in derselben die partielle Differentialgleichung für diese Strömungen auf, indem er die Parameter der beiden Systeme von Krümmungscurven der Fläche als unabhängige Variable benutzt, und zeigt, dass diese partielle Differentialgleichung, die von der zweiten Ordnung ist, die wichtige Eigenschaft besitzt, dass ihre Lösung sich als die Summe zweier willkürlicher Functionen von je einem Argument darstellen lässt, das durch Integration einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zwischen zwei Variabeln zu finden ist. Die Arbeit des Hrn. Umow hat mir die Veranlassung gegeben zu bemerken, dass das darin behandelte Problem in der innigsten Beziehung zu einem andern, altberühmten, steht, zu dem Problem nämlich, eine krumme Fläche auf einer ebenen in den kleinsten Theilen ähnlich abzubilden. Man sieht diese Beziehung leicht auf dem folgenden Wege ein.

Es seien, der Bezeichnungsweise von Gauss gemäss, p und q zwei Variabeln, die einen Punkt der krummen Fläche bestimmen, ds der Abstand der Punkte (p, q) und $(p + dp, q + dq)$ und

$$ds^2 = E dp^2 + 2F dp\, dq + G dq^2.$$

Sind x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes (p, q) und setzt man

$$\begin{aligned} dx &= a\,dp + a'\,dq \\ dy &= b\,dp + b'\,dq \\ dz &= c\,dp + c'\,dq, \end{aligned}$$

so ist dabei

$$\begin{aligned} E &= a^2 + b^2 + c^2 \\ F &= aa' + bb' + cc' \\ G &= a'^2 + b'^2 + c'^2. \end{aligned}$$

1) Monatsbericht der Akad. d. Wiss. zu Berlin vom 19. Juli 1875.

Ferner sei φ das elektrische Potential in dem Punkte (p, q). Lässt man ds ein Element einer Linie bedeuten, die einen Theil der krummen Fläche, dem nur durch seine Grenzen Elektricität zugeführt wird, vollständig begrenzt, und n die nach dem Innern dieses Theils gerichtete Normale von ds, so muss, damit die Strömungen stationäre seien,

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

verschwinden. Um diese Bedingung zu entwickeln, nenne man δn eine unendlich kleine, auf n von ds aus abgetragene Länge und setze

$$\delta n^2 = E\delta p^2 + 2F\delta p\,\delta q + G\delta q^2;$$

dann ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}\delta n = \frac{\partial \varphi}{\partial p}\delta p + \frac{\partial \varphi}{\partial q}\delta q.$$

Man hat aber

$$dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z = 0,$$

d. h.

$$(a\,dp + a'dq)(a\delta p + a'\delta q) + (b\,dp + b'dq)(b\delta p + b'\delta q) + (c\,dp + c'dq)(c\delta p + c'\delta q) = 0,$$

also

$$(E\,dp + F\,dq)\delta p + (F\,dp + G\,dq)\delta q = 0;$$

hieraus findet man leicht

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \frac{(F\,dp + G\,dq)\frac{\partial \varphi}{\partial p} - (E\,dp + F\,dq)\frac{\partial \varphi}{\partial q}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Dieser Ausdruck muss ein vollständiges Differential, und daher

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{F\frac{\partial \varphi}{\partial p} - E\frac{\partial \varphi}{\partial q}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) - \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{G\frac{\partial \varphi}{\partial p} - F\frac{\partial \varphi}{\partial q}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) = 0$$

sein. Das ist die partielle Differentialgleichung, der φ zu genügen hat.

Führt man statt p und q neue Variable p' und q' ein, nennt φ' die Funktion von p', q', die durch die Gleichungen zwischen p, q und p', q' identisch gleich φ wird, und setzt

$$ds^2 = E'dp'^2 + 2F'dp'\,dq' + G'dq'^2,$$

so gilt für φ' die Differentialgleichung, die aus der abgeleiteten

entsteht, wenn man den Zeichen p, q, E, F, G, φ Striche beifügt. Gelingt es nun p', q' so zu bestimmen, dass

$$F' = 0, \; E' = G'$$

ist, so wird einerseits die Gleichung für φ'

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial p'^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial q'^2} = 0;$$

das ist die Gleichung, der das elektrische Potential in einer ebenen Fläche zu genügen hat, wenn p' und q' die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes derselben bedeuten. Andererseits aber wird, wenn man p', q' als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes einer Ebene ansieht, durch die Relationen zwischen p, q und p', q', die gegebene krumme Fläche in den kleinsten Theilchen ähnlich auf einer Ebene abgebildet.

Gesetzt, man könne eine gegebene krumme Fläche in den kleinsten Theilen ähnlich auf einer ebenen abbilden und man habe eine Funktion φ', die das Potential einer möglichen Elektricitätsbewegung in der ebenen Fläche darstellt; man hat dann in der Funktion φ das Potential einer in der krummen Fläche möglichen elektrischen Strömung. Die Linien gleichen Potentials in dieser sind die Bilder der Linien gleichen Potentials in jener, da ja für entsprechende Punkte $\varphi = \varphi'$ ist, und die Stromlinien in der einen sind die Bilder der Stromlinien in der andern, da hier und dort die Stromlinien die Linien gleichen Potentials senkrecht schneiden und entsprechende Linien unter gleichen Winkeln sich treffen. Nehmen wir noch an, dass die Abbildung der beiden Flächen der Art ist, dass ihre Grenzen einander entsprechen, und die Elektricitätsbewegung, zu der das Potential φ' gehört, eine solche, dass durch die Grenzen der ebenen Fläche keine Elektricität strömt, diese Grenzen also aus Stromlinien gebildet sind, so ist die Elektricitätsbewegung in der krummen Fläche, der das Potential φ entspricht, eine solche, dass auch die Grenzen dieser Fläche aus Stromlinien bestehen, also auch durch diese Grenzen keine Elektricität fliesst.

Diese Methode, Elektricitätsbewegungen zu finden, die in krummen Flächen möglich sind, möge an zwei Fällen erläutert

werden, die vor längerer Zeil schon Hr. Boltzmann[1]) auf andern Wegen behandelt hat.

Eine in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung einer Kugelfläche auf einer Ebene erhält man bekanntlich, wenn man von dem einen Endpunkte des Kugeldurchmessers, der auf der Ebene senkrecht steht, gerade Linien zieht und die Durchschnitte mit der Ebene und der Kugelfläche einer jeden dieser Linien als Bilder von einander betrachtet. Es ist diese Abbildung die stereographische Projektion. Man denke sich die Ebene durch einen unendlich grossen, die Kugelfläche durch den entsprechenden, unendlich kleinen Kreis begrenzt. Lässt man der Ebene Elektricität durch einen Punkt zu-, durch einen andern abströmen, so sind, wie bekannt, die Stromlinien die Kreisbögen, welche diese beiden Punkte verbinden, und die Linien gleichen Potentials die Kreise, welche zu Durchmessern die Abstände je zweier Punkte haben, die zu dem Ein- und Ausstömungspunkt harmonisch liegen. Ferner ist bekannt, dass das Bild irgend eines Kreises in der Ebene wieder ein Kreis auf der Kugel ist. Es folgt daraus, dass, wenn man der Kugelfläche die Elektricität durch die Punkte zu- und abströmen lässt, die die Bilder des Ein- und des Ausströmungspunktes in der Ebene sind, die Stromlinien die Kreisbögen sind, die diese Punkte mit einander verbinden, und die Linien gleichen Potentials ebenfalls Kreise. Dass die Ebenen der letzteren, wie Hr. Boltzmann schon gefunden hat, durch die Gerade gehen, in der die Tangentialebenen sich schneiden, die an die Kugel in dem Ein- und dem Ausströmungspunkt gelegt werden können, folgt leicht aus den harmonischen Eigenschaften des Kreises. Auf die Bewegung der Elektricität in der Kugelfläche hat die unendlich kleine Oeffnung, die in dieser vorausgesetzt wurde, nur einen unendlich kleinen Einfluss; es gelten die gewonnenen Resultate daher auch, wenn diese Oeffnung fehlt. Ist die leitende Kugelfläche durch irgend einen Kreis begrenzt, so ist die Elektricitätsbewegung dieselbe, wie wenn die ganze Kugelfläche leitete, ausser den gegebenen

1) Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien LII p. 214 (1865).

Punkten, in denen die Elektricität ein- und ausströmt, aber noch ein Ein- und ein Ausströmungspunkt vorhanden wäre ausserhalb des gegebenen Stückes der Kugelfläche. Es fallen diese mit den gegebenen Ein- und Ausströmungspunkten zusammen, wenn der begrenzende Kreis durch diese hindurchgeht.

Mit Hülfe eines eigenthümlichen Kunstgriffs hat Hr. Boltzmann die Aufgabe gelöst, die Strömungen in einer Cylinderfläche zu finden, der die Elektricität durch zwei Punkte zu- und abgeleitet wird. Die folgenden Betrachtungen führen zu demselben Resultate, zu dem Hr. Boltzmann gelangt ist.

Man denke sich einen kreisförmigen Cylinder von dem Radius 1; die Lage eines Punktes desselben bestimme man durch seine Höhe z über einem festen Querschnitt und den Winkel v, den die durch ihn und die Axe gelegte Ebene mit einer festen, durch die Axe gehenden Ebene bildet. Andererseits nehme man r und v als die Polarcoordinaten eines Punktes in einer Ebene an. Setzt man

$$z = \log r,$$

so wird dadurch die Cylinderfläche in den kleinsten Theilen ähnlich auf der Ebene abgebildet. Ist die Cylinderfläche durch zwei zur Axe senkrechte Querschnitte begrenzt, so ist es die Ebene durch zwei concentrische Kreise, die die Bilder jener sind. Rücken jene Querschnitte nach beiden Seiten in die Unendlichkeit, so wird der eine dieser Kreise unendlich klein, der andere unendlich gross. Wird der so begrenzten Ebene Elektricität in den Punkten (r_1, v_1) und (r_2, v_2) zugeführt und entzogen, so kann das elektrische Potential in dem Punkte (r, v)

$$= \log \frac{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(v - v_1)}{r^2 + r_2^2 - 2rr_2 \cos(v - v_2)}$$

gesetzt werden. Macht man nun

$$r = e^z \ , \ r_1 = e^{z_1} \ , \ r_2 = e^{z_2},$$

so erhält man hieraus

$$\log \frac{e^{2z} + e^{2z_1} - 2e^{z+z_1} \cos(v - v_1)}{e^{2z} + e^{2z_2} - 2e^{z+z_2} \cos(v - v_2)},$$

und dieser Ausdruck stellt das Potential in dem Punkte z, v der Cylinderfläche bei Strömungen dar, bei denen (z_1, v_1) und (z_2, v_2) Ein- und Ausströmungspunkt sind.

Aendert man die Gestalt des Querschnitts des Cylinders, ohne die Längen seiner Elemente zu ändern, so bleiben die kleinsten Theile derFläche sich congruent; daraus folgt, dass der eben gefundene Ausdruck auch das Potential für einen Cylinder von beliebigem Querschnitt, dessen Umfang 2π ist, darstellen kann, wenn man v den auf einem Querschnitt gemessenen Abstand des variabeln Punktes von einer festen Seite der Cylinderfläche bedeuten lässt.

Es ist immer möglich eine krumme Fläche in den kleinsten Theilen ähnlich auf einer ebenen abzubilden, aber nicht immer so, dass, wie in den betrachteten Beispielen, die Grenzen der einen die Bilder der Grenzen der andern sind. Es soll auch ein Fall, in dem das nicht möglich ist, hier erörtert werden. Es handle sich um eine unbegränzte Ringfläche, die entsteht, wenn eine Kreislinie um eine in ihrer Ebene liegende, sie nicht schneidende Axe gedreht wird. Für diese Fläche kann man setzen

$$\begin{aligned} x &= (a + b\cos q)\cos p \\ y &= (a + b\cos q)\sin p \\ z &= b\sin q, \end{aligned}$$

wobei dann b den Radius des gedrehten Kreises, a den Radius des Kreises bedeutet, auf dem der Mittelpunkt jenes sich bewegt hat, und $a > b$ ist. Es ist dann

$$ds^2 = (a + b\cos q)^2 dp^2 + b^2 dq^2.$$

Man führe nun an Stelle von p, q neue Variabeln u, v ein, so dass

$$p = \frac{u}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{q}{2} = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\operatorname{tg}\frac{v}{2b}$$

ist, v mit q verschwindet und mit diesem stetig wächst. Dann wird

$$ds^2 = \frac{a^2 - b^2}{\left(a - b\cos\frac{v}{b}\right)^2}(du^2 + dv^2).$$

Durch die Gleichungen zwischen p, q, u, v ist hiernach die ganze unbegrenzte Ringoberfläche auf einer Ebene abgebildet, wenn man u und v als die rechtwinkligen Coordinaten

eines Punktes dieser ansieht, und zwar auf einem Rechteck, dessen Seiten der u-Axe und der v-Axe parallel sind und die Längen $2\pi\sqrt{a^2-b^2}$ und $2\pi b$ haben.

Wird $\varphi + i\psi$ irgend wie als Funktion von $u + iv$ bestimmt, so genügt φ der Differentialgleichung, der es zu genügen hat. Es werde die Elektricität der Ringoberfläche in zwei Punkten zu- und abgeleitet; dann kommen die Bedingungen hinzu, dass φ in diesen beiden Punkten $\pm\infty$, und zwar logarithmisch unendlich wird, in allen andern Punkten aber endlich und periodisch in Bezug auf u um $2\pi\sqrt{a^2-b^2}$, in Bezug auf v um $2\pi b$ ist. Alle diese Forderungen sind leicht zu erfüllen mit Hülfe der ϑ-Funktionen. Wir setzen, der Jacobischen Bezeichnungsweise entsprechend,

$$\vartheta(\omega) = 1 - 2q\cos\frac{\pi\omega}{K} + 2q^4\cos 2\frac{\pi\omega}{K} - 2q^9\cos 3\frac{\pi\omega}{K} + \cdots$$

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

bestimmen den Modul von ϑ aus der Gleichung

$$\frac{K'}{K} = \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}},$$

machen

$$\omega = \lambda(u + iv),$$

wo λ so gewählt ist, dass

$$K = \lambda\pi\sqrt{a^2-b^2},\quad K' = \lambda\pi b$$

wird, und bezeichnen die Werthe, die ω für den Ein- und den Ausströmungspunkt hat, durch ω_1 und ω_2, sowie die entsprechenden Werthe von v durch v_1 und v_2. Aus den bekannten Eigenschaften der ϑ-Funktionen ist dann leicht zu erweisen, dass den gestellten Forderungen durch die Gleichung

$$\varphi + i\psi = A\left\{i\frac{v_1 - v_2}{2b}\frac{\omega}{K} + \log\frac{\vartheta(\omega - \omega_2 + iK')}{\vartheta(\omega - \omega_1 + iK')}\right\} + B$$

genügt wird, in der A und B zwei willkürliche Constanten bedeuten, von denen A reell sein muss.

Als besonders einfach verdienen die 3 Fälle noch Erwähnung, dass

$$\omega_1 = iK'$$

und $\omega_2 = 0$ oder $= K$ oder $= K + iK'$

st; in diesen Fällen wird, wenn man über die Constanten A und B passend verfügt:

$$\varphi + i\psi = \lg \sin \operatorname{am} \omega \text{ oder } = \lg \cos \operatorname{am} \omega \text{ oder } = \lg \triangle \operatorname{am} \omega.$$

In der nebenstehenden Fig. 6, die den Durchschnitt der Ringoberfläche mit der xy-Ebene darstellt, ist für diese 3 Fälle die Lage des Einströmungspunktes mit 1, die Lage des Ausströmungspunktes mit sin, cos, $\triangle$ bezeichnet.

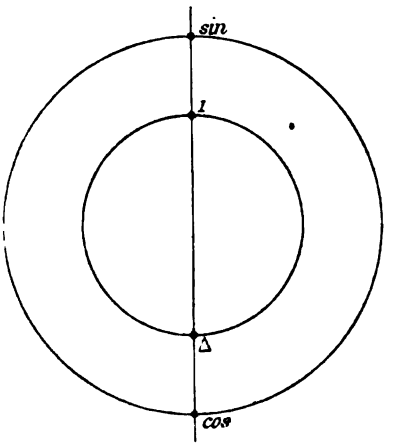


Fig. 6.

Die Beziehung, auf die aufmerksam zu machen der Zweck dieser Mittheilung ist, zwischen dem Problem der Stromverbreitung in einer krummen Fläche und dem Problem der Abbildung einer solchen auf einer Ebene ist ersichtlich für jenes von erheblicher Wichtigkeit; aber auch für dieses ist sie wohl nicht ohne Bedeutung.

Kennt man eine mögliche Elektricitätsbewegung für eine gegebene krumme Fläche, d. h. eine Funktion φ von p und q, die der dafür aufgestellten Differentialgleichung genügt, so kann man eine Abbildung der krummen Fläche auf einer ebenen finden. Der folgende Weg führt zu diesem Ziele. Bei der Ableitung der partiellen Differentialgleichung für φ wurde benutzt, dass

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

ein vollständiges Differential sein muss; man setze dieses $= d\psi$, indem man unter ψ eine neue Funktion von p und q versteht, die bis auf eine additive Constante bestimmbar ist.

$$\psi = \text{const}$$

ist dann die Gleichung der Stromlinien; denn wählt man ds so, dass $d\psi = 0$ ist, so verschwindet $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$. Aus der Definition von ψ folgt ferner

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = \frac{F \frac{\partial \varphi}{\partial p} - E \frac{\partial \varphi}{\partial q}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial q} = \frac{G\frac{\partial \varphi}{\partial p} - F\frac{\partial \varphi}{\partial q}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

und mit Hülfe hiervon findet man leicht

$$d\varphi^2 + d\psi^2 = \frac{G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial q} + E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)^2}{EG - F^2} ds^2.$$

Diese Gleichung zeigt, dass φ und ψ die Eigenschaft haben, die bei p' uud q' vorausgesetzt wurde, und dass also, wenn φ und ψ als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes in einer Ebene angesehn werden, man eine Abbildung, wie sie verlangt wurde, erhält. Ist die krumme Fläche begrenzt durch zwei Linien $\varphi = \text{const}$, und zwei Linien $\psi = \text{const}$, so ist die Abbildung ein Rechteck. Den Linien, welche, den Seiten parallel, das Rechteck in unendlich kleine Quadrate theilen, entsprechen Linien gleichen Potentials und Stromlinien, welche die krumme Fläche auch in unendlich kleine Quadrate zerlegen.

Nun möge die Elektricität in einem Punkte a im Innern der krummen Fläche einströmen und in einem zweiten Punkte b im Innern derselben ausströmen. In diesen Punkten ist φ dann $\pm \infty$, und unendlich nahe an ihnen sind die Linien gleichen Potentials, gerade so, wie wenn die Fläche eben wäre, concentrische Kreise; die Stromlinien, die alle von a ausgehn und in b endigen, sind unendlich nahe an diesen Punkten die Radien jener Kreise, und der irgend einer Stromlinie entsprechende Werth von ψ ist, bei passend gewählten Einheiten, dem Winkel gleich, den das erste Element dieser Stromlinie mit dem ersten Element einer festen Stromlinie bildet; es variirt dann ψ in der ganzen Fläche um 2π. Kennt man φ und ψ, so hat man die Abbildung der krummen Fläche auf einem Streifen, der nach den beiden Seiten der φ-Axe sich in die Unendlichkeit erstreckt; den nichtleitenden Grenzen der krummen Fläche entsprechen der φ-Axe parallele, begrenzte Linien; Stromlinien, die so gewählt sind, dass die ersten Elemente von je zweien aufeinander folgenden gleich grosse, unendlich kleine Winkel mit einander bilden, entsprechen der φ-Axe parallele, gleich weit von einander abstehende Linien.

Die Linien gleichen Potentials in einer leitenden Fläche können experimentell gefunden werden, und daher lässt sich die besprochene Abbildung in jedem Falle experimentell ausführen. Nachdem man ein System von Linien gleichen Potentials aufgesucht hat, construire man ein System von Stromlinien, von denen je zwei auf einander folgende in a einen kleinen Winkel von derselben Grösse mit einander bilden, und suche dann ein System von Linien gleichen Potentials, welche den Zwischenraum zwischen zwei beliebig gewählten, auf einander folgenden Stromlinien in unendlich kleine Quadrate theilen. Die entsprechende Theilung des Streifens findet man, indem man diesen seiner Breite nach in so viele gleiche Theile zerlegt, als man Zwischenräume zwischen auf einander folgenden Stromlinien in der krummen Fläche hat, und senkrecht zur Längsrichtung in passenden Abständen Linien zieht. Von den unendlich kleinen Quadraten, in die die krumme Fläche und der Streifen so getheilt sind, kann man ein beliebiges Paar als sich entsprechend annehmen; zwei beliebige Punkte in den beiden Flächen, die c und c' genannt werden mögen, kann man als die Bilder von einander betrachten; durch Abzählen findet man dann, welches Quadrat der einen Fläche ein gegebenes der andern darstellt. Hat man festgesetzt, welches Ende des Streifens dem Punkte a, welches dem Punkte b entspricht, und die Richtung gewählt, in der man die Quadrate des Streifens in der Breite dieses auf einander folgen lassen will, so kann man die Quadrate der krummen Fläche auf einer Linie gleichen Potentials noch in dem einen oder in dem andern Sinne zählen: man erhält dann eine Abbildung der einen oder der andern von den beiden Arten, die möglich sind.

Hat man in dieser Weise zwei krumme Flächen auf demselben Streifen abgebildet, so hat man sie auch aufeinander in den kleinsten Theilen ähnlich abgebildet. Man sieht, dass das immer möglich ist so zu bewirken, dass 3 beliebigen Punkten a, b, c der einen Fläche 3 beliebige Punkte a', b', c' der andern entsprechen. Dabei werden aber im Allgemeinen die als nicht leitend vorausgesetzten Grenzen derselben nicht die Bilder von einander sein, und überhaupt werden nicht ausnahmslos die Bilder benachbarter Punkte der einen Fläche

benachbarte Punkte der andern sein. Um dieses zu bewirken, werden im Allgemeinen in jeder Fläche gewisse Schnitte geführt werden müssen, die Theile von Stromlinien sind. Sind die beiden Flächen einfach zusammenhängende, so ist im Allgemeinen in jeder Fläche ein solcher Schnitt zu ziehn; die beiden Seiten des Schnittes der einen Fläche entsprechen dann der ursprünglichen Grenze der andern, und umgekehrt. Wählt man den Punkt c' bei gegebener Lage des Punktes c in einer passenden Stromlinie, so fallen die beiden Schnitte in die ursprünglichen Grenzen selbst und sind dann unnöthig; man braucht nur, um das zu erreichen, die Punkte c und c' in diesen Grenzen anzunehmen.

Ueber die Messung elektrischer Leitungsfähigkeiten.[1])

Zur Vergleichung der Widerstände kurzer Drähte hat Sir W. Thomson[2]) eine Methode angegeben, die auf einer Anordnung beruht, welche eine Modifikation der Wheatstone'schen Brücke ist. Eine andere Methode, die zu demselben Zwecke dienen kann, in mancher Hinsicht bequemer ist und, wie es scheint, an Genauigkeit jener nicht nachsteht, beruht auf der Anwendung eines Differential-Galvanometers, dessen Windungen so eingestellt werden können, dass ein Strom, der sie nacheinander durchfliesst, keine Ablenkung der Magnetnadel hervorbringt. Bildet man aus den beiden, zu vergleichenden Widerständen und einer Kette einen Kreis, schaltet als Nebenschliessungen zu jenen die beiden Drähte des Differentialgalvanometers ein, und verändert den Widerstand des einen dieser Drähte so lange, bis die Ablenkung der Nadel verschwindet, so ist das Verhältniss der zu vergleichenden Widerstände gleich dem Verhältniss der Widerstände der Galvanometerdrähte, vorausgesetzt, dass den Windungen di-

[1]) Monatsbericht der Akad. d. Wiss. zu Berlin vom 1. Juli 1860.
[2]) Phil. Mag. [4] Vol. XXIV p. 149. 1862.

bezeichnete Einstellung gegeben ist. Fügt man nun den beiden Galvanometerdrähten solche Widerstände hinzu, dass wiederum die Ablenkung der Nadel verschwindet, so ist auch das Verhältniss der hinzugefügten Widerstände gleich dem Verhältniss der zu vergleichenden.[1])

Will man aus dem Widerstande eines Drahtes — sei dieser nach der einen oder nach der andern der erwähnten Methoden bestimmt — die Leitungsfähigkeit ermitteln und kann man bei der Genauigkeit, die man beabsichtigt, einen Fehler nicht zulassen, der von der Ordnung des Verhältnisses der Dicke des Drahtes zu seiner Länge ist, so darf man da, wo drei Zweige des leitenden Systemes zusammenstossen, die Ströme nicht mehr als lineare ansehn; es muss also eine Anwendung der Theorie der Stromverbreitung in nicht-linearen Leitern stattfinden.

Von dem Widerstande eines nicht-linearen Leiters kann man — strenge genommen — nur unter der Voraussetzung sprechen, dass der Theil seiner Oberfläche, durch den Elektricität strömt, aus zwei Flächen besteht, von denen innerhalb einer jeden das Potential constant ist. Die Differenz der Potentialwerthe in diesen beiden Elektrodenflächen, wie sie genannt werden mögen, dividirt durch die Elektricitätsmenge, die durch die eine oder die andere in der Zeiteinheit fliesst, ist dann eine Constante des Leiters, die eben der Widerstand desselben heisst. Es muss hier ein verwickelterer Fall ins Auge gefasst werden, der Fall, dass statt der zwei Elektrodenflächen deren mehr vorhanden sind, von denen eine jede aber wieder eine Fläche gleichen Potentials sein soll.

Es sei n die Zahl der Elektrodenflächen, es seien P_1, $P_2, \ldots P_n$ die Potentialwerthe in ihnen und $J_1, J_2, \ldots J_n$ die Elektricitätsmengen, die durch sie in der Zeiteinheit in den

---

[1]) Hr. Tait hat eine ähnliche Methode mit der Thomson'schen verglichen und dieser überlegen gefunden; bei dem von ihm benutzten Differentialgalvanometer war aber, wie es scheint, nicht die Einrichtung getroffen, dass die Windungen verstellt werden konnten, und in Folge hiervon musste er auf wesentliche Vortheile verzichten, die die im Texte empfohlene Methode darbietet. Edinb. Trans. Vol. 28 p. 737. 1877—78.

Leiter hineinfliessen. Sind diese Intensitäten, zwischen denen die Relation

$$J_1 + J_2 + \ldots + J_n = 0$$

bestehen muss, gegeben, so sind die Grössen P bis auf eine additive Constante bestimmt; wird diese c genannt, so ist nämlich

$$\begin{aligned} P_1 &= c + a_{11} J_1 + a_{12} J_2 + \ldots + a_{1n} J_n \\ P_2 &= c + a_{21} J_1 + a_{22} J_2 + \ldots + a_{2n} J_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_n &= c + a_{n1} J_1 + a_{n2} J_2 + \ldots + a_{nn} J_n, \end{aligned}$$

wo die Grössen a Constanten des Leiters bezeichnen, Constanten, die, beiläufig bemerkt, aber nicht unabhängig von einander sind, sondern auf $\frac{n(n-1)}{2}$ von einander unabhängige Grössen zurückgeführt werden können.

Nun werde angenommen, dass $n = 4$ ist, dass die Elektrodenflächen 1 und 4 mit den Polen einer Kette, die Elektrodenflächen 2 und 3 mit den Enden eines Drahtes (des eines Drahtes eines Differentialgalvanometers) verbunden seien. Der Widerstand dieses Drahtes sei w. Es ist dann

$$J_3 = -J_2, \quad J_4 = -J_1.$$

Ferner hat man einerseits

$$P_2 - P_3 = w J_2,$$

andererseits

$$P_2 - P_3 = (a_{21} - a_{31} - a_{24} + a_{34}) J_1 + (a_{22} - a_{32} - a_{23} + a_{33}) J_2.$$

Setzt man

$$\begin{aligned} a_{21} - a_{31} - a_{24} + a_{34} &= \varrho \\ a_{22} - a_{32} - a_{23} + a_{33} &= r, \end{aligned}$$

so folgt hieraus

$$\varrho J_1 = (w - r) J_2.$$

Die Grösse ϱ lässt sich bezeichnen als der Werth, den $P_2 - P_3$ in dem Falle hat, dass $J_2 = -J_3 = 0$ und $J_1 = -J_4 = 1$ ist. Ist der Leiter ein sehr langer, dünner Draht, und liegen die Flächen 1, 2 ganz nahe an dem einen, die Flächen 3, 4 an dem andern Ende, so ist ϱ der Widerstand des Leiters; bei anderer Gestalt des Leiters wird man ϱ einen Widerstand desselben nennen dürfen.

Man denke sich jetzt neben dem besprochenen Leiter einen zweiten, welcher auch die Eigenschaften besitzt, die jenem beigelegt sind. Den Grössen ϱ und r bei jenem mögen die Grössen P und R bei diesem entsprechen. Die Elektrodenflächen 2 und 3 des zweiten Leiters sollen mit den Enden des zweiten Drahtes des Differentialgalvanometers verbunden sein, dessen erster Draht mit seinen Enden die Elektrodenflächen 2 und 3 des ersten Leiters berührt; die Elektrodenflächen 1 und 4 des zweiten Leiters sollen respektive mit den Elektrodenflächen 4 und 1 des ersten communiciren, die eine durch einen Draht, die zweite durch eine Kette. Es ist dann eine Anordnung hergestellt, wie sie am Anfange dieser Mittheilung beschrieben ist. Bei dieser Anordnung hat J_1 für beide Leiter denselben Werth, und dasselbe gilt auch für J_2, wenn die Nadel des Galvanometers keine Ablenkung zeigt und dieses Instrument die vorausgesetzte Einrichtung besitzt. Ist W der Widerstand des zweiten Galvanometerdrahtes, so hat man daher

$$PJ_1 = (W - R)J_2,$$

also

$$P(w - r) = \varrho(W - R).$$

Sind nun w' und W' zwei andere Werthe der Widerstände der beiden Galvanometerdrähte, bei denen die Nadel ebenfalls keine Ablenkung erleidet, so ist ebenso

$$P(w' - r) = \varrho(W' - R);$$

es ist also auch

$$P(w' - w) = \varrho(W' - W).$$

Kann man theoretisch den Widerstand ϱ durch die Leitungsfähigkeit und die Dimensionen des betreffenden Leiters ausdrücken, hat man diese Dimensionen gemessen, kennt man P und das Verhältniss der Widerstände $w' - w$ und $W' - W$, so kann man hiernach jene Leitungsfähigkeit berechnen.

Eine wesentliche Grundlage der angestellten Betrachtungen war die Voraussetzung, dass die Elektrodenflächen Flächen gleichen Potentials sind. Eine Elektrodenfläche, die diese Eigenschaft hat, kann man finden, wenn dem Leiter Elektricität durch eine Fläche zugeführt wird, deren Dimensionen unendlich klein gegen alle Dimensionen des Leiters sind. Wenn

man nämlich um einen Punkt dieser Fläche eine Kugel beschreibt mit einem Radius, der unendlich gross gegen ihre Dimensionen, aber unendlich klein gegen die Dimensionen des Leiters ist, so ist der innerhalb des Leiters befindliche Theil dieser Kugel eine Fläche gleichen Potentials, und er ist daher, wenn man ihn zur Begrenzung des Leiters, den man betrachtet, rechnet, eine Elektrodenfläche der vorausgesetzten Art. In anderer Weise kann man eine solche finden, wenn der Leiter, ganz oder zum Theil, aus einem Cylinder von beliebig gestaltetem Querschnitt besteht, dessen Länge die Dimensionen des Querschnitts erheblich übertrifft, und wenn die Elektricität am Ende desselben zuströmt. Ein Querschnitt, der von diesem Ende um ein mässiges Vielfaches der grössten Sehne des Querschnitts absteht, kann dann als eine Fläche gleichen Potentials, und also auch als eine Elektrodenfläche der in Rede stehenden Art angesehen werden, wenn man ihn als zur Grenze des Leiters gehörig betrachtet.

Eine Anordnung, die hiernach benutzt werden kann, wenn die Leitungsfähigkeit eines Stoffes gemessen werden soll, der in Form eines Cylinders von mässiger Länge vorliegt, ist die folgende: Der Strom der Kette wird dem Stabe durch seine Enden zu- und abgeleitet: die Enden des einen Galvanometerdrahtes sind mit Spitzen in leitender Verbindung, die gegen die Mantelfläche desselben in zwei Punkten gedrückt werden, deren Abstände von dem nächsten Ende ein mässiges Vielfaches der grössten Sehne des Querschnitts ausmachen. Als die Elektrodenflächen 1 und 4 können dann zwei Querschnitte des Stabes betrachtet werden, die etwa in den Mitten zwischen einem Ende und der nächsten Spitze sich befinden, als die Elektrodenflächen 2 und 3 zwei Kugelflächenstücke, die mit unendlich kleinen Radien um die beiden Spitzen beschrieben sind. Der Widerstand ϱ ist dann gleich dem Abstand der durch die beiden Spitzen gelegten Querschnitte, dividirt durch ihre Fläche und die Leitungsfähigkeit.

Es kann aber wünschenswerth sein die ganze Länge des gegebenen Stabes auszunutzen, um den zu messenden Widerstand so gross als möglich zu machen. Hat der Stab die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipedums, so empfiehlt sich

dann die Anordnung, bei der von den vier Ecken einer langen Seitenfläche zwei, einer langen Kante angehörige, mit der Kette, die beiden andern mit dem Galvanometerdrahte verbunden werden; wobei dann die Elektrodenflächen 1, 2, 3, 4 die Octanten von vier unendlich kleinen Kugelflächen sind, deren Mittelpunkte in den genannten vier Ecken liegen. Die Methode ist in der Ausführung sehr bequem, und sie bietet auch in sofern ein Interesse, als sie eine Anwendung der schönen Theorie der Stromverbreitung in einem rechtwinkligen Parellelepipedum bildet.

Hr. Grenhill[1]) hat bereits für das Potential in einem Punkte eines rechtwinkligen Parallelepipedums, dem durch einen Punkt die Elektricität zuströmt und durch einen zweiten entzogen wird, einen Ausdruck aufgestellt, der hier zu Grunde gelegt werden kann. Ein Endpunkt des Parallelepipedums sei der Anfangspunkt der Coordinaten, die von ihr ausgehenden Kanten seien die Coordinaten-Axen, a, b, c die Längen der Kanten, x_1, y_1, z_1 die Coordinaten der positiven, x_4, y_4, z_4 die Coordinaten der negativen Elektrode; ferner sei die Intensität des Stromes $= 1$ und k die Leitungsfähigkeit des Parallelepipedums; das Potential φ in Bezug auf den Punkt (x, y, z) ist dann

$$= \frac{1}{32abck}\int_0^\infty dt\,(F_1 - F_4),$$

wo

$$F_1 = \left(\vartheta_3\left(\frac{x-x_1}{2a}, \frac{i\pi t}{4a^2}\right) + \vartheta_3\left(\frac{x+x_1}{2a}, \frac{i\pi t}{4a^2}\right)\right)$$
$$\times \left(\vartheta_3\left(\frac{y-y_1}{2b}, \frac{i\pi t}{4b^2}\right) + \vartheta_3\left(\frac{y+y_1}{2b}, \frac{i\pi t}{4b^2}\right)\right)$$
$$\times \left(\vartheta_3\left(\frac{z-z_1}{2c}, \frac{i\pi t}{4c^2}\right) + \vartheta_3\left(\frac{z+z_1}{2c}, \frac{i\pi t}{4c^2}\right)\right)$$

ist, F_4 aus F_1 entsteht, wenn der Index 4 an Stelle des Index 1 gesetzt wird, und

---

[1]) Proc. of the Cambr. Phil. Soc. Oct. to Dec. 1879 p. 293.

$$\vartheta_3(w,\tau) = \Sigma e^{\nu(2w+\nu\tau)\pi i}$$

ist, die Summe so genommen, dass für ν alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ gesetzt werden. Bei Benutzung der partiellen Differentialgleichung, der die ϑ-Funktionen genügen, kann man auf dem von Hrn. Greenhill bezeichneten Wege nachweisen, dass die hierdurch definirte Funktion φ der partiellen Differentialgleichung genügt, der sie genügen soll; man kann weiter zeigen, dass die Grenzbedingungen und die Stetigkeitsbedingungen erfüllt sind, die für φ gelten, und so beweisen, dass das in Rede stehende Potential bis auf eine additive Constante dem aufgestellten Ausdruck gleich sein muss.

Um den Werth von φ zu erhalten, der der oben bezeichneten Anordnung entspricht, setzen wir

$$x_1 = 0 \qquad y_1 = 0 \qquad z_1 = 0$$
$$x_4 = 0 \qquad y_4 = 0 \qquad z_4 = c.$$

Benutzt man, dass

$$\vartheta_3(w \pm \tfrac{1}{2}, \tau) = \Sigma(-1)^\nu e^{\nu(2w+\nu\tau)\pi i} = \vartheta_0(w,\tau),$$

so ergiebt sich dadurch

$$F_1 - F_4$$
$$= 8\vartheta_3\left(\frac{x}{2a}, \frac{i\pi t}{4a^2}\right)\vartheta_3\left(\frac{y}{2b}, \frac{i\pi t}{4b^2}\right)\left(\vartheta_3\left(\frac{z}{2c}, \frac{i\pi t}{4c^2}\right) - \vartheta_0\left(\frac{z}{2c}, \frac{i\pi t}{4c^2}\right)\right)$$

oder da

$$\vartheta_3(w,\tau) - \vartheta_0(w,\tau) = 2\vartheta_2(2w, 4\tau),$$

$$\varphi = \frac{1}{2abck}\int_0^\infty \vartheta_3\left(\frac{x}{2a}, \frac{i\pi t}{4a^2}\right)\vartheta_3\left(\frac{y}{2b}, \frac{i\pi t}{4b^2}\right)\vartheta_2\left(\frac{z}{c}, \frac{i\pi t}{c^2}\right)\mathrm{d}t.$$

Um den durch ϱ bezeichneten Widerstand zu finden, hat man die Differenz der Werthe zu bilden, die dieser Ausdruck annimmt für

$$x = a \qquad y = 0 \qquad z = 0$$

und für

$$x = a \qquad y = 0 \qquad z = c,$$

vorausgesetzt, dass b die Länge derjenigen Kante ist, die senkrecht auf der Fläche der vier, als Elektroden benützten Ecken steht. Erwägt man, dass

$$\vartheta_2(w+1,\tau) = -\vartheta_2(w,\tau),$$

und schreibt der Kürze wegen

$$\vartheta(\tau) \text{ für } \vartheta(0,\tau),$$

so hat man hiernach

$$\varrho = \frac{1}{abck}\int_0^\infty dt\,\vartheta_0\left(\frac{i\pi t}{4a^2}\right)\,\vartheta_3\left(\frac{i\pi t}{4b^2}\right)\,\vartheta_2\left(\frac{i\pi t}{c^2}\right).$$

Die numerische Berechnung dieses Integrals wird verhältnissmässig leicht, wenn man dasselbe durch Einschiebung einer passenden Zwischengrenze in zwei theilt und an geeigneten Orten statt der ϑ-Funktionen mit dem Modul τ die ϑ-Funktionen mit dem Modul $-\frac{1}{\tau}$ einführt. Da

$$\vartheta_0\left(\frac{i\pi t}{4a^2}\right) = \frac{2a}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{t}}\,\vartheta_2\left(\frac{4a^2 i}{\pi t}\right)$$

$$\vartheta_3\left(\frac{i\pi t}{4b^2}\right) = \frac{2b}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{t}}\,\vartheta_3\left(\frac{4b^2 i}{4t}\right)$$

$$\vartheta_2\left(\frac{i\pi t}{c^2}\right) = \frac{c}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{t}}\,\vartheta_0\left(\frac{c^2 i}{\pi t}\right)$$

ist, so kann man setzen

$$\varrho = \frac{4}{k\pi^{\frac{1}{2}}}\int_0^\lambda \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}}\,\vartheta_2\left(\frac{4a^2 i}{\pi t}\right)\,\vartheta_3\left(\frac{4b^2 i}{\pi t}\right)\,\vartheta_0\left(\frac{c^2 i}{\pi t}\right)$$

$$+\frac{1}{abk\sqrt{\pi}}\int_\lambda^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}}\,\vartheta_0\left(\frac{i\pi t}{4a^2}\right)\,\vartheta_3\left(\frac{i\pi t}{4b^2}\right)\,\vartheta_0\left(\frac{c^2 i}{\pi t}\right),$$

wo λ eine positive Grösse ist, über die nach Willkür verfügt werden kann. Der erste dieser beiden Theile von ϱ kann geschrieben werden

$$\frac{8}{k\pi^{\frac{1}{2}}}\int_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}^\infty dt\,\vartheta_2\left(\frac{4a^2t^2 i}{\pi}\right)\,\vartheta_3\left(\frac{4b^2t^2 i}{\pi}\right)\,\vartheta_0\left(\frac{c^2t^2 i}{\pi}\right),$$

oder, da

$$\vartheta_3(\tau) = \Sigma e^{\nu^2\tau\pi i},$$
$$\vartheta_2(\tau) = \Sigma e^{(\nu+\frac{1}{2})^2\tau\pi i},$$
$$\vartheta_0(\tau) = \Sigma(-1)^\nu e^{\nu^2\tau\pi i},$$

$$\frac{8}{k\pi^{\frac{1}{2}}}\Sigma(-1)^n\int_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}^\infty dt\,e^{-((2l+1)^2a^2+4m^2b^2+n^2c^2)t^2},$$

wo die Summe so zu nehmen ist, dass für jedes der Zeichen l, m, n alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ zu setzen sind. Nun setze man

$$\int_x^\infty dt e^{-t^2} = U(x),$$

also, wenn α eine positive Grösse bezeichnet,

$$\int_x^\infty dt e^{-\alpha^2 t^2} = \frac{1}{\alpha} U(\alpha x);$$

für diese Funktion $U(x)$ und für das Intervall von $x = 0$ bis $x = 3$ ist bekanntlich von Kramp eine Tafel berechnet; für grössere Werthe des Arguments findet man ihre Werthe mit Hülfe der semiconvergenten Reihe

$$U(x) = \frac{e^{-x^2}}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\frac{1}{x^5} - \cdots\right).$$

Setzt man noch zur weiteren Abkürzung

$$\frac{1}{x} U(x) = f(x),$$

so wird der erste Theil von ϱ

$$\frac{8}{k\pi^{\frac{3}{2}}}\frac{2}{\sqrt{\lambda}} \Sigma(-1)^n f\left(\sqrt{\frac{(2l+1)^2 a^2 + 4m^2 b^2 + n^2 c^2}{\lambda}}\right).$$

Was den zweiten anbetrifft, so lässt sich derselbe schreiben

$$\frac{2}{abk\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\lambda}}^\infty dt\, \vartheta_0\left(\frac{i\pi t^2}{4a^2}\right) \vartheta_3\left(\frac{i\pi t^2}{4b^2}\right) \vartheta_0\left(\frac{c^2 i}{\pi t^2}\right)$$

oder

$$\frac{2}{abk\sqrt{\pi}} \Sigma(-1)^l \int_{\sqrt{\lambda}}^\infty dt e^{-\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)\frac{\pi^2}{4} t^2} \vartheta_0\left(\frac{c^2 i}{\pi t^2}\right),$$

wo die Summe in Bezug auf l und m so zu nehmen ist, dass für diese Zeichen alle Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ gesetzt werden. Um das Glied dieser Summe, welches bestimmten Werthen von l und m entspricht, zu berechnen, mache man

$$\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)\frac{\pi^2}{4} = \beta^2$$

mit der Festsetzung, dass β positiv ist; das Glied wird dann

$$\frac{2}{abk\sqrt{\pi}}(-1)^l \Sigma(-1)^n \int_{\sqrt{\lambda}}^{\infty} dt e^{-\beta^2 t^2 - \frac{n^2 c^2}{t^2}},$$

wo bei der Summation für n alle Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ zu setzen sind, oder

$$\frac{1}{abk\sqrt{\pi}} \frac{(-1)^l}{\beta} \Sigma(-1)^n \left\{ e^{2n\beta c} U\left(\beta\sqrt{\lambda} + \frac{nc}{\sqrt{\lambda}}\right) + e^{-2n\beta c} U\left(\beta\sqrt{\lambda} - \frac{nc}{\sqrt{\lambda}}\right)\right\}.$$

Für den Fall, dass $\beta = 0$ ist, dass also gleichzeitig l und $m = 0$ sind, gilt dieses Resultat nicht; das diesen Werthen von l und m entsprechende Glied ist

$$\frac{2}{abk\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\lambda}}^{\infty} dt \vartheta_0\left(\frac{c^2 i}{\pi t^2}\right)$$

oder

$$\frac{2}{abk\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\lambda}}^{\infty} dt \Sigma(-1)^n e^{-\frac{n^2 c^2}{t^2}}.$$

Da

$$\int dt e^{-\frac{\gamma^2}{t^2}} = te^{-\frac{\gamma^2}{t^2}} - 2\gamma U\left(\frac{\gamma}{t}\right) + \text{const.},$$

so ist dieser Ausdruck

$$= C + \frac{2}{abk\sqrt{\pi}} \Sigma(-1)^n \left(2nc U\left(\frac{nc}{\sqrt{\lambda}}\right) - \sqrt{\lambda} e^{-\frac{n^2 c^2}{\lambda}}\right),$$

wo C eine von λ unabhängige Grösse bedeutet und wo für n stets sein absoluter Werth gesetzt werden möge. Den Werth von C lernt man kennen, wenn man dasselbe Glied berechnet, nachdem man

$$\vartheta_0\left(\frac{c^2 i}{\pi t^2}\right) \text{ durch } \frac{\sqrt{\pi}}{c} t \vartheta_2\left(\frac{i\pi t^2}{c^2}\right)$$

ersetzt hat; es wird dadurch

$$\frac{1}{abck} \int_{\lambda}^{\infty} dt \vartheta_2\left(\frac{i\pi t}{c^2}\right)$$

oder

$$\frac{1}{abck} \frac{4}{\pi^2} \sum \frac{1}{(2\nu+1)^2} e^{-(2\nu+1)^2 \frac{\pi^2 \lambda}{4c^2}}.$$

Indem man $\lambda = 0$ setzt und berücksichtigt, dass

$$\sum \frac{1}{(2\nu+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

ist, ergiebt sich

$$C = \frac{c}{abk}.$$

Für den Versuch von hervorragendem Interesse ist der Fall, dass c als unendlich gross, a, b und λ als endlich anzusehen sind: in diesem Falle verschwinden von den Gliedern, deren Summe den Werth von ϱ bildet, alle, in denen s einen von Null verschiedenen Werth hat, und es wird

$$\varrho = \frac{c}{abk} - \frac{2\gamma\lambda}{abk\gamma\pi} + \frac{2\gamma\lambda}{abk\gamma\pi}\Sigma(-1)^l f\left(\frac{\pi}{2}\gamma\lambda\sqrt{l^2+\frac{m^2}{b^2}}\right)$$
$$+ \frac{8}{k\pi^{\frac{1}{2}}\gamma\lambda}\Sigma f\left(\sqrt{\frac{(2l+1)^2a^2+4m^2b^2}{\lambda}}\right),$$

wo die Summen so zu nehmen sind, dass für l und m alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ gesetzt werden, das Werthpaar $l = o$ und $m = o$ aber in der ersten Summe ausgeschlossen wird.

Macht man

$$\lambda = \frac{2ab}{\pi},$$

so folgt hieraus

$$abk.\varrho = c - \frac{\gamma 8ab}{\pi}\left\{1 - \Sigma(-1)^l f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{l^2\frac{b}{a}+m^2\frac{a}{b}}\right)\right.$$
$$\left. - 2\Sigma f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(2l+1)^2\frac{b}{a}+4m^2\frac{a}{b}}\right)\right\},$$

oder

$$abk.\varrho = c - \frac{8\gamma 2ab}{\pi}\left\{\frac{1}{4} - \sum_{\bullet}^{\infty}\sum_{\bullet}^{\infty} \varepsilon f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{l^2\frac{b}{a}+m^2\frac{a}{b}}\right)\right\},$$

wo

$\varepsilon = 0$, wenn $l = 0$ und $m = 0$,
$\varepsilon = \frac{1}{4}$, wenn $l = 0$ oder $m = 0$,
$\varepsilon = -1$, wenn l und m ungerade,
$\varepsilon = +1$ in allen andern Fällen.

Ist

$$b = a,$$

so ergiebt sich hieraus

$$a^2k.\varrho = c - a.0{,}7272.$$

Bei der Ableitung dieses Resultats reicht es aus 4 Glieder der Doppelsumme zu berechnen.

Die Ableitung des für ϱ angegebenen Ausdrucks beruhte auf der Voraussetzung, dass die Verhältnisse $\frac{c}{a}$ und $\frac{c}{b}$ als unendlich gross angesehen werden können; thatsächlich reichen aber sehr mässige Werthe dieser Verhältnisse aus, um jenen Ausdruck sehr nahe richtig zu machen. Er ist das selbst in dem Falle schon, dass

$$a = b = \frac{c}{2}$$

ist. In diesem Falle lässt sich der Werth von ϱ besonders leicht ermitteln. Nach einer der aufgestellten Gleichungen ist dann

$$\varrho = \frac{1}{a^3 k} \int_0^\infty dt\, \vartheta_0 \vartheta_3 \vartheta_2,$$

wo der Modul τ für alle 3 ϑ-Funktionen derselbe, nämlich $\frac{i\pi t}{4a^2}$ ist. Nun hat man bekanntlich

$$\vartheta_0 \vartheta_3 \vartheta_2 = \frac{1}{\pi} \vartheta'_1 = \Sigma (-1)^\nu (2\nu + 1)\, e^{-\frac{(2\nu+1)^2 \pi^2 t}{16a^2}},$$

und hieraus folgt

$$\varrho = \frac{8}{ak\pi^2} \Sigma (-1)^\nu \frac{1}{2\nu+1}$$

$$= \frac{16}{ak\pi^2} (1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \ldots)$$

$$= \frac{1}{ak\pi} \text{ d. h. } = \frac{1}{ak} \cdot 1{,}2732.$$

Berechnet man aber für diesen Fall ϱ aus der vorher abgeleiteten Formel, so findet man es wenig verschieden hiervon, nämlich

$$= \frac{1}{ak} \cdot 1{,}2728.$$

Ueber die Vertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln.[1])

Poisson hat das Problem, die Vertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln zu finden, in zwei berühmten Arbeiten[2]) behandelt und Plana hat die von Poisson dort gegebenen Formeln weiter entwickelt[3]). Man kann das Problem als aus zwei Theilen bestehend betrachten; in dem ersten ist eine Funktion zu ermitteln, die Poisson durch $f\ x$ bezeichnet, und die das Potential der auf der einen Kugel verbreiteten Elektricität für alle Punkte der Centrallinie angiebt, in dem zweiten ist aus diesem $f(x)$ eine Funktion zu bilden, die Poisson $\varphi\ (\mu, x)$ nennt, die das Potential derselben Elektricität für Punkte ausserhalb der Centrallinie darstellt, und aus der mit Leichtigkeit die Dichtigkeit der Elektricität in allen Punkten der Kugel ermittelt werden kann. Zur Berechnung derjenigen Grössen, welche den Physiker zunächst interessiren, genügt aber die Kenntniss jener Funktion $f\ x$. es ist nämlich, wenn der Radius der Kugel $= 1$ gesetzt wird, $f(0)$ die ganze Elektricitätsmenge, welche auf der Kugel sich befindet, es giebt ferner der Ausdruck $\frac{1}{4\pi}\left(f(x) + 2x\frac{df(x)}{dx}\right)$, wenn in ihm $x = 1$ oder $= -1$ gesetzt wird, die Dichtigkeit der Elektricität in dem einen oder dem anderen der beiden Punkte der Kugel an, welche in der Centrallinie liegen; und auch die Kraft, mit der die beiden Kugeln einander anziehen oder abstossen, lässt sich durch $f(x)$ ausdrücken. Die Betrachtungen, welche im Folgenden auseinandergesetzt werden sollen, beziehen sich nur auf diese Funktion $f(x)$. Poisson hat für dieselbe eine Reihe gefunden, welche immer convergirt, und zwar um so schneller, je grösser der Abstand der beiden Kugeln ist. Dieselbe Reihe habe ich auf einem Wege abgeleitet, der mir den Vorzug

1) Crelle's Journal. Bd. 59. 1861.

2) Mém. de la classe des sc. math. et ph. de l'Institut imperial de France, année 1811, première et seconde partie.

3) Memorie della reale accademia delle scienze di Torino. tomo VII. 1845.

vor dem von Poisson benutzten zu verdienen scheint. Die Reihe hat Aehnlichkeit mit gewissen Reihen, die in der Theorie der elliptischen Funktionen vorkommen; ich habe bemerkt, dass einige von $f(x)$ abhängige Grössen sich durch elliptische Funktionen in geschlossenen Ausdrücken darstellen lassen. Zu diesen gehört die Dichtigkeit der Elektricität in dem Punkte der Kugel, der auf der Centrallinie zwischen den beiden Mittelpunkten liegt, für den Fall, dass das Gesammt-Potential in beiden Kugeln denselben Werth hat. In den Abhandlungen von Poisson und von Plana finden sich zwei verschiedene Ausdrücke für den Werth, den diese Dichtigkeit annimmt, wenn der Abstand der beiden Kugeln unendlich klein ist und ihre Radien gleich sind. Poisson giebt dieselbe als von der Ordnung von δ^4, Plana als von der Ordnung von δ^6 an, wo δ eine gewisse negative Grösse bezeichnet, deren Quadrat von der Ordnung des Abstandes der Kugeln ist. Der Ausdruck durch elliptische Funktionen zeigt, dass die in Rede stehende Dichtigkeit von der Ordnung von

$$\frac{1}{\delta^3} e^{\frac{\pi^2}{\delta}}$$

ist.

Die erwähnten Resultate und andere, die sich auf den Fall beziehen, dass die beiden Kugeln einander sehr nahe stehen, sind von Poisson und Plana aus einer Reihe für $f(x)$ abgeleitet, die nach aufsteigenden Potenzen von δ fortschreitet. Diese Reihe ist aus der ursprünglichen, immer convergirenden, Reihe für $f(x)$ dadurch gebildet, dass die letztere in ein bestimmtes Integral verwandelt und dieses nach aufsteigenden Potenzen von δ entwickelt ist. Es sind indessen nur die ersten Glieder der Reihe berechnet, das allgemeine Glied derselben ist nicht aufgestellt, es konnte daher auch nicht untersucht werden, ob sie convergirt, und welche Bedeutung sie hat, wenn sie nicht convergirt. Bei ihrer Ableitung ist in einem Integral von der Form

$$\int_0^\infty \frac{\sin \delta t \, dt}{(e^{\pi t} - 1)(1 + \alpha \sin^2 \delta t)}$$

für

$$\frac{1}{1 + \alpha \sin^2 \delta t}$$

die Entwickelung dieses Ausdrucks nach aufsteigenden Potenzen von t gesetzt, eine Entwickelung, welche nicht für alle Werthe von t, über welche zu integriren ist, convergirt; es hätte einer besonderen Untersuchung bedurft, in wiefern diese Entwickelung benutzt werden darf; eine solche ist nicht geführt. Ich habe daher auf einem anderen, als dem von Poisson eingeschlagenen Wege eine Reihe abzuleiten gesucht, die bei kleinem Abstande der Kugeln den Werth von $f(x)$ angiebt. Ich bin so zu einer Reihe gelangt, die auch nach aufsteigenden Potenzen von δ fortschreitet, bei der aber die Coefficienten dieser Potenzen noch von δ abhängen; das allgemeine Glied der Reihe lässt sich mit Leichtigkeit angeben; sie ist nur eine semiconvergente, doch erlaubt sie $f(x)$ mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit zu berechnen, wenn man eine gewisse Transformationsgleichung zu Hülfe zieht, die für $f(x)$ gilt; ohne Zuziehung dieser giebt sie in dem Falle, dass der Abstand der Kugeln unendlich klein ist, den Werth von $f(x)$ genau bis auf eine unendlich kleine Grösse.

1.

Es sei a der Radius der ersten, b der der zweiten Kugel, c die Entfernung ihrer Mittelpunkte, h das Potential aller freien Elektricität in der ersten, g das aller freien Elektricität in der zweiten Kugel. Weiter sei $f(x)$ das Potential der auf der ersten Kugel befindlichen Elektricität in Beziehung auf einen Punkt, der innerhalb dieser Kugel, auf der Centrallinie, zwischen den beiden Mittelpunkten, in dem Abstande x von dem Mittelpunkte der ersten Kugel liegt. Dann ist:

$$f(x) = \int_0^{\pi} \frac{e\, d\vartheta}{\sqrt{a^2 + x^2 - 2ax\cos\vartheta}},$$

wo e eine Funktion von ϑ bedeutet. Das Potential derselben Elektricität in Beziehung auf einen Punkt, der ausserhalb der ersten Kugel, auf der Centrallinie, in dem Abstande x' von dem Mittelpunkte der ersten, auf der Seite des Mittelpunktes der zweiten Kugel liegt, ist dabei:

$$= \int_0^{\pi} \frac{e\,d\vartheta}{\sqrt{a^2 + x'^2 - 2ax'\cos\vartheta}}$$

oder

$$= \frac{a}{x'} \int_0^{\pi} \frac{e\,d\vartheta}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a^2}{x'}\right)^2 - 2a\frac{a^2}{x'}\cos\vartheta}}$$

oder

$$= \frac{a}{x'} f\left(\frac{a^2}{x'}\right).$$

Ist $F(x)$ das Potential der auf der zweiten Kugel befindlichen Elektricität in Beziehung auf einen Punkt, der innerhalb derselben, auf der Centrallinie, zwischen den beiden Mittelpunkten, in dem Abstande x von dem Mittelpunkte der zweiten Kugel liegt, so findet man ebenso das Potential der Elektricität der zweiten Kugel in Beziehung auf einen Punkt, der ausserhalb dieser, auf der Centrallinie, in dem Abstande x' von dem Mittelpunkte der zweiten, auf der Seite des Mittelpunktes der ersten Kugel liegt,

$$= \frac{b}{x'} F\left(\frac{b^2}{x'}\right).$$

Für alle Werthe von x zwischen $-a$ und $+a$ muss daher

$$f(x) + \frac{b}{c-x} F\left(\frac{c-x}{b^2}\right) = h$$

und für alle Werthe von x zwischen $-b$ und $+b$

$$F(x) + \frac{a}{c-x} f\left(\frac{a^2}{c-x}\right) = g$$

sein. Daraus folgt, dass, wenn x zwischen $-a$ und $+a$ liegt, $f(x)$ der Gleichung genügt:

$$f(x) - \frac{ab}{c^2-b^2-cx} f\left(\frac{a^2(c-x)}{c^2-b^2-cx}\right) = h - g\frac{b}{c-x}.$$

Macht man

$$f(x) = hf_1(x) - gf_2(x), \tag{1}$$

und setzt der Bequemlichkeit wegen

$$a = 1,$$

so hat man hiernach zur Bestimmung von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ die Gleichungen:

$$f_1(x) - \frac{b}{c^2-b^2-cx} f_1\left(\frac{c-x}{c^2-b^2-cx}\right) = 1 \tag{2}$$

und

$$f_2(x) - \frac{b}{c^2-b^2-cx} f_2\left(\frac{c-x}{c^2-b^2-cx}\right) = \frac{b}{c-x}. \tag{3}$$

Die Gleichung

$$\frac{c-x}{c^2-b^2-cx} = x$$

oder

$$x^2 - \left(c + \frac{1-b^2}{c}\right)x + 1 = 0 \tag{4}$$

hat zwei reelle positive Wurzeln, von denen die eine zwischen 0 und 1, die andere zwischen 1 und c liegt; die kleinere Wurzel sei ξ; die grössere also $\frac{1}{\xi}$; dann gilt die Gleichung (2) — um von dieser zuerst zu sprechen — auch für $x = \xi$, und giebt

$$f_1(\xi) = \frac{1}{1 - \frac{b}{c^2-b^2-c\xi}}.$$

Setzt man:

$$x_1 = \frac{c-x}{c^2-b^2-cx},$$

$$x_2 = \frac{c-x_1}{c^2-b^2-cx_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \frac{c-x_{n-1}}{c^2-b^2-cx_{n-1}},$$

so kann man durch wiederholte Anwendung der Gleichung 2 $f_1(x)$ durch $f_1(x_n)$ ausdrücken; es wird sich zeigen lassen, dass, wenn n grösser und grösser gemacht wird, x_n sich dem Werthe ξ und also $f_1(x_n)$ sich dem Werthe $f_1(\xi)$ nähert; daraus wird dann folgen, dass $f_1(x)$ direct durch wiederholte Anwendung der Gleichung (2) gefunden werden kann.

Um die ausgesprochene Behauptung zu beweisen, setze man

$$z = \frac{1 + Ax}{1 + Bx},$$

$$z_n = \frac{1 + Ax_n}{1 + Bx_n},$$

und verfüge über die Constanten A und B so, dass

$$z_n = q^4 z_{n-1}$$

wird, wo q eine dritte zu bestimmende Constante bedeutet. Schreibt man die Gleichung zwischen x_n und x_{n-1}

$$x_n = \frac{\alpha + \beta x_{n-1}}{\gamma + \delta x_{n-1}},$$

so muss dann für jeden Werth von x_{n-1}

$$\frac{\gamma + \delta x_{n-1} + A(\alpha + \beta x_{n-1})}{\gamma + \delta x_{n-1} + B(\alpha + \beta x_{n-1})} = q^4 \frac{1 + A x_{n-1}}{1 + B x_{n-1}}$$

oder

$$\frac{\gamma + A\alpha + (\delta + A\beta) x_{n-1}}{\gamma + B\alpha + (\delta + B\beta) x_{n-1}} = q^4 \frac{1 + A x_{n-1}}{1 + B x_{n-1}}$$

sein. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn A und B gleich den Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\alpha\lambda^2 + (\gamma - \beta)\lambda - \delta = 0$$

und

$$q^4 = \frac{\gamma + A\alpha}{\gamma + B\alpha}$$

gesetzt werden. Die quadratische Gleichung ist:

$$\lambda^2 + \left(c + \frac{1-b^2}{c}\right)\lambda + 1 = 0;$$

vergleicht man sie mit der Gleichung (4), so sieht man, dass ihre Wurzeln

$$-\xi \text{ und } -\frac{1}{\xi}$$

sind. Man kann daher setzen:

$$z = \frac{1 - \frac{x}{\xi}}{1 - \xi x}, \tag{5}$$

woraus sich, bei Rücksicht auf die Gleichung (4) ergiebt:

$$q^4 = \xi^2 \frac{c - \frac{1}{\xi}}{c - \xi}. \tag{6}$$

Erwägt man, dass $\xi < 1$ und $\frac{1}{\xi} < c$ ist, so folgt hieraus, dass q^4 positiv und < 1 ist, und dass daher z_n bei wachsendem n sich der Null nähert; weiter findet man aber:

$$\xi - x_n = \frac{\xi(1-\xi^2) z_n}{1 - \xi^2 z_n},$$

und hieraus ergiebt sich, dass x_n bei wachsenden n sich dem Werthe ξ nähert.

Die Variable z, die zunächst eingeführt wurde, um diese Behauptung zu beweisen, soll nun in die Gleichung (2) eingesetzt werden. Ich mache

$$f_1(x) = (1 - \xi^2 x)\varphi_1(z),$$

wo der Factor $1-\xi^2 z$ den Zweck hat, zu bewirken, dass in der zwischen $\varphi_1(z)$ und $\varphi_1(q^4 z)$ entstehenden Gleichung das Verhältniss der Coefficienten dieser beiden Grössen von z unabhängig wird. Berücksichtigt man, dass nach (6) und (4):

$$q^2 = \frac{b}{c^2-b^2-c\xi} = \frac{b\xi}{c-\xi},$$

so findet man aus (2) diese Gleichung:

$$\varphi_1(z) - q^2\varphi_1(q^4 z) = \frac{1}{1-\xi^2 z}. \tag{7}$$

Setzt man entsprechend

$$f_2(x) = (1-\xi^2 z)\,\varphi_2(z),$$

so ergiebt sich aus (3) auf ähnliche Weise:

$$\varphi_2(z) - q^2\varphi_2(q^4 z) = \frac{q^2}{\xi}\frac{1}{1-q^4 z}. \tag{8}$$

Die Gleichungen (7) und (8) geben durch wiederholte Anwendung unmittelbar für $\varphi_1(z)$ und $\varphi_2(z)$ die convergirenden Reihen:

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{1-\xi^2 z} + \frac{q^2}{1-q^4\xi^2 z} + \frac{q^4}{1-q^8\xi^2 z} + \cdots$$

$$\varphi_2(z) = \frac{1}{\xi}\left(\frac{q^2}{1-q^4 z} + \frac{q^4}{1-q^8 z} + \frac{q^6}{1-q^{12} z} + \cdots\right).$$

Entwickelt man hier die einzelnen Glieder nach Potenzen von z, so erhält man die Reihen:

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{1-q^2} + \frac{\xi^2 z}{1-q^6} + \frac{\xi^4 z^2}{1-q^{10}} + \cdots \tag{9}$$

$$\varphi_2(z) = \frac{1}{\xi}\left(\frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^6 z}{1-q^6} + \frac{q^{10} z^2}{1-q^{10}} + \cdots\right), \tag{10}$$

welche indessen nur convergiren, so lange z unterhalb gewisser Grenzen liegt.

Diese Gleichungen sind zur Berechnung von $f(x)$ für einen gegebenen Werth von x sehr bequem, falls q nicht nahe an 1 liegt, d. h. falls der Abstand der Kugeln nicht klein ist. Man reducirt dabei $\varphi_1(z)$ und $\varphi_2(z)$ mit Hülfe der Gleichungen (7) und (8) auf $\varphi_1(q^{4n} z)$ und $\varphi_2(q^{4n} z)$, wo n eine Zahl bedeutet, die um so grösser gewählt wird, je grösser die Genauigkeit ist, die man erreichen will, und je näher der Werth von q der Einheit liegt; man berechnet dann $\varphi_1(q^{4n} z)$ und $\varphi_2(q^{4n} z)$ durch die Reihen (9) und (10).

Von besonderem Interesse ist die Kenntniss von $f(0)$, da dieses die Elektricitätsmenge ausdrückt, welche auf der Kugel

sich befindet. Bei der Berechnung dieser hat man zu benutzen, dass für $x = 0$, wie aus (5) hervorgeht, $z = 1$ ist.

Eine Eigenschaft von $f_2(0)$ möge noch hervorgehoben werden; $f_1(0)$ und $f_2(0)$ sind Funktionen von zwei Variabeln, von b und c, oder von ξ und q; in dem Ausdrucke von $f_2(0)$ kommt aber nur eine transcendente Funktion einer Variabeln vor, da $\xi \varphi_2(1)$ nur von q abhängig ist. Dieses $f_2(0)$ hat eine einfache physikalische Bedeutung; es ist die Elektricitätsmenge, die auf der Kugel gebunden ist, wenn diese mit der Erde in leitender Verbindung steht, und das Potential in der zweiten Kugel $= -1$ ist, wie aus der Gleichung (1) hervorgeht.

2.

Die gefundenen Gleichungen sollen jetzt in eine andere Form gebracht werden, welche gewisse Vorzüge vor der angegebenen besitzt.

Man setze

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}},$$

wo K und K' die Bedeutung haben, in der Jacobi diese Zeichen in seiner Theorie der elliptischen Functionen gebraucht, und

$$F(u) = \frac{2\pi}{K} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{q^{2m} e^{-\frac{2u\pi}{K}}}{1 - q^{2m} e^{-\frac{2u\pi}{K}}}. \tag{11}$$

Diese für jeden Werth von u convergirende Reihe ergiebt:

$$\begin{cases} F(u - K') = F(u) + \dfrac{2\pi}{K} \dfrac{e^{-\frac{2u\pi}{K}}}{1 - e^{-\frac{2u\pi}{K}}}, \\ F(u - iK) = F(u), \end{cases} \tag{12}$$

wo $i = \sqrt{-1}$, und die folgende Reihe, die convergirt, wenn der reelle Theil von $u > -K'$ ist:

$$F(u) = \frac{2\pi}{K} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{q^{2m}}{1 - q^{2m}} e^{-\frac{2u\pi m}{K}}. \tag{13}$$

Die in dem vorigen Abschnitt gefundenen Funktionen $\varphi_1(z)$

und $\varphi_2(z)$ drücken sich folgendermassen durch diese Funktion $F(u)$ aus:

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{\xi\sqrt{z}} \frac{K}{4\pi}\left(F(u) - F\left(u + i\frac{K}{2}\right)\right),$$

wo

$$u = -\frac{K}{2\pi}\log\frac{\xi\sqrt{z}}{q^2},$$

und

$$\varphi_2(z) = \frac{1}{\xi\sqrt{z}} \frac{K}{4\pi}\left(F(u) - F\left(u + i\frac{K}{2}\right)\right),$$

wo

$$u = -\frac{K}{2\pi}\log\sqrt{z}.$$

Die Ausdrücke, welche sich hiernach für $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ergeben, lassen sich durch die eine Gleichung aussprechen:

$$(14) \qquad f(x) = \left(\frac{1}{\xi\sqrt{z}} - \xi\sqrt{z}\right)\frac{K}{4\pi}\left(F(u) - F\left(u + i\frac{K}{2}\right)\right),$$

welche gilt, wenn man den Zeichen f und u den Index 1 oder den Index 2 giebt, und

$$(15) \qquad u_1 = -\frac{K}{2\pi}\log\frac{\xi\sqrt{z}}{q^2}, \quad u_2 = -\frac{K}{2\pi}\log\sqrt{z}$$

setzt.

Macht man

$$-\log t = \frac{u\pi}{K},$$

bezeichnet die dem u_1 und u_2 entsprechenden Werthe von t durch t_1 und t_2, und setzt in demselben Sinne, in dem die Gleichung (14) gilt:

$$(16) \qquad \begin{cases} f(x) = \left(\frac{1}{\xi\sqrt{z}} - \xi\sqrt{z}\right) G(t), \\ \text{so findet man aus (12), (13), (14) und (15):} \\ G(t) = G(qt) + \frac{q^2t^2}{1-q^4t^4}, \\ G(t) = \sum_1^\infty \frac{q^{4m-2}}{1-q^{4m-2}}\, t^{4m-2}, \\ t_1 = \frac{\sqrt{\xi\sqrt{z}}}{q}, \quad t_2 = \sqrt[4]{z}, \\ z = \frac{1-\frac{x}{\xi}}{1-\xi x}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen stimmen mit den im vorigen Abschnitt entwickelten überein und können, wie jene, zur numerischen Berechnung von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ benutzt werden.

Ich will entsprechende Formeln zusammenstellen zur Berechnung der Dichtigkeit der Elektricität in dem Punkte der Kugel, der in der Centrallinie zwischen den beiden Mittelpunkten liegt. Man setze:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= f_1(x) + 2x\frac{df_1(x)}{dx} \\ y_2 &= f_2(x) + 2x\frac{df_2(x)}{dx} \end{aligned}\right\} \text{ für } x = 1,$$

dann ist die bezeichnete Dichtigkeit:

$$= \frac{1}{4\pi}(hy_1 - gy_2).$$

Bildet man mit Hülfe der Gleichung (14) die Ausdrücke von y_1 und y_2, und bemerkt, dass zufolge (15) die Differenz $u_1 - u_2$ von z unabhängig ist, so sieht man, dass auch diese zwei Ausdrücke sich durch eine Gleichung aussprechen lassen, nämlich durch die Gleichung:

$$(17) \qquad y = \frac{(1+\xi)^2}{(1-\xi)\sqrt{\xi}}\, i\frac{K^2}{8\pi^2}\left(F'(u) - F'\left(u + i\frac{K}{2}\right)\right),$$

in welcher $F'(u)$ den Differentialquotienten von $F(u)$ nach u bezeichnet, und welche gilt, wenn man den Zeichen y und u den Index 1 oder den Index 2 giebt, und

$$(18) \qquad \left\{\begin{aligned} u_1 &= -\frac{K}{2\pi}\log\frac{\sqrt{\xi}}{q^2} - i\frac{K}{4}, \\ u_2 &= \frac{K}{2\pi}\log\sqrt{\xi} - i\frac{K}{4} \end{aligned}\right.$$

setzt.[1])

Macht man

$$-\log t = \frac{u\pi}{K} + i\frac{\pi}{4}$$

und

---

[1]) Eine ähnliche Gleichung lässt sich aufstellen für die Dichtigkeit der Elektricität in dem Punkte, in welchem die Kugel zum zweiten Male von der Centrallinie geschnitten wird.

$$(19)\quad \begin{cases} y = \dfrac{(1+\xi)^2}{(1-\xi)\sqrt{\xi}}\, H(t), \\ \text{so folgt:} \\ H(t) = H(qt) + \dfrac{q^2t^2(1-q^4t^4)}{(1+q^4t^4)^2}, \\ H(t) = \sum_1^\infty (-1)^{m+1}(2m-1)\,\dfrac{q^{4m-2}}{1-q^{4m-2}}\,t^{4m-2}, \\ t_1 = \dfrac{\sqrt{\xi}}{q}, \quad t_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\xi}}, \end{cases}$$

wo in der Gleichung für y wieder den Zeichen y und t der Index 1 oder der Index 2 zu geben ist.

3.

Die durch die Gleichung (11) definirte Funktion F steht in einem Zusammenhange mit der von Jacobi durch Z bezeichneten elliptischen Funktion. Vergleicht man die Entwickelung dieser mit der in (11) angegebenen Reihe, so findet man:

$$(20)\qquad F(u) - F(-u-K') = 2iZ(2iu + iK');$$

durch Differentiation folgt hieraus, wenn man durch E das ganze elliptische Integral zweiter Gattung bezeichnet:

$$(21)\quad F'(u) + F'(-u-K') = 4\frac{E}{K'} - 4\Delta^2 \operatorname{am}(2iu + iK').$$

Mit Hülfe dieser beiden Gleichungen lassen sich für $f_1(1)+f_2(1)$ und $y_1 - y_2$ geschlossene Ausdrücke finden. Für $x=1$ ist nach (18):

$$u_1 = -u_2 - K' - i\frac{K}{2},$$

und daher nach (14) und (17):

$$f_1(1) + f_2(1) = -i\frac{1+\xi}{\sqrt{\xi}}\frac{K}{4\pi}\left\{F(u_2) - F\left(u_2 + i\frac{K}{2}\right) + F\left(-u_2 - K' - i\frac{K}{2}\right) - F(-u_2 - K')\right\},$$

$$y_1 - y_2 = -i\frac{(1+\xi)^2}{(1-\xi)\sqrt{\xi}}\frac{K^2}{8\pi^2}\left\{F'(u_2) - F'\left(u_2 + i\frac{K}{2}\right) - F'\left(-u_2 - K' - i\frac{K}{2}\right) + F'(-u_2 - K')\right\},$$

also nach (20) und (21):

$$f_1(1) + f_2(1) = \frac{1+\xi}{\sqrt{\xi}}\frac{K}{2\pi}\left\{Z(2iu_2 + iK') - Z(2iu_2 + iK' - K')\right\};$$

(22) $$y_1 - y_2 =$$
$$\tfrac{1}{2} i \frac{(1+\xi)^2}{(1-\xi)\sqrt{\xi}} \frac{K^2}{\pi^2} \{\Delta^2 \operatorname{am}(2iu_2 + iK') - \Delta^2 \operatorname{am}(2iu_2 + iK' - K)\};$$
dabei ist
$$u_2 = \frac{K}{2\pi} \log \sqrt{\xi} - i\frac{K}{4}.$$
Man kann hiernach für $f_1(1) + f_2(1)$ und für $y_1 - y_2$ Reihen finden, die um so schneller convergiren, je näher q der 1 kommt. Ich beschränke mich darauf, die Reihe für $y_1 - y_2$ hier anzugeben. Benutzt man, dass
$$\Delta^2 \operatorname{am}(iu + K, k) = 1 - \Delta^2 \operatorname{am}(u + K', k')$$
ist, und setzt
$$q_1 = e^{-\frac{\pi K}{K'}} \quad \text{d. h.} \quad \log q_1 = \frac{\pi^2}{\log q}$$
und
$$\alpha = \tfrac{1}{2}\pi \frac{\log \xi}{\log q},$$
so findet man:
$$y_1 - y_2 =$$
$$\frac{\pi^2}{(\log q)^2} \frac{(1+\xi)^2}{(1-\xi)\sqrt{\xi}} \left\{ \frac{\sqrt{q_1}}{1+q_1} \sin\alpha + 2 \frac{\sqrt{q_1^3}}{1+q_1^2} \sin 2\alpha + 3 \frac{\sqrt{q_1^3}}{1+q_1^2} \sin 3\alpha + \ldots \right\}.$$
Sind die Radien der beiden Kugeln gleich, d. h. ist $b = 1$, so ist nach (4)
$$\frac{\xi}{b} + \frac{1}{\xi} = c,$$
also nach (6)
$$\xi = q$$
und daher
$$\alpha = \tfrac{1}{2}\pi;$$
es wird dann also:

(23) $$y_1 - y_2 = \frac{\pi^2}{(\log q)^2} \frac{(1+q)^2}{(1-q)\sqrt{q}} \left\{ \frac{\sqrt{q_1}}{1+q_1} - 3 \frac{\sqrt{q_1^3}}{1+q_1^3} + \cdots \right\}.$$

Wendet man auf diesen Fall die Gleichung (22) unmittelbar an und bemerkt, dass in ihm
$$u_2 = -\frac{K' + iK}{4}$$
wird, so ergiebt sich:
$$y_1 - y_2 = \frac{(1+q)^2}{(1-q)\sqrt{q}} k k' \frac{K^2}{\pi^2}.$$

Nimmt man noch an, dass der Abstand der Kugeln ein unendlich kleiner ist, d. h. dass $1-q$ unendlich klein ist, so giebt die Gleichung (23) bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung:

$$y_1 - y_2 = -\frac{4\pi^2}{(\log q)^2} e^{\frac{\pi^2}{2\log q}},$$

oder, wenn man, um das von Poisson gebrauchte Zeichen δ einzuführen,

$$2\log q = \delta$$

setzt,

$$y_1 - y_2 = -32\pi^2 \frac{1}{\delta^2} e^{\frac{\pi^2}{\delta}}.$$

Wie in der Einleitung bereits bemerkt ist, ist diese Grösse von Poisson als von der Ordnung von δ^4 gefunden worden, Plana hat auf ein Versehen aufmerksam gemacht, welches Poisson bei der Herleitung dieses Resultats begangen hat, ist selbst aber zu dem eben so wenig richtigen Schlusse gelangt, dass jene Grösse von der Ordnung von δ^6 ist.

4.

Die in (16) und (19) für $G(t)$ und $H(t)$ angegebenen Reihen convergiren sehr langsam, wenn der Abstand der beiden Kugeln sehr klein ist und in Folge dessen ξ und q nahe $= 1$ sind. Für diesen Fall sollen für jene Funktionen jetzt neue Reihen abgeleitet werden. Um eine Entwickelung der Funktion $F(u)$, die zu diesen führen wird, zu finden, gehe ich von der Betrachtung des Doppelproduktes

$$\prod_1^m \prod_1^N \left(1 + \frac{u}{K\mu + \iota K\nu}\right)$$

aus, in dem μ und ν ganze Zahlen bedeuten, die alle Werthe von 1 bis m und von 1 bis N erhalten; dabei sollen m und N unendlich gross, doch N von einer unendlich höheren Ordnung als m sein. Ich suche das Verhältniss dieses Doppelproduktes zu demjenigen auf, das man aus ihm erhält, wenn man die oberen Grenzen m und N vertauscht gegen M und

n, wo M von derselben Ordnung wie N und n von derselben Ordnung wie m ist.

Der Logarithmus dieses Verhältnisses ist:

$$\sum_{1}^{m}\sum_{n+1}^{N}\log\left(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\right)-\sum_{1}^{n}\sum_{m+1}^{M}\log\left(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\right).$$

Da die unter dem Zeichen log stehende Grösse unendlich wenig von 1 verschieden ist, so hat man für $\log\left(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\right)$ die convergirende Reihe:

$$u\frac{1}{K'\mu+iK\nu}-\tfrac{1}{2}u^2\frac{1}{(K'\mu+iK\nu)^2}+\tfrac{1}{3}u^3\frac{1}{(K'\mu+iK\nu)^3}-\cdots.$$

Diese Reihe denke ich mir unter die Summenzeichen gesetzt und untersuche einzeln die Glieder, die die verschiedenen Potenzen von u enthalten. Ich gebrauche dabei einige Formeln aus der Theorie der Γ-Funktionen, die ich der Uebersichtlichkeit wegen vorausschicken will.

Ist a eine endliche Grösse, h eine unendlich grosse Zahl, so ist:[1])

$$\frac{a+1.a+2\ldots a+h}{1\ .\ 2\ \ldots\ h}=\frac{h^a}{\Gamma(1+a)},$$

und dieselbe Gleichung gilt, wenn a unendlich gross, aber h von unendlich höherer Ordnung als a ist. Es folgt hieraus:

$$(24)\qquad \sum_{1}^{h}\log(a+h)-\sum_{1}^{h}\log h-a\log h=-\log\Gamma(1+a).$$

Wendet man diese Gleichung nur auf Fälle an, in denen der reelle Theil von a nicht negativ ist, und wählt die Logarithmen auf der linken Seite so, dass ihre imaginären Theile zwischen $-i\frac{\pi}{2}$ und $+i\frac{\pi}{2}$ liegen, so ist nach Lipschitz[2]) dabei:

$$(25)\quad\begin{cases}\log\Gamma(1+a)=\frac{1}{2}\log 2\pi+a\log a-a+\frac{1}{2}\log a+\frac{B_1}{1.2}\frac{1}{a}-\frac{B_2}{3.4}\frac{1}{a^3}+\cdots\\ \qquad\qquad+(-1)^{\lambda-1}\frac{B_\lambda}{2\lambda-1.2\lambda}\frac{1}{a^{2\lambda-1}}+V_\lambda.\end{cases}$$

Hier sind die Logarithmen auf der rechten Seite wieder so zu wählen, dass ihre imaginären Theile zwischen $-i\frac{\pi}{2}$ und

---

[1]) Gauss: Circa seriem infinitam etc., Commentationes soc. reg. sc. Gottingensis rec. vol. II. 1811—13.

[2]) Crelle's Journal, Bd. 56.

$+ i\frac{\pi}{2}$ liegen, λ bedeutet eine beliebige Zahl, B_1, B_2 $\cdots$ sind die Bernoulli'schen Zahlen, d. h. es ist:

$$\tfrac{1}{2}x\cot g\tfrac{1}{2}x = 1 - B_1\frac{x^2}{1.2} - B_2\frac{x^4}{1.2.3.4} - B_3\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} - \cdots,$$

oder

$$B_1 = \tfrac{1}{6},\quad B_2 = \tfrac{1}{30},\quad B_3 = \tfrac{1}{42},\quad \cdots;$$

weiter ist:

$$V_\lambda = \frac{2}{(2\pi)^{2\lambda+2}}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{s^{2\lambda}}\int_0^\infty \frac{y^{2\lambda}e^{-ay}dy}{s^2 + \frac{y^2}{4\pi^2}} \tag{26}$$

oder

$$V_\lambda = \frac{B_{\lambda+1}}{2\lambda+1.2\lambda+2}\frac{1}{\alpha^{2\lambda+1}}(\varepsilon + i\varepsilon'), \tag{27}$$

wo α den reellen Theil von a bedeutet und ε und ε' zwischen -1 und $+1$ liegen.

Die Gleichung (25) wird zunächst auf Fälle angewendet werden, in denen der reelle oder der imaginäre Theil von a unendlich gross ist. Ist der reelle Theil von a unendlich gross, so zeigt der in (27) angegebene Werth von V_λ, dass die Gleichung (25), wenn man in ihr V_λ vernachlässigt, den Werth von $\log\Gamma(1+a)$ genau darstellt bis auf eine Grösse von der Ordnung von $\alpha^{-(2\lambda+1)}$; ist der imaginäre Theil von a unendlich gross, so geben die nicht verschwindenden Glieder der in (25) aufgestellten Reihe bei Vernachlässigung von V_λ den Werth von $\log\Gamma(1+a)$ bis auf eine unendlich kleine Grösse genau an. Von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugt man sich mit Hülfe der Gleichung (26), indem man erwägt, dass die Integrale

$$\int\psi(y)\sin(\beta y)\,dy \quad \text{und} \quad \int\psi(y)\cos(\beta y)\,dy,$$

genommen zwischen irgend zwei von β unabhängigen Grenzen, zwischen denen $\psi(y)$ nicht unendlich wird, sich der Null nähern, wenn β mehr und mehr wächst. Um den Beweis auch auf den Fall auszudehnen, dass der reelle Theil von a verschwindet, hat man dabei noch von der Gleichung:

$$\log\Gamma(1+a) = \log\Gamma(2+a) - \log(1+a)$$

Gebrauch zu machen.

Für die Differentialquotienten von V_λ nach a gelten ähnliche Ausdrücke, wie sie für V_λ in (26) und (27) angegeben sind; daraus folgt, dass die Reihen, die durch Differentiation aus der in (25) vorkommenden Reihe entstehen, die Eigenschaften haben, die analog der für diese ausgesprochenen sind.

Sind a und h endlich oder unendlich gross von beliebigen Ordnungen, so hat man:

$$\frac{a+1 \,.\, a+2 \ldots a+h}{1 \;.\; 2 \;\ldots\; h} = \frac{\Gamma(1+h+a)}{\Gamma(1+h)\,\Gamma(1+a)}$$

und

$$\sum_1^h \log(a+h) - \sum_1^h \log h = \log \Gamma(1+h+a) - \log \Gamma(1+h) - \log \Gamma(1+a), \tag{28}$$

bei welcher Gleichung die Gleichung (25) unter denselben Bedingungen gilt, wie bei der Gleichung (24).

Dieses vorausgeschickt, hat man:

$$\sum_{n+1}^{N} \frac{1}{K'\mu + iK\nu} = -\frac{i}{K} \sum_1^{N-n} \frac{1}{\nu + n - i\frac{K'}{K}\mu},$$

oder nach (24), wenn man mit Gauss

$$\frac{d \log \Gamma(1+a)}{da} = \psi(a)$$

setzt:

$$\sum_{n+1}^{N} \frac{1}{K'\mu + iK\nu} = -\frac{i}{K} \log(N-n) + \frac{i}{K} \psi\left(n - i\frac{K'}{K}\mu\right).$$

Benutzt man (25) und vernachlässigt Glieder, die unendlich klein gegen $\frac{1}{n}$ sind, was erlaubt ist, da diese zu der zu bildenden Doppelsumme nur unendlich wenig beitragen können, so findet man dieselbe Grösse

$$= -\frac{i}{K} \log N + \frac{i}{K} \log\left(n - i\frac{K'}{K}\mu\right) + \frac{i}{2K} \frac{1}{n - i\frac{K'}{K}\mu}.$$

Erwägt man, dass

$$\log\left(n - i\frac{K'}{K}\mu\right) = \log\left(-i\frac{K'}{K}\right) + \log\left(\mu + i\frac{K}{K'}n\right)$$

und

$$\frac{1}{n - i\frac{K'}{K}\mu} = i\frac{K}{K'} \frac{1}{\mu + i\frac{K}{K'}n}$$

ist, so findet man hieraus mit Hülfe von (28) und (25):

$$\sum_{1}^{m}\sum_{n+1}^{N}\frac{1}{K'\mu+iK'\nu}$$

$$=\frac{i}{K'}\left\{-m\log N-(m+\tfrac{1}{2})\log m+m\log\left(-i\frac{K'}{K}\right)+\sum_{1}^{m}\log\mu-\tfrac{1}{2}\log 2\pi\right\}$$

$$+\frac{i}{2K'K}\left\{\left((2m+1)K'+(2n+1)iK\right)\log\frac{mK'+miK}{K'}\right.$$

$$\left.-\left(K'+(2n+1)iK\right)\log\frac{miK'}{K'}\right\},$$

wo alle vorkommenden Logarithmen so zu wählen sind, dass ihre imaginären Theile zwischen $-i\frac{\pi}{2}$ und $+i\frac{\pi}{2}$ liegen. Vertauscht man in dieser Gleichung K mit K', μ mit ν, m mit n, N gegen M, i gegen $-i$ und dividirt sie durch i, so erhält man:

$$\sum_{1}^{n}\sum_{m+1}^{M}\frac{1}{K'\mu+iK'\nu}$$

$$=\frac{1}{K'}\left\{n\log M+(n+\tfrac{1}{2})\log n-n\log\left(i\frac{K}{K'}\right)-\sum_{1}^{n}\log\nu+\tfrac{1}{2}\log 2\pi\right\}$$

$$+\frac{i}{2K'K}\left\{\left((2m+1)K'+(2n+1)iK\right)\log\frac{nK-miK'}{K}\right.$$

$$\left.-\left((2m+1)K'+iK\right)\log\left(-\frac{miK'}{K}\right)\right\}.$$

Es ergiebt sich hieraus:

$$\sum_{1}^{m}\sum_{n+1}^{N}\frac{1}{K'\mu+iK'\nu}-\sum_{1}^{n}\sum_{1+m}^{M}\frac{1}{K'\mu+iK'\nu}$$

$$=-\frac{i}{K'}m\log N+\frac{i}{K'}\sum_{1}^{m}\log\mu-\frac{i}{K'}(m+\tfrac{1}{2})\log i\frac{K}{K'}-\frac{1}{2K'}\log m\,2\pi$$

$$+\frac{1}{K'}n\log M+\frac{1}{K'}\sum_{1}^{m}\log\nu+\frac{1}{K'}(n+\tfrac{1}{2})\log i\frac{K}{K'}-\frac{i}{2K'}\log n\,2\pi.$$

Auf ähnlichem Wege findet man, dass

$$\sum_{1}^{m}\sum_{n+1}^{N}\frac{1}{(K'\mu+iK'\nu)^2}-\sum_{1}^{n}\sum_{m+1}^{M}\frac{1}{(K'\mu+iK'\nu)^2}=\frac{i}{KK'}\log\frac{miK'}{nK'}$$

ist, und dass die Ausdrücke:

$$\sum_{1}^{m}\sum_{n+1}^{N}\frac{1}{(K'\mu+iK'\nu)^3}\quad,\quad\sum_{1}^{n}\sum_{m+1}^{M}\frac{1}{(K'\mu+iK'\nu)^3},$$

so wie diejenigen, die aus diesen entstehen, wenn man für den Exponenten 3 einen höheren setzt, verschwinden.

Hieraus folgt:

$$\frac{iu}{K}\left\{m\log N-\sum_1^m\log\mu+(m+\tfrac12)\log\frac{iK}{K'}-\frac{iK}{2K'}\log m\,2\pi\right\}$$
$$-\frac{iu^2}{2KK'}\log m\,K'+\log\prod_1^m\prod_1^N\left(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\right)$$
$$=\frac{u}{K'}\left\{-n\log M+\sum_1^n\log\nu+(n+\tfrac12)\log\frac{iK}{K'}-\frac{iK'}{2K}\log n\,2\pi\right\}$$
$$-\frac{iu^2}{2KK'}\log n\,iK+\log\prod_1^n\prod_1^M\left(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\right).$$

Addirt man zu dieser Gleichung diejenige, die aus ihr entsteht, wenn man $-i$ für i setzt, dabei aber u ungeändert lässt, so erhält man:

$$(29)\quad\begin{cases} u\left(\frac{1}{K'}\log m\,2\pi-\frac{\pi}{K}(m+\frac12)\right)-\frac{u^2\pi}{2KK'} \\ +\log\prod_1^m\prod_1^N\left(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\right)\left(1+\frac{u}{K'\mu-iK\nu}\right) \\ =\frac{2u}{K'}\left(-n\log M+\sum_1^n\log\nu+(n+\frac12)\log\frac{K}{K'}\right) \\ +\log\prod_1^n\prod_1^M\left(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\right)\left(1+\frac{u}{K'\mu-iK\nu}\right). \end{cases}$$

Nun ist aber

$$\prod_1^N 1+\left(\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\right)=\prod_1^N\frac{\nu-\frac{u+K'\mu}{K}i}{\nu-\frac{K'\mu}{K}i}$$

oder nach (24)

$$=Ne^{-\frac{iu}{K}}\frac{\Gamma\left(1-\frac{K'\mu}{K}i\right)}{\Gamma\left(1-\frac{u+K'\mu}{K}i\right)}.$$

Da weiter

$$(30)\qquad \Gamma(1-a)\,\Gamma(1+a)=\frac{a\pi}{\sin a\pi},$$

und

$$\sin ix=\frac{i}{2}e^x(1-e^{-2x})$$

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}},$$

so folgt hieraus bei abermaliger Rücksicht auf (24):

$$\prod_1^m \prod_1^M \left(1 + \frac{u}{K'\mu + iK\nu}\right)\left(1 + \frac{u}{K'\mu - iK\nu}\right)$$
$$= e^{-\frac{u}{K}\log u + \frac{u}{K}m\pi} \Gamma\left(1 + \frac{u}{K'}\right) \prod_1^m \frac{1-q^{2\mu}e^{-\frac{2iu\pi}{K}}}{1-q^{2\mu}}.$$

Ferner erhält man aus (24)

$$\prod_1^n \prod_1^M \left(1 + \frac{u}{K'\mu + iK\nu}\right)\left(1 + \frac{u}{K'\mu - iK\nu}\right)$$
$$= e^{\frac{2u}{K'}n\log M} \prod_1^n \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\nu iK}{K'}\right)\Gamma\left(1 - \frac{\nu iK}{K'}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{u+\nu iK}{K'}\right)\Gamma\left(1 + \frac{u-\nu iK}{K'}\right)}.$$

Setzt man diese Werthe der beiden Doppelprodukte in die Gleichung (29), differenzirt dieselbe nach u und berücksichtigt die Gleichung (11), so findet man:

$$(31)\quad F(u) = \frac{2}{K'}\left(\sum_1^n \log\nu + n\log\frac{K}{K'}\right) + \frac{1}{K}\log\frac{K}{2\pi K'} + \frac{n}{2K} + \frac{nu}{KK'}$$
$$- \frac{d}{du}\log\Gamma\left(1 + \frac{u}{K'}\right)\prod_1^n \Gamma\left(1 + \frac{u+\nu iK}{K'}\right)\Gamma\left(1 + \frac{u-\nu iK}{K'}\right).$$

Diese Gleichung kann benutzt werden, um mit Hülfe von (25) $F(u)$ auf eine neue Weise zu entwickeln; und zwar kann man so zwei Entwickelungen für $F(u)$ finden, eine, indem man $\log\Gamma\left(1 + \frac{u}{K'}\right)$ in der Rechnung beibehält, und eine zweite, indem man auch diese Grösse entwickelt.

Die Gleichung (25) setzt voraus, dass der reelle Theil von a nicht negativ ist; demgemäss soll jetzt angenommen werden, dass der reelle Theil von u nicht negativ ist.

Vernachlässigt man vorerst in (25) den Rest V, bezeichnet mit U eine Funktion der Veränderlichen ζ und mit $\mathfrak{U}$ die Reihe:

$$(32)\quad U - \tfrac{1}{2}\log q\frac{dU}{d\zeta} + \frac{B_1}{1.2}(\log q)^2\frac{d^2U}{d\zeta^2} - \frac{B_2}{1.2.3.4}(\log q)^4\frac{d^4U}{d\zeta^4}$$
$$+ \frac{B_3}{1.2.3.4.5.6}(\log q)^6\frac{d^6U}{d\zeta^6} - \ldots,$$

so findet man bei Rücksicht auf die Gleichung (24) und die Gleichungen, die durch wiederholte Differentiation aus dieser entstehen:

$$(33)\quad \begin{cases} K' F(u) = -\log(-2\log q) - \frac{1}{2}\log q + \zeta - \psi\left(\frac{u}{K'}\right) + \Omega, \\ \text{wo} \\ \qquad U = \log\Gamma\left(1+\frac{i\zeta}{\pi}\right)\Gamma\left(1-\frac{i\zeta}{\pi}\right), \\ \qquad \zeta = \frac{u\pi}{K}. \end{cases}$$

Hierbei ist noch zu bestimmen, welcher Werth des für U angegebenen Logarithmus zu nehmen ist. Es soll angenommen werden, dass der imaginäre Theil von u zwischen $-iK$ und $+iK$ liegt. Unter dieser Bedingung wird bei der Herleitung der Gleichungen (33) die Gleichung (24) nur auf Fälle angewendet, in welchen der reelle Theil von $a > -1$ ist; in solchen Fällen gilt für das dort vorkommende $\log\Gamma(1+a)$ die Gleichung, welche entsteht, wenn man durch die Gleichung (25) und die Gleichung

$$\log\Gamma(a) = \log\Gamma(1+a) - \log a$$

$\log\Gamma(a)$ ausdrückt und dann $1+a$ für a setzt. Daraus folgt, dass jenes $\log\Gamma(1+a)$ sich stetig mit a ändert und reell ist, wenn a reell ist, und weiter, dass in (33) derjenige Werth des für U angegebenen Logarithmus zu nehmen ist, der sich mit ζ stetig ändert und reell ist, wenn der reelle Theil von ζ verschwindet. Es lässt sich hiernach und zufolge der Gleichung (30) der Werth von U auch schreiben:

$$U = \log\frac{i\zeta}{\sin i\zeta}$$

oder

$$= \log\frac{2\zeta}{e^{\zeta}-e^{-\zeta}},$$

wo derjenige Werth des Logarithmus zu nehmen ist, dessen imaginärer Theil zwischen $-i\pi$ und $+i\pi$ liegt.

Entwickelt man in (31) auch $\Gamma\left(1+\frac{u}{K'}\right)$ nach (25), so findet man:

$$(34)\quad \begin{cases} K' F(u) = \Omega, \\ \text{wo } \Omega \text{ wieder die Reihe (32.) bedeutet und} \\ U = -\log(1 - e^{-2\zeta}), \\ \zeta = \frac{u\pi}{K} \end{cases}$$

ist: auch hier hat man bei der Bildung von U denjenigen Werth des Logarithmus zu nehmen, dessen imaginärer Theil zwischen $-i\pi$ und $+i\pi$ liegt.

Berücksichtigt man bei der Bildung der in (33) und (34) für $F(u)$ angegebenen Reihen den Rest V_λ der Reihe (25), so erhält man mit Hülfe der Gleichung (26) Ausdrücke für die Reste jener. Benutzt man die Gleichung:

$$\int_0^\infty f(y)\{\cos 2y + \cos 4y + \ldots + \cos 2ny\}\,dy$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int_0^\infty f(y)\,dy + \tfrac{1}{2}\pi\{\tfrac{1}{2}f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + f(3\pi) + \ldots\},$$

in welcher n eine unendlich grosse Zahl bedeutet, so stellen sich diese Ausdrücke in einer Form dar, die ähnlich derjenigen ist, in welcher V_λ in (27) angegeben ist, in einer Form, welche zeigt, dass ihre Werthe beliebig klein gemacht werden können dadurch, dass man den reellen Theil von u mit Hülfe der Gleichung (12) mehr und mehr vergrössert. Nimmt man mit jenen Restausdrücken nicht die angedeutete Transformation vor und stellt in Beziehung auf sie eine Betrachtung an, wie sie in Beziehung auf den Ausdruck von V_λ in (26) oben angegeben ist, so sieht man, dass die Reihen für $F(u)$ in (33) und (34) noch eine andere Bedeutung haben. Ist nämlich K unendlich gross, so geben diejenigen Glieder der Reihe (33), welche nicht verschwinden, den Werth von $F(u)$ bis auf eine unendlich kleine Grösse genau an; ist überdies der imaginäre Theil von u von der Ordnung von iK, so gilt dasselbe von der Reihe (34). Es ist hiernach, wenn K unendlich gross ist:

$$(35)\quad K' F(u) = -\log(-2\log q) - \psi\left(\frac{u}{K'}\right) + \log\frac{2\zeta}{1-e^{-2\zeta}}$$

nnd, wenn überdies der imaginäre Theil von u von der Ordnung von iK ist:

(36) $$K' F(u) = -\log(1-e^{-2\zeta}),$$

wo

$$\zeta = \frac{u\pi}{K}.$$

Mit Hülfe von (33) und (34) ist es leicht Gleichungen zu bilden, welche statt der Gleichungen (16) und (19) zur Berechnung von $f(x)$ und y dienen können.

Setzt man

$$f(x) = \left(\frac{1}{\xi\sqrt{z}} - \xi\sqrt{z}\right)\frac{1}{4\log q}\left\{\log(-\log q) + \psi\left(\frac{\log t}{\log q}\right) - J(t)\right\},$$

so findet man

$$J(t) = J(qt) - \log q\left(\frac{4q^2t^2}{1-q^4t^4} + \frac{1}{\log qt}\right)$$

und $J(t) = \Omega$, wo $U = \log\frac{\zeta(1+e^{-2\zeta})}{1-e^{-2\zeta}}$. Für die in (19) vorkommende Grösse $H(t)$ erhält man:

$$H(t) = -\frac{1}{2\log q}\Omega, \text{ wo } U = \frac{e^{-2\zeta}}{1+e^{-4\zeta}}.$$

Hier, wie dort, bedeutet Ω die Reihe (32) und ist

$$\zeta = -\log t;$$

die Werthe von t sind die in (16) und (19) angegebenen.

Für das in der Reihe für $H(t)$ vorkommende U hat man:

$$U = t^2\frac{1}{1+t^4},$$

$$\frac{dU}{d\zeta} = -2t^2\frac{1-t^4}{(1+t^4)^2},$$

$$\frac{d^2U}{d\zeta^2} = 3t^2\frac{1-6t^4+t^8}{(1+t^4)^3}$$

und allgemein:

$$\frac{d^nU}{d\zeta^n} = (-2)^n t^2\frac{1+A_nt^4+B_nt^8+C_nt^{12}+\ldots}{(1+t^4)^{n+1}},$$

wo

$$A_n = (n+1)-3^n,$$

$$B_n = \frac{(n+1)n}{1\cdot 2} - (n+1)3^n + 5^n,$$

$$C_n = \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{(n+1)n}{1\cdot 2}3^n + (n+1)5^n - 7^n,$$

. . . . . .

Es soll schliesslich noch der Fall betrachtet werden, dass die beiden Kugeln einander berühren und das Gesammtpotential in ihnen einen gleichen Werth hat.

Setzt man den Abstand der beiden Kugeln als unendlich klein voraus und bezeichnet ihn durch ε, d. h. macht man

$$c = 1 + b + \varepsilon,$$

so findet man aus (4) und (6)

$$\xi = 1 - \sqrt{\frac{2b}{1+b}\varepsilon},$$

$$q = 1 - \sqrt{\frac{1+b}{2b}\varepsilon}$$

und aus (5) und (15) unter der Annahme, dass $1-x$ unendlich gross gegen $\sqrt{\varepsilon}$ ist:

$$z = 1 - \frac{2x}{1-x}\sqrt{\frac{2b}{1+b}\varepsilon},$$

$$\frac{u_1}{K'} = \frac{b}{1+b}\frac{1}{1-x} - 1,$$

$$\frac{u_2}{K'} = \frac{b}{1+b}\frac{x}{1-x}.$$

Nach (1) hat man:

$$f(x) = h\left(f_1(x) - f_2(x)\right)$$

und daher nach (14), (35) und (36):

$$(37) \qquad f(x) = h\frac{b}{1+b}\frac{1}{1-x}\left\{\psi\left(\frac{b}{1+b}\frac{x}{1-x}\right) - \psi\left(\frac{b}{1+b}\frac{1}{1-x} - 1\right)\right\}.$$

Diese Gleichung gilt auch für diejenigen Werthe von x, für welche u_1 negativ ist, obwohl bei der Ableitung von (35) und (36) vorausgesetzt wurde, dass der reelle Theil von u positiv sei. Von der Richtigkeit dieser Behauptung überzeugt man sich leicht mit Hülfe der Gleichung (12) und der Gleichung

$$\psi(a-1) = \psi(a) - \frac{1}{a}.$$

Die Gleichung (37) stimmt mit der Gleichung (115) in Planas Abhandlung überein.

Zur Theorie des Condensators.[1])

Ein Condensator, der zu Messungen dienen soll, besteht in seiner gewöhnlichsten und einfachsten Gestalt aus zwei gleichen, kreisförmigen Metallplatten, die nahe bei einander und so aufgestellt sind, dass sie eine gemeinschaftliche Axe haben. Die Aufgabe der Theorie des Condensators ist es, die Elektricitätsmengen anzugeben, die die beiden Platten enthalten, wenn das Potential in ihnen zwei gegebene, verschiedene Werthe besitzt. Näherungsweise lassen diese Elektricitätsmengen sich sehr leicht finden; näherungsweise ist nämlich nur auf den einander zugekehrten Flächen der Condensatorplatten Elektricität vorhanden und diese ist gleichmässig auf jeder von diesen Flächen verbreitet mit einer Dichtigkeit, die auf der einen positiv, auf der andern negativ ist, und deren absoluter Werth gleich ist dem Unterschiede der beiden Potentialwerthe, dividirt durch den Abstand der beiden Flächen und durch 4π. Nur ganz nahe an den Rändern hat die Dichtigkeit Werthe, die von dem angegebenen erheblich abweichen. Eine genauere Lösung des genannten Problems hat zuerst Hr. Clausius[2]) gegeben; jedoch nur unter der Voraussetzung, dass die Dicke der Platten verschwindend klein auch gegen ihren Abstand ist, einer Voraussetzung, die bei den meisten Versuchen nicht zutrifft. Die Rechnungen, durch welche Hr. Clausius zu seinem Resultate gelangt, sind sehr beschwerlich; Hr. Helmholtz hat bei einer Mittheilung, die er der Akademie am 23. April 1868 über discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen gemacht hat, eine Methode kennen gelehrt, die sehr viel leichter zu demselben Resultate führt, und die auf der Theorie der Funktionen eines complexen Arguments oder, was dasselbe ist, auf der Theorie der conformen Abbildung eines ebenen Flächenstücks auf einem andern beruht. Diese Methode des Hrn. Helmholtz erlaubt auch die Dicke der Condensatorplatten zu berücksichtigen,

[1]) Monatsbericht der Akad. d. Wiss. zu Berlin v. 15. März 1877.
[2]) Pogg. Ann. Bd. 86.

wenn man die Methode zu Hülfe zieht, die Hr. Schwartz[1]) angegeben hat, um irgend ein durch gerade Linien begrenztes, ebenes Flächenstück auf einem andern, durch gerade Linien begrenzten, ebenen Flächenstücke conform abzubilden. Dieselben Mittel reichen auch aus, um die Theorie des von Sir William Thomson construirten Condensators zu entwickeln, bei dem ein sogenannter Schutzring benutzt ist, und der vor dem einfacheren dadurch namentlich sich auszeichnet, dass bei ihm der Einfluss nicht zu fürchten ist, den äussere elektrische Kräfte auf die Theile des Condensators etwa ausüben.

Es sei φ das Potential von elektrischen Massen, die symmetrisch in Bezug auf eine Axe vertheilt sind, in Bezug auf einen Punkt, der um ϱ von dieser Axe absteht, und dessen Ordinate parallel derselben y ist; dann ist φ eine Funktion von y und ϱ, die der Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = 0$$

oder, was dasselbe ist, der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\right)$$

genügt. Hiernach giebt es eine Funktion von y und ϱ, die ψ genannt werden möge, für welche

$$(1) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\varrho} = \varrho\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\varrho\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}$$

ist, woraus folgt

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} = 0.$$

Aus den Gleichungen (1) folgt auch

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} = 0,$$

und hierdurch ist ausgedrückt, dass $\psi = \text{const.}$ die Gleichung der Kraftlinien ist, der Linien, die die Flächen gleichen Potentials senkrecht schneiden.

Nun sei die Elektricität, deren Potential φ bezeichnet, auf leitenden Rotationskörpern, deren Rotationsaxe die y-Axe ist, verbreitet. Es sei ferner dl ein Element einer Meridian-

[1]) Borchardt's Journal. Bd. 70.

curve einer der Leiteroberflächen, n die entsprechende, nach Aussen gerichtete Normale derselben; dann ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = 0, \text{ also } \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0,$$

mithin

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cos(ny), \quad \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} = \frac{\partial \psi}{\partial l} \cos(l\varrho),$$

wo l eine beliebige von den beiden Richtungen des Elementes dl bedeutet. Die erste der Gleichungen (1) ergiebt daher

$$\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cos(ny) = \frac{\partial \psi}{\partial l} \cos(l\varrho).$$

Nun ist $\cos(ny) = \pm \cos(l\varrho)$; man wähle die Richtung l so, dass $(l\varrho)$ spitz oder stumpf ist, je nachdem (ny) spitz oder stumpf ist; dann gilt das obere Vorzeichen und man hat

$$\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial l}.$$

Bezeichnet h die Dichtigkeit der Elektricität in einem Punkte der Leiteroberfläche, so ist aber

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = -4\pi h;$$

es ist also auch

$$\frac{\partial \psi}{\partial l} = -4\pi h \varrho.$$

Diese Gleichung multiplicire man mit dl und integrire nach l von dem kleineren Werthe l' bis zu dem grösseren l''; dann erhält man

$$2e = \psi' - \psi'', \tag{2}$$

wo e die Elektricitätsmenge bedeutet, welche auf der Ringfläche sich befindet, die durch die Kreise $l = l'$ und $l = l''$ begrenzt ist, und ψ' und ψ'' die Werthe von ψ sind, die diesen Werthen von l entsprechen. Hiernach reicht es zur Bestimmung der Vertheilung der Elektricität auf den Leiteroberflächen aus, die Funktion ψ für alle Punkte dieser zu ermitteln.

Jetzt werde angenommen, dass die Leiter die beiden Platten eines Condensators sind; für die Grundflächen der einen sei $y = a$ und $y = a + b$, für die der andern $y = -a$ und $y = -(a + b)$, so dass b ihre Dicke, $2a$ ihr Abstand ist; für ihre Randflächen sei $\varrho = R$. R soll als endlich, a und b

sollen als unendlich klein angenommen und die Werthe von ψ bis auf unendlich kleine Grössen bestimmt werden. Es ist ausreichend den Fall zu betrachten, dass die Potentialwerthe in den beiden Platten $+1$ und -1 sind, und den Fall, dass beide $+1$ sind; ist für diese beiden Fälle ψ bestimmt, so findet man dasselbe auf bekannte Weise für den Fall, dass die beiden Potentialwerthe irgend welche sind.

Es sei also zunächst $\varphi = 1$ in der Platte, in der y positive Werthe hat, $\varphi = -1$ in der anderen. Für alle Punkte des Raumes, die in Entfernungen von den Rändern der Platte liegen, die gegen a unendlich gross sind, lassen sich dann die Werthe von φ und ψ in der folgenden Weise angeben. Man bezeichne durch ds ein Element der Kreisfläche, für deren Grenze $y = 0$, $\varrho = R$ ist, durch r den Abstand dieses Elementes von dem Punkte, auf den man φ und ψ bezieht, und setze

$$U = \int \frac{ds}{r}.$$

Für diejenigen Punkte der bezeichneten Art, die nicht zwischen den Platten liegen, ist dann

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \psi = \frac{1}{2\pi}\varrho\frac{\partial U}{\partial \varrho} + \text{const.}$$

Dieses φ hat eine einfache geometrische Bedeutung: es ist gleich der scheinbaren Grösse der Fläche, deren Element ds genannt worden ist, von dem Punkte aus gesehn, auf den sich φ bezieht, dividirt durch 2π, mit dem positiven oder negativen Zeichen, je nachdem dieser Punkt ein positives oder negatives y hat. Ist die kürzeste Entfernung dieses Punktes von den Rändern der Platten unendlich klein gegen R, so ist hiernach, wenn man

$$R - \varrho = x \tag{3}$$

setzt,

$$\varphi = -\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \tag{4}$$

wobei die Vieldeutigkeit des arctg durch die Bedingung gehoben wird, das φ verschwindet, wenn $y = 0$ und x negativ ist. Um ψ für die Punkte der Oberflächen der Platten be-

rechnen zu können, braucht man nur den Werth von U für $y = 0$ zu kennen. Dieser Werth ist

$$U = -4RE,$$

wo

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}\, du, \quad k = \frac{\varrho}{R}.$$

Setzt man noch

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}},$$

so ist

$$\frac{dE}{dk} = \frac{E - K}{k},$$

und daher

$$\psi = \frac{2}{\pi} R(E - K) + \text{const.} \tag{5}$$

Ist das durch (3) bestimmte x unendlich klein gegen R, so folgt hieraus

$$\psi = \frac{R}{\pi}\left(2 - \lg \frac{8R}{x}\right) + \text{const.} \tag{6}$$

Für Punkte, deren Abstände von den Rändern der Platten unendlich gross gegen a sind, und die zwischen den Platten liegen, ist

$$\varphi = \frac{y}{a} \tag{7}$$

und

$$\psi = \frac{\varrho^2}{2a} - \text{const.} \tag{8}$$

Ist x so klein, dass $\frac{x^2}{a}$ verschwindet, so ist hiernach

$$\psi = \frac{R^2}{2a} - \frac{Rx}{a} - \text{const.} \tag{9}$$

Nun handelt es sich darum φ und ψ für den Raum zu finden, für den x und y von der Ordnung von a sind. Die Gleichungen (1) werden für diesen

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -R \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = R \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

und zeigen also, dass, wenn man

$$w = \varphi + i \frac{\psi}{R}, \quad z = x + iy \tag{10}$$

setzt, w eine Funktion von z ist. Durch diese Bedingung ist φ vollständig, ψ bis auf eine additive Constante bestimmt, wenn man hinzunimmt, dass an der Oberfläche der einen Platte $\varphi = 1$, an der der andern $\varphi = -1$ wird, dass ausserhalb der Platten, da wo x und y unendlich gross gegen a sind, die Gleichung (4), und zwischen den Platten da, wo x unendlich gross gegen a ist, die Gleichung (7) erfüllt werden muss. Ist w als Funktion von z bestimmt, so wird durch die Beziehung zwischen z und w, wenn man φ und $\frac{\psi}{R}$ als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes ansieht, das zu betrachtende Gebiet von z auf einem unendlichen Streifen in der w-Ebene conform abgebildet; es muss die Beziehung zwischen w und z, die diese Abbildung vermittelt, aufgesucht werden, und das ist möglich vermöge der Eingangs erwähnten Methode des Hrn. Schwartz.

Es werde eine dritte complexe Variable, die t genannt werden möge, eingeführt, und man setze

$$\frac{dz}{dt} = C(a_1 - t)^{-\alpha_1} \cdot (a_2 - t)^{-\alpha_2} \ldots (a_n - t)^{-\alpha_n}, \tag{11}$$

wo C eine im Allgemeinen complexe Constante, $a_1, a_2, \ldots, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ reelle Constanten und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ rational sein sollen. Durch diese Beziehung zwischen z und t wird ein Gebiet der t-Ebene, das hinreichend beschränkt ist, auf einem gewissen Gebiet der z-Ebene conform abgebildet, wenn die nöthigen Bestimmungen getroffen sind, um die Vieldeutigkeit von $\frac{dz}{dt}$ zu heben. Das Gebiet von t sei begrenzt durch die Axe, auf der t reell ist, und einen um den Punkt $t = 0$ mit einem unendlich grossen Radius beschriebenen Halbkreis auf der Seite, auf der der imaginäre Theil von t gleich i mal einer positiven Grösse ist; ausgeschlossen seien aber noch unendlich kleine Flächen, die durch Halbkreise begrenzt sind, die den Radius ε und zu Mittelpunkten die Punkte $t = a_1, = a_2, \ldots$ haben. Dieses Gebiet von t ist ein einfach zusammenhängendes, in dem $\frac{dz}{dt}$ nicht unstetig wird, und in dem kein Punkt liegt, für welchen zwei, im Allgemeinen verschiedene Werthe von $\frac{dz}{dt}$ einander gleich sind. Daraus folgt, dass, wenn man für

einen Punkt des t-Gebietes einen von den Werthen, die $\frac{dz}{dt}$ hier haben kann, nach Willkür festsetzt, $\frac{dz}{dt}$ in dem ganzen Gebiete eindeutig bestimmt ist. Da in diesem Gebiete $\frac{dz}{dt}$ auch nicht verschwindet, so ist z eine Funktion von t, durch welche das Gebiet von t auf dem entsprechenden Gebiet von z conform abgebildet wird. Es ist leicht zu zeigen, dass die Grenzen des letzteren, soweit sie endlich sind, aus geraden Linien bestehn, und die Winkel zu finden, die je zwei aufeinanderfolgende von diesen Linien mit einander bilden. Man setze

$$\frac{dz}{dt} = M(\cos\vartheta + i\sin\vartheta); \tag{12}$$

M, der Modul von $\frac{dz}{dt}$, ist dann das Verhältniss der linearen Dimensionen entsprechender, unendlich kleiner Gebiete von z und t, und ϑ ist, wenn die Axen des Reellen und die des Imaginären in der z-Ebene und der t-Ebene parallel sind, der Winkel, um den das z-Gebiet gegen das t-Gebiet in positivem Sinne gedreht ist, d. h. in dem Sinne, in dem die x-Axe um $\frac{\pi}{2}$ gedreht werden muss, um der y-Axe parallel zu werden. Es möge festgesetzt sein, dass für einen reellen, negativen, unendlich grossen Werth von t alle Faktoren von C in der Gleichung (11) reell und positiv sind. Lässt man t auf der Grenze seines Gebietes von $-\infty$ bis $a-\varepsilon$ wachsen, wo a irgend eine der Grössen $a_1, a_2 \ldots$ bedeutet, so bleibt $(a-t)^{-\alpha}$, wo α diejenige der Grössen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ bezeichnet, die dem a entspricht, reell und positiv. Für den Halbkreis, den der Punkt t bei seinem weiteren Fortschreiten auf der Grenze zu durchlaufen hat, setze man

$$a - t = \varepsilon(\cos\omega - i\sin\omega), \tag{13}$$

so dass ω von 0 bis π wächst, während der Punkt t den Halbkreis beschreibt. Während dieses geschieht, ist

$$(a-t)^{-\alpha} = \varepsilon^{-\alpha}(\cos\alpha\omega + i\sin\alpha\omega),$$

und daher ist für $t = a + \varepsilon$

$$(a-t)^{-\alpha} = \varepsilon^{-\alpha}(\cos\alpha\pi + i\sin\alpha\pi).$$

Wächst t durch reelle Werthe weiter, so ändert sich nur der Modul dieser Grösse, während die Potenz von -1, die ihren zweiten Faktor bildet, ungeändert bleibt. Durchläuft der Punkt t einen der geradlinigen Theile seines Gebietes, so bleibt daher der durch die Gleichungen (11) und (12) definirte Winkel ϑ ungeändert; durchläuft er den um $t = a$ beschriebenen Halbkreis, so wächst ϑ um $\alpha\pi$. Den $n+1$ geradlinigen Theilen der Grenze des t-Gebietes entsprechen daher eben so viel gerade Linien in der Grenze des z-Gebietes; von je zwei aufeinander folgenden von diesen ist die zweite gegen die erste um den Winkel $\alpha\pi$ in positivem Sinne gedreht. Welche Linie im z-Gebiet dem um $t = a$ beschriebenen Halbkreis im t-Gebiet entspricht, erkennt man, wenn man erwägt, dass, wenn $a - t$ unendlich klein ist,

$$\frac{dz}{dt} = -A(a-t)^{-\alpha},$$

also

$$z = \frac{A}{1-\alpha}(a-t)^{1-\alpha} + B$$

oder nach (13)

$$z = \frac{A}{1-\alpha}\varepsilon^{1-\alpha}[\cos(1-\alpha)\omega - i\sin(1-\alpha)\omega] + B$$

ist, wo A und B zwei endliche, complexe Constanten bedeuten. Hiernach ist die gesuchte Linie ein Kreisbogen, dessen Mittelpunkt im Endlichen liegt, nämlich der Punkt $z = B$ ist, und dessen Radius unendlich klein oder unendlich gross ist, je nachdem $\alpha < 1$ oder $\alpha > 1$. Ist $\alpha = 1$, so hat man

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{A}{a-t},$$

also

$$z = A\lg(a-t) + B$$

oder nach (13)

$$z = A(\lg\varepsilon - i\omega) + B,$$

woraus hervorgeht, dass die Linie gerade ist, im Unendlichen liegt und eine endliche Länge besitzt, die gleich π mal dem Modul von A ist. Durchläuft der Punkt t seinen Halbkreis mit gleichbleibender Geschwindigkeit, so wird die entsprechende Linie von dem Punkte z auch mit gleichbleibender Geschwindigkeit durchlaufen. Was endlich den unendlichen Halbkreis in der Grenze des t-Gebietes anbetrifft, so ist für diesen

$$\frac{dz}{dt} = C(-t)^{-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_n},$$

also

$$z = -\frac{C}{1-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_n}(-t)^{1-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_n} + B.$$

Mit Hülfe von (13) erkennt man, dass hierdurch ein Kreisbogen dargestellt ist, der zum Mittelpunkte den im Endlichen liegenden Punkt $z = B$ hat, und dessen Radius unendlich gross oder unendlich klein ist, je nachdem $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \leqq 1$ oder > 1. Er wird von dem Punkte z mit gleichbleibender Geschwindigkeit durchlaufen, wenn der Punkt t seinen Halbkreis mit gleichbleibender Geschwindigkeit durchläuft.

Ist das z-Gebiet gegeben, so ist zunächst n bekannt, da $n+1$ die Zahl der geraden, im Endlichen liegenden Stücke der Begrenzung ist: für $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \ldots \alpha_n\pi$ kann man n beliebige der $n+1$ Winkel setzen, die je zwei aufeinanderfolgende dieser Begrenzungsstücke in dem oben bezeichneten Sinne mit einander bilden. Die Grössen a und die Grösse C können theilweise beliebig gewählt werden, theilweise sind sie durch die Dimensionen und die Lage des z-Gebietes zu bestimmen.

Für das Gebiet von z, auf welches die hier zu entwickelnde Theorie des Condensators geführt hat, kann man hiernach setzen

$$dz = 2a\frac{\sqrt{(\mu^2-t^2)(\lambda^2-t^2)}}{t}dt, \tag{14}$$

wo μ und λ zwei reelle, positive Constanten bedeuten. Den Punkten $t = \pm\lambda$ entsprechen dann, wenn $\mu > \lambda$ ist, die Punkte $z = \pm ia$, den Punkten $t = \pm\mu$ die Punkte $z = \pm i(a+b)$, dem unendlich kleinen, um $t = 0$ beschriebenen Halbkreise, der zur Grenze des t-Gebietes gehört, die Linie, für die $\frac{x}{a}$ einen unendlich grossen, positiven, constanten Werth hat, und für deren Endpunkte $y = \pm a$ ist, dem unendlichen Halbkreise endlich, der die Grenze des t-Gebietes vervollständigt, ein gegen a unendlicher Kreisbogen, dem nur ein gegen a endliches Stück fehlt, um ein voller Kreis zu sein, und für dessen Endpunkte $\frac{x}{a}$ einen unendlich grossen, positiven Werth hat und $y = \pm(a+b)$ ist. Um die Constanten λ, μ durch a und b auszudrücken, integrire man zunächst die Gleichung (14) über den

unendlich kleinen, um $t = 0$ beschriebenen Halbkreis; dann findet man

$$1 = \lambda \mu \pi .$$

Dieselbe Gleichung integrire man ferner über den unendlich grossen, zur Grenze des t-Gebietes gehörigen Halbkreis; man hat hierbei

$$dz = 2a\left(t - \tfrac{1}{2}\frac{\lambda^2 + \mu^2}{t}\right)dt$$

zu setzen und findet daher

$$\frac{a+b}{a} = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}\pi .$$

Hieraus folgt

$$(15) \qquad \mu + \lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{(2a+b)}{a}} \quad , \quad \mu - \lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{b}{a}} .$$

Um die gesuchte Beziehung zwischen z und dem durch (10) definirten w zu finden, muss man zu der jetzt festgestellten Beziehung zwischen z und t eine zwischen t und w hinzunehmen, durch welche das Gebiet von t conform abgebildet wird auf einem unendlich langen Streifen in der w-Ebene, von dessen Enden das eine unendlich kleinen, das andere unendlich grossen Werthen von t entspricht. Eine solche Abbildung wird vermittelt durch

$$\frac{dw}{dt} = \frac{A}{t} ,$$

also

$$w = A \lg t + B ;$$

die Constanten A und B sind hier so zu bestimmen, dass φ (d. h. der reelle Theil von w) $+ 1$ ist für positive und $- 1$ für negative reelle Werthe von t. Hiernach ist

$$w = 1 + \frac{2i}{\pi}\lg t + iC$$

zu setzen, wo $\lg t$ für positive Werthe von t reell zu nehmen ist und C eine reelle Constante bedeutet. Nun soll ψ für die Punkte der Oberfläche der Condensatorplatte bestimmt werden, für welche $\varphi = + 1$ ist. Für diese Oberfläche ist t positiv und daher

$$(16) \qquad \psi = \frac{2R}{\pi}\lg t + CR.$$

Für die Mitte der äusseren Grundfläche der betrachteten Con-

densatorplatte möge $\psi = 0$ angenommen werden; dann lässt sich C in der folgenden Weise bestimmen. Man betrachte einen Punkt der äusseren Grundfläche, für den x unendlich gross gegen a und unendlich klein gegen R ist. Für diesen Punkt ist t unendlich gross und daher nach (14)

$$z = a(t^2 + A),$$

wo A eine endliche Constante bedeutet. Daraus folgt, dass bis auf unendlich Kleines

$$\lg \frac{z}{a} = 2 \lg t \text{ und } \lg \frac{x}{a} = 2 \lg t$$

ist; aus (16) ergiebt sich hiernach

$$\psi = \frac{R}{\pi} \lg \frac{x}{a} + CR.$$

Andererseits ist für denselben Punkt nach (6)

$$\psi = \frac{R}{\pi} \left(2 - \lg \frac{8R}{x} \right),$$

und daher

$$C = \frac{1}{\pi} \left(2 - \lg \frac{8R}{a} \right). \tag{17}$$

Nun werde ein Punkt der inneren Grundfläche ins Auge gefasst, für den x unendlich gross gegen a und unendlich klein gegen R ist. Für diesen ist t unendlich klein und zwischen x und t besteht nach (15) die Relation

$$x = 2a \int_t^\lambda \frac{\sqrt{(\lambda^2 - t^2)(\mu^2 - t^2)}}{t} dt.$$

Es ist aber

$$2 \int \frac{\sqrt{(\lambda^2 - t^2)(\mu^2 - t^2)}}{t} dt = \sqrt{(\lambda^2 - t^2)(\mu^2 - t^2)}$$
$$+ \frac{\mu^2 + \lambda^2}{2} \frac{\sqrt{\mu^2 - t^2} + \sqrt{\lambda^2 - t^2}}{\sqrt{\mu^2 - t^2} - \sqrt{\lambda^2 - t^2}} - \lambda\mu \lg \frac{\lambda\sqrt{\mu^2 - t^2} + \mu\sqrt{\lambda^2 - t^2}}{\lambda\sqrt{\mu^2 - t^2} - \mu\sqrt{\lambda^2 - t^2}};$$

bei Rücksicht darauf, dass t unendlich klein ist, folgt hieraus

$$-\frac{x}{a} = \lambda\mu + \frac{(\mu+\lambda)^2}{2} \lg \frac{\mu+\lambda}{2\lambda\mu} - \frac{(\mu-\lambda)^2}{2} \lg \frac{\mu-\lambda}{2\lambda\mu} + 2\lambda\mu \lg t$$

oder bei Rücksicht auf (15)

$$-2 \lg t = \frac{x}{a}\pi + 1 + \lg \frac{\pi(2a+b)}{2a} + \frac{b}{2a} \lg \frac{2a+b}{b}.$$

Diesen Ausdruck, so wie den in (17) angegebenen Werth von

C denke man sich in (16) substituirt und vergleiche das Resultat mit der Gleichung

$$\psi = \frac{R^2}{2a} - \frac{Rx}{a} - \text{const.},$$

die nach (9) gilt, falls $\frac{x^2}{a}$ unendlich klein ist. Die mit const. bezeichnete Grösse ergiebt sich dann

$$(18) \qquad = \frac{R^2}{2a} + \frac{R}{\pi}\left(\lg\frac{4\pi(2a+b)R}{ea^2} + \frac{b}{2a}\lg\frac{2a+b}{b}\right),$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Dieser Ausdruck ist nach (8) und (2) das Doppelte der Elektricitätsmenge, welche die ganze Condensatorplatte enthält.

Die Elektricitätsmenge der zweiten Condensatorplatte ist eben so gross, aber von entgegengesetztem Vorzeichen.

Setzt man $b=0$, so kommt man auf den von Hrn. Clausius behandelten Fall; der Ausdruck (18) wird dann

$$\frac{R^2}{2a} + \frac{R}{\pi}\lg\frac{8\pi R}{ea}$$

oder, wenn man für π und e ihre Zahlenwerthe setzt,

$$\frac{R^2}{2a} + \frac{R}{\pi}\lg 9{,}246\,\frac{R}{a}.$$

Statt dessen hat Hr. Clausius bei der hier gebrauchten Bezeichnung gefunden

$$\frac{R^2}{2a} + \frac{R}{\pi}\lg 8{,}84\,\frac{R}{a}.$$

Der Unterschied der Zahlencoefficienten erklärt sich durch die Unsicherheit, die die lange numerische Rechnung, durch welche Hr. Clausius zu seinem Resultate gelangt ist, nothwendig mit sich brachte.

Viel leichter ist der zweite der beiden Fälle zu behandeln, die hier betrachtet werden sollten, der Fall, dass in beiden Platten $\varphi = 1$ ist. In diesem ist für alle Punkte des Raumes bis auf unendlich Kleines

$$\varphi = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{R}{u},$$

wo u die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{\varrho^2}{R^2+u^2} + \frac{y^2}{u^2} = 1$$

ist und wo der arctg zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt; d. h. es hat φ denselben Werth, wie wenn statt der beiden Platten nur eine

vorhanden wäre. Die Elektricitätsmenge einer jeden der beiden Platten ist

$$\frac{R}{\pi}.$$

Es soll jetzt die Theorie des Eingangs erwähnten Thomsonschen Condensators entwickelt werden. Es lässt sich derselbe folgendermassen beschreiben: der untere, horizontale Boden einer metallnen, cylindrischen Büchse besteht aus zwei Theilen, einem äusseren, dem Schutzringe, und einem inneren, der die Collektorplatte genannt werden möge; unter diesem Boden, in kleinem Abstande von demselben befindet sich eine Metallplatte von gleicher Grösse. Das Potential in dieser sei $= 0$, während es in der Büchse und der Collektorplatte $= 1$ sei; es handelt sich darum, die Elektricitätsmenge der Collektorplatte zu finden. Die Gleichung der oberen Fläche der Platte, in der $\varphi = 0$ ist, sei $y = 0$, die Gleichungen der Grundflächen der Collektorplatte und des Schutzringes seien $y = a$ und $y = a + b$, die Gleichungen der Randflächen der Collektorplatte und des Schutzringes endlich $\varrho = R - c$ und $\varrho = R + c$, so dass a der Abstand der Collektorplatte von der unteren Platte, b die Dicke der Collektorplatte und $2c$ die Breite des ringförmigen Zwischenraumes zwischen dieser und dem Schutzringe bedeutet. a, b, c werden als unendlich klein gegen R, die Breite des Schutzringes als von derselben Ordnung wie R vorausgesetzt.

In endlicher Entfernung von dem Kreise, für den $y = 0$, $\varrho = R$ ist, ist oberhalb der Collektorplatte und des Schutzrings $\varphi = 1$, unterhalb $\varphi = \frac{y}{a}$, dort ist $\psi = \text{const}$, hier

$$\psi = \frac{\varrho^2}{2a} - \text{const.} \tag{19}$$

Es sind φ und ψ für Punkte, die unendlich nahe an jenem Kreise liegen, zu berechnen. Setzt man wieder

$$R - \varrho = x,\ x + iy = z,\ \varphi + i\frac{\psi}{R} = w,$$

so ist w eine Funktion von z. Man bilde das zu betrachtende Gebiet von z wieder auf der Hälfte der t-Ebene ab. Das geschieht durch die Gleichung

$$Ndz = \lambda^2 \sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}\,\frac{}{1-\lambda^2t^2}\,dt, \tag{20}$$

wo N, k, λ positive Constanten bedeuten sollen, von denen $k<1$ und $\lambda>1$. Den unendlich kleinen Halbkreisen, deren Mittelpunkte die Punkte $t=\pm\frac{1}{\lambda}$ sind, und die zur Grenze des t-Gebietes gehören, entsprechen dann in der Grenze des z-Gebietes gerade Linien, für welche $\frac{x}{a}=\pm\infty$ und für deren Endpunkte $y=0$ und $y=a$ ist; dem unendlich grossen Halbkreise in der Grenze des t-Gebietes entspricht ein gegen a unendlich grosser Halbkreis in der Grenze des z-Gebietes, für dessen Endpunkte $\frac{x}{a}=\pm\infty$ und $y=a+b$ ist; den Punkten

$$t=\pm 1 \text{ und } t=\pm\frac{1}{k}$$

endlich entsprechen die Punkte

$$z=\pm c+ia \text{ und } z=\pm c+i(a+b).$$

Man erhält die verlangte Beziehung zwischen z und w, wenn man zwischen w und t die Gleichung

$$w=\frac{i}{\pi}\lg\frac{1-\lambda t}{1+\lambda t}+iC$$

festsetzt, in der C eine reelle Constante bedeutet. Hieraus folgt für die Oberfläche der Collektorplatte, für die $t>\frac{1}{\lambda}$ ist,

$$\psi=\frac{R}{\pi}\lg\frac{\lambda t-1}{\lambda t+1}+CR. \tag{21}$$

Die Gleichung (20) lässt sich schreiben

$$Ndz=\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\left(\lambda^2-1+1-k^2t^2+\frac{(\lambda^2-1)(\lambda^2-k^2)t^2}{1-\lambda^2t^2}\right).$$

Bei der Bezeichnungsweise Jacobi's ist daher, wenn man

$$t=\operatorname{sin\,am}u,\ k\quad,\quad \lambda=k\operatorname{sin\,am}\alpha,k$$

setzt,

$$Nz=-u\Delta^2\operatorname{am}\alpha+E(u)+\frac{\cos\operatorname{am}\alpha\,\Delta\operatorname{am}\alpha}{\sin\operatorname{am}\alpha}\Pi(u,\alpha)$$

oder auch

$$Nz=u\left(\frac{d\lg\vartheta(\alpha)}{d\alpha}\frac{d}{d\alpha}\lg\frac{\vartheta_1(\alpha)}{\vartheta(\alpha)}-\frac{d^2\lg\vartheta(\alpha)}{d\alpha^2}\right)$$
$$+\frac{d\lg\vartheta(u)}{du}+\frac{1}{2}\lg\frac{\vartheta(u-\alpha)}{\vartheta(u+\alpha)}\frac{d}{d\alpha}\lg\frac{\vartheta_1(\alpha)}{\vartheta(\alpha)}.$$

Macht man nun

$$\alpha = \beta + iK',$$

so kann β, da

$$\sin \operatorname{am} \alpha > \frac{1}{k}$$

ist, reell und zwischen 0 und K gewählt werden. Man hat dann

$$\vartheta(\alpha) = ie^{-\frac{i\beta\pi}{2K} + \frac{\pi K'}{4K}} \vartheta_1(\beta)$$

$$\vartheta_1(\alpha) = ie^{-\frac{i\beta\pi}{2K} + \frac{\pi K'}{4K}} \cdot \vartheta(\beta)$$

und daher

$$Nz = u\left(\frac{d \lg \vartheta_1(\beta)}{d\beta} \frac{d}{d\beta} \lg \frac{\vartheta(\beta)}{\vartheta_1(\beta)} - \frac{d^2 \lg \vartheta_1(\beta)}{d\beta^2}\right)$$
$$+ \frac{d \lg \vartheta(u)}{du} + \tfrac{1}{2} \lg \frac{\vartheta_1(\beta - u)}{\vartheta_1(\beta + u)} \frac{d}{d\beta} \lg \frac{\vartheta(\beta)}{\vartheta_1(\beta)},$$

oder, wenn man

$$\frac{d\vartheta_1(\beta)}{d\beta} = \vartheta_1'(\beta)$$

setzt,

$$Nz = -u \frac{\vartheta(\beta)}{\vartheta_1(\beta)} \frac{d}{d\beta} \frac{\vartheta_1'(\beta)}{\vartheta(\beta)} + \frac{d \lg \vartheta(u)}{du}$$
$$- \tfrac{1}{2} \lg \frac{\vartheta_1(\beta - u)}{\vartheta_1(\beta + u)} \cdot \frac{\vartheta(\beta)}{\vartheta_1(\beta)} \frac{d}{d\beta} \frac{\vartheta_1(\beta)}{\vartheta(\beta)}.$$

Die Bedingung, dass

$$\text{für } u = \pm K \qquad z = \pm c + ia$$

und

$$\text{für } u = \pm K + iK' \qquad z = \pm c + i(a + b)$$

werde, ergiebt zur Bestimmung der 3 Constanten, N, k, β die Gleichungen

$$(22) \qquad \begin{cases} Nc = -K \dfrac{\vartheta(\beta)}{\vartheta_1(\beta)} \dfrac{d}{d\beta} \dfrac{\vartheta_1'(\beta)}{\vartheta(\beta)} \\ Na = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{\vartheta(\beta)}{\vartheta_1(\beta)} \dfrac{d}{d\beta} \dfrac{\vartheta_1(\beta)}{\vartheta(\beta)} \\ N\left(c \dfrac{K'}{K} - a \dfrac{\beta}{K} - b\right) = \dfrac{\pi}{2K}; \end{cases}$$

in Folge der beiden ersten von diesen lässt die Gleichung für Nz sich schreiben

$$(23) \qquad Nz = Nc \frac{u}{K} + \frac{d \lg \vartheta(u)}{du} - \frac{Na}{\pi} \lg \frac{\vartheta_1(\beta - u)}{\vartheta_1(\beta + u)}.$$

Durch Einführung von u und β wird die Gleichung (21)

$$\psi = \frac{R}{\pi} \lg \frac{\sin \operatorname{am} u - \sin \operatorname{am} \beta}{\sin \operatorname{am} u + \sin \operatorname{am} \beta} + CR.$$

Für einen Punkt der oberen Grundfläche der Collektorplatte, für den $\frac{x}{a}$ unendlich gross ist, ist $\sin \operatorname{am} u$ unendlich gross, also

$$\psi = CR.$$

Setzt man für Punkte dieser Grundfläche, deren Entfernung vom Rande von der Ordnung von R sind, und für die, wie bemerkt, ψ constant ist, $\psi = 0$, so ist also $C = 0$ und

$$\psi = \frac{R}{\pi} \lg \frac{\sin \operatorname{am} u - \sin \operatorname{am} \beta}{\sin \operatorname{am} u + \sin \operatorname{am} \beta}. \tag{24}$$

Für Punkte der unteren Grundfläche der Collektorplatte, für die $\frac{x}{a}$ unendlich gross ist, ist $u - \beta$ unendlich klein und positiv und daher nach (23)

$$x = c\frac{\beta}{K} + \frac{i}{N}\frac{d \lg \vartheta(\beta)}{d\beta} - \frac{a}{\pi} \lg \frac{(u-\beta)\vartheta_1'(0)}{\vartheta_1(2\beta)}$$

und nach (24)

$$\psi = \frac{R}{\pi} \lg \frac{(u-\beta)\cos \operatorname{am} \beta \, \Delta \operatorname{am} \beta}{2 \sin \operatorname{am} \beta}.$$

Benutzt man, dass

$$\sin \operatorname{am} \beta = \frac{\vartheta(0)\ \vartheta_1(\beta)}{\vartheta_1'(0)\ \vartheta(\beta)}, \quad \cos \operatorname{am} \beta = \frac{\vartheta(0)\ \vartheta_2(\beta)}{\vartheta_2(0)\ \vartheta(\beta)},$$

$$\Delta \operatorname{am} \beta = \frac{\vartheta(0)\ \vartheta_3(\beta)}{\vartheta_3(0)\ \vartheta(\beta)}$$

und

$$\vartheta(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_1(2\beta) = 2\vartheta(\beta)\vartheta_1(\beta)\vartheta_2(\beta)\vartheta_3(\beta)$$

ist, so folgt aus diesen beiden Gleichungen

$$\psi = -\frac{Rx}{a} + \frac{2R}{\pi}\left(\frac{c}{a}\frac{\beta\pi}{2K} + \frac{\pi}{2Na}\frac{d \lg \vartheta(\beta)}{d\beta} + \lg \frac{\vartheta_1(\beta)\vartheta_3(\beta)}{\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)}\right).$$

Da nun nach (19) wiederum

$$\psi = \frac{R^2}{2a} - \frac{Rx}{a} - \text{const.}$$

ist, falls $\frac{x^2}{a}$ unendlich klein, so ergiebt sich für die mit const bezeichnete Grösse, d. h. für das Doppelte der Elektricitätsmenge, die die Collektorplatte enthält, der Ausdruck

$$\frac{R^2}{2a} - \frac{2R}{\pi}\left(\frac{c}{a}\frac{\beta\pi}{2K} + \frac{\pi}{2Na}\frac{d \lg \vartheta(\beta)}{d\beta} + \lg \frac{\vartheta_1(\beta)\vartheta_3(\beta)}{\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)}\right). \tag{25}$$

Im Allgemeinen ist die Berechnung desselben beschwerlich, sie die Auflösung der Gleichungen (22) nach k, β, N erfordert; sie ist aber sehr leicht, wenn man die Dicke der Collektor-

platte b als unendlich gross gegen die Breite $2c$ des Zwischenraumes zwischen ihr und dem Schutzringe annimmt und sich begnügt, neben den endlichen Gliedern die unendlich kleinen Glieder niedrigster Ordnung zu berücksichtigen. Nimmt man $\frac{b}{c}$ als unendlich gross an und berücksichtigt nur endliche Glieder, so genügt man den Gleichungen (22) durch

$$k = 0 \ , \ \operatorname{tg}\beta = \frac{c}{a} \ , \ N = \frac{\pi}{2c},$$

und der Ausdruck (25) wird dann

$$\frac{R^2}{2a} - \frac{2R}{\pi}(\beta \operatorname{tg}\beta + \lg\cos\beta).$$

Um seinen Werth genauer zu finden, setze man

$$\frac{c}{a} = \operatorname{tg}\beta_0;$$

die dritte der Gleichungen (22) giebt dann

$$-\lg q = \pi \frac{K'}{K} = 2\left(1 + \frac{\beta_0}{\operatorname{tg}\beta_0} + \frac{b}{c}\frac{\pi}{2}\right)$$

und die beiden ersten geben

$$\frac{\beta\pi}{2K} = \beta_0 - 4q\sin 2\beta_0.$$

In Folge hiervon wird der Ausdruck (25)

$$\frac{R^2}{2a} - \frac{2R}{\pi}(\beta_0 \operatorname{tg}\beta_0 + \lg\cos\beta_0 + 4q\sin^2\beta_0).$$

Der Ausdruck (25) ist auch leicht in dem Falle zu berechnen, dass $b = 0$ ist, einem Falle, der aber ein geringeres praktisches Interesse darbietet. In ihm ist $k = 1$ und die Electricitätsmenge der Collektorplatte

$$= \frac{R^2}{4a} - \frac{R}{\pi}\frac{1}{\lambda^2 - 1},$$

wo λ aus der Gleichung

$$\frac{c}{a}\pi = \frac{2\lambda}{\lambda^2 - 1} + \lg\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$$

zu bestimmen ist.

Bestimmung der Constanten, von welcher die Intensität inducirter elektrischer Ströme abhängt.[1])

Die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme sind von Neumann und Weber aufgestellt worden; in dem Ausdrucke, den beide für die Intensität eines inducirten Stromes gefunden haben, kommt ausser Grössen, die in jedem gegebenen Falle gemessen werden müssen, eine Constante vor, die ein für allemal durch Versuche ermittelt werden muss, und die Neumann durch ε bezeichnet. Diese zu bestimmen, habe ich unternommen.

Wird die relative Lage eines geschlossenen Stromes und eines geschlossenen Leiters verändert, so wird in dem letzteren ein Strom inducirt; die Intensität des inducirten Integralstroms, d. h. die Elektricitätsmenge, die während der Dauer der Bewegung durch einen jeden Querschnitt getrieben wird, ist nach Neumann = dem Unterschiede der Potentiale des Stroms in Beziehung auf den Leiter, diesen von der Einheit des Stroms durchflossen gedacht, in der End- und Anfangslage, dieser Unterschied multiplicirt mit ε, dividirt durch den Widerstand des Leiters. Das Potential zweier Ströme in Bezug auf einander, ist die halbe negative Summe der Produkte der Bahnelemente des einen Stroms mit den Bahnelementen des anderen, jedes Produkt zweier Elemente mit ihren Intensitäten und dem Cosinus ihrer Neigung gegen einander multiplicirt und durch ihre Entfernung dividirt.[2])

Um ε als Zahl angeben zu können, muss man Einheiten für die Zeit, den Raum und den Widerstand oder die Leitungsfähigkeit einführen. Als Einheit für die letztere habe ich die Leitungsfähigkeit eines Kupferdrahtes, den ich bei meinen Versuchen benutzte, angenommen; da die Leitungsfähigkeit des Kupfers zwischen gewissen Gränzen variirt, so ist daher bei der Angabe des Zahlenwerthes von ε nur eine beschränkte Genauigkeit von Interesse.

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 76. 1849.

[2]) Neumann: Ueber ein allgemeines Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme; Abhandl. d. Berliner Acad. der Wiss. 1848.

Der Weg, der sich am natürlichsten zur Bestimmung von ε mir darzubieten scheint, ist der, dem Leiter, in welchem ein Strom inducirt werden soll, so wie dem Leiter des inducirenden Stromes Formen zu geben, für welche man das Potential, welches sie, von der Einheit des Stromes durchflossen, aufeinander ausüben, berechnen kann, die Intensität des inducirenden Stromes durch die Ablenkung zu messen, welche er einer Multiplicatornadel ertheilt, und den Ausschlag zu beobachten, den der inducirte Strom bei einer zweiten Multiplicatornadel hervorbringt. Diesen Weg habe ich eingeschlagen, mit der Modification jedoch, dass ich mich nur einer Magnetnadel bediente, und an dieser zugleich die Ablenkung für den ersten, und den Ausschlag für den zweiten Strom beobachtete.

Ich will den Gedanken der angewandten Methode zuerst auseinandersetzen. Aus den Drähten zweier Drahtrollen, R_1, R_2, die in einer solchen Nähe sich befinden, dass die eine auf die andere inducirend wirken kann, einem Multiplicator M und einer Kette K sei eine Schliessung gebildet, und zwei Punkte dieser Schliessung, von denen der eine zwischen den beiden Rollen, der andere zwischen Multiplicator und Kette liegt, durch einen Draht verbunden. Nennen wir die drei Wege zwischen den beiden eben bezeichneten Punkten 1, 0, 2, wie die in Figur 7 beigeschriebenen Zahlen andeuten, ihre Widerstände w_1, w_0, w_2 und die Intensitäten der Ströme, welche sie in den durch Pfeile bezeichneten Richtungen durchfliessen, J_1, J_0, J_2, die elektromotorische Kraft der Kette endlich E, so haben wir:

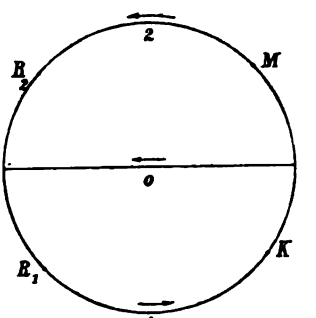


Fig. 7.

$$J_1 = J_0 + J_2, \qquad J_1 w_1 + J_0 w_0 = E$$
$$J_2 w_2 - J_0 w_0 = 0,$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{w_0}{w_0 + w_2}.$$

Wird nun die eine der beiden Rollen, R_2, eine gewisse Strecke fortgeführt, so werden in ihr sowohl, als in der anderen Ströme inducirt: die Summe der elektromotorischen Kräfte,

die in R_1 inducirt werden, sei e_1, die Summe der in R_2 inducirten e_2; ferner seien die Elektricitätsmengen, die durch diese Kräfte durch die Wege 0, 1, 2 getrieben werden, d. h. die Intensitäten der in diesen Drähten hervorgebrachten Integralströme i_0, i_1, i_2, dann ist:

$$i_1 = i_0 + i_2 \qquad i_1 w_1 + i_0 w_0 = e_1$$
$$i_2 w_2 - i_0 w_0 = e_2,$$

woraus man findet:

$$i_2 = \frac{e_2 (w_0 + w_1) + e_1 w_0}{w_0 w_1 + w_1 w_2 + w_2 w_0}.$$

Nennen wir die Summe der elektromotorischon Kräfte, welche in R_2 inducirt worden wären, wenn R_1 von der Einheit des Stromes durchflossen würde, e, so ist dieses auch die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche in R_1 inducirt worden wären, würde R_2 von der Einheit des Stromes durchflossen; denn bezeichnen wir das Potential der beiden Drahtrollen in Bezug auf einander, beide von der Einheit des Stromes durchflossen gedacht, vor der Bewegung von R_2 durch P, nach der Bewegung von R_2 durch Q, so ist jede dieser beiden Summen $= \varepsilon (Q - P)$, wo ε die Constante ist, die wir bestimmen wollen. Durch Einführung der Grösse e erhalten wir:

$$e_1 = J_2 e \qquad e_2 = J_1 e$$
$$i_2 = e \frac{J_1 (w_1 + w_0) + J_2 w_0}{w_0 w_1 + w_1 w_2 + w_2 w_0}$$

und durch Benutzung jener Formel für $\frac{J_2}{J_1}$:

$$\frac{i_2}{J_2} = \frac{e}{w_0} \quad \frac{(w_0 + w_1)(w_0 + w_2) + w_0^2}{w_0 w_1 + w_1 w_2 + w_2 w_0}.$$

Bei den angestellten Versuchen war w_0 verschwindend klein gegen w_1 und w_2; bei Berücksichtigung dieses Umstandes wird die gefundene Gleichung:

$$\frac{i_2}{J_2} = \frac{e}{w_0}.$$

Setzen wir hierin für e seinen Werth $\varepsilon (Q - P)$ und drücken ε aus, so finden wir:

$$\varepsilon = \frac{i_2}{J_2} \frac{w_0}{Q - P}.$$

Bei den angestellten Versuchen wurde die eine Drahtrolle aus der Nähe der anderen in eine Entfernung fortgeführt,

die als unendlich betrachtet werden konnte. Es ist daher $Q = 0$ und

$$\varepsilon = -\frac{i_2}{J_2}\frac{w_0}{P}.$$

Berechnet man also P und bestimmt $\frac{i_2}{J_2}$, so kann man, wenn man w_0 kennt, den Werth von ε ermitteln. Aus den folgenden Betrachtungen geht hervor, wie sich $\frac{i_2}{J_2}$ experimentell bestimmen lässt.

Ich nenne die horizontale Componente des Erdmagnetismus H; das horizontale magnetische Moment der Multiplicatornadel μ; das horizontale Drehungsmoment, welches ein der Einheit gleicher Strom in dem Multiplicatordrahte auf die Nadel ausübt, wenn diese sich im magnetischen Meridiane befindet, M. Wird die Kette in Wirksamkeit gesetzt, beginnt also ein Strom von der Intensität J_2 durch den Multiplicatordraht zu fliessen, so wird die Gleichgewichtslage des Magnets um einen Winkel α abgelenkt, der, wenn er klein genug ist, durch die Gleichung:

$$H\mu\alpha + J_2 M = 0$$

bestimmt ist. Um diese neue Gleichgewichtslage wird der Magnet Schwingungen machen; der Winkel, um den er sich zur Zeit t von ihr entfernt hat, sei u, sein Trägheitsmoment K, dann gilt für u, vorausgesetzt dass dieses ebenfalls sehr klein ist, die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{H\mu(u+\alpha) + MJ_2}{K}.$$

Diese wird, wenn man die Gleichung für α berücksichtigt:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{H\mu}{K}u.$$

Rechnen wir die Zeit von einem Augenblicke an, für den $u = 0$ ist, so wird das Integral derselben:

$$u = A \sin t\sqrt{\frac{H\mu}{K}}.$$

Nun nehmen wir an, dass zur Zeit t^0 die eine Rolle sich zu bewegen anfange; zu gleicher Zeit beginnt der inducirte Strom in dem Multiplicatordrahte: dieser währe bis zur Zeit $t^0+\tau$. Zwischen den Zeiten t^0 und $t^0+\tau$ gilt dann für u eine andere Differentialgleichung, nämlich die folgende:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{H\mu u + \int m J ds}{K},$$

wo die Bedeutung der neu eingeführten Zeichen diese ist: s ist ein Element des Multiplicatordrahtes, J die Intensität des inducirten Stromes in ds zur Zeit t, m das Drehungsmoment, welches ds, von der Einheit des Stromes durchflossen, auf den Magnet in der Lage ausübt, in der er sich zur Zeit befindet. Da wir annehmen, dass der Magnet sich nur um sehr kleine Winkel von dem magnetischen Meridiane entfernt, so können wir m auch als das Drehungsmoment definiren, das ds, von der Einheit des Stromes durchflossen, auf den Magnet ausübt, wenn dieser sich im magnetischen Meridiane befindet. Die Integration nach ds endlich ist über den ganzen Multiplicatordraht auszudehnen. Diese Differentialgleichung multipliciren wir mit dt und integriren sie von $t = t^0$ bis $t = t^0 + \tau$. Dadurch erhalten wir:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{t^0+\tau} - \left(\frac{du}{dt}\right)_{t^0} = -\frac{H\mu}{K}\int_{t^0}^{t^0+\tau} u\,dt - \frac{1}{K}\int_{t^0}^{t^0+\tau}\int m J ds\,dt,$$

wo die Indices $t^0 + \tau$ und t^0 anzeigen, dass die in Parenthese stehende Grösse respective für $t = t^0 + \tau$ und $t = t^0$ genommen werden soll. Setzen wir τ als sehr klein voraus, d. h. nehmen wir an, dass die eine Drahtrolle mit sehr grosser Geschwindigkeit durch eine gewisse endliche Strecke bewegt werde, so verschwindet das erste Integral der rechten Seite unserer Gleichung, doch nicht so das zweite, weil in demselben Masse wie diese Geschwindigkeit, auch J wächst. Die beiden Integrationen in dem zweiten Integrals lassen sich aber ausführen, und es wird dasselbe $= i_2 M$; es ist nämlich m unabhängig von t, das Integral von $J\,dt$, zwischen den Gränzen t^0 und $t^0 + \tau$ genommen, ist $= i_2$, hat also denselben Werth für alle Elemente s, und wird, über den ganzen Multiplicatordraht integrirt, giebt $i_2 M$. Wir haben also:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{t^0+\tau} = \left(\frac{du}{dt}\right)_{t^0} - \frac{i_2 M}{K}.$$

Unserer Voraussetzung zufolge, dass τ als unendlich klein betrachtet werden dürfe, haben wir ferner:

$$(u)_{t^0+\tau} = (u)_{t^0}.$$

Von der Zeit $t^0 + \tau$ an gilt für u wiederum die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{H\mu}{K}u.$$

Das Integral derselben ist jetzt aber ein anderes, indem die Constanten der Integration jetzt andere Werthe, als früher, erhalten müssen. Wir setzen das Integral:

$$u = A' \sin t\sqrt{\frac{H\mu}{K}} + B' \cos t\sqrt{\frac{H\mu}{K}}.$$

Die Constanten A' und B' sind so zu bestimmen, dass $\left(\frac{du}{dt}\right)_{t^0+\tau}$ und $(u)_{t^0+\tau}$ die eben abgeleiteten Werthe annehmen, wenn wir in diesen für $\left(\frac{du}{dt}\right)_{t^0}$ und $(u)_{t^0}$ die Werthe setzen, die sich aus der Gleichung $u = A \sin t\sqrt{\frac{H\mu}{K}}$ ergeben. Die Gleichungen für A' und B' sind demnach, wenn wir der Kürze halber

$$\sqrt{\frac{H\mu}{K}} = \lambda$$

setzen, und wiederum die Kleinheit von τ berücksichtigen:

$$A' \sin \lambda t^0 + B' \cos \lambda t^0 = A \sin \lambda t^0$$
$$A' \cos \lambda t^0 - B' \sin \lambda t^0 = A \cos \lambda t - \frac{i_2 M}{\lambda K}.$$

Nun wollen wir uns t^0 so gewählt denken, dass $\sin \lambda t^0 = 0$, also $\cos \lambda t^0 = \pm 1$ ist, d. h. wir nehmen an, dass der inducirte Strom in einem Augenblicke hervorgebracht werde, in dem der Magnet durch seine Gleichgewichtslage geht. Unsere beiden Gleichungen zeigen dann, dass $B' = 0$, also

$$u = A' \sin \lambda t$$

und $$A' \cos \lambda t^0 = A \cos \lambda t^0 - \frac{i_2 M}{\lambda K}$$

wird. Wir wollen den Werth ausdrücken, den u am Ende der ersten Schwingung, nachdem der inducirte Strom gewirkt hat, d. h. für $t = t^0 + \frac{\pi}{2\lambda}$ erhält; dieser Werth sei a', dann ist:

$$a' = A' \sin\left(\lambda t^0 + \frac{\pi}{2}\right) = A' \cos \lambda t^0.$$

Ist ferner a der Werth von u, welcher am Ende derselben

Schwingung stattgefunden haben würde, wenn der inducirte Strom nicht entstanden wäre, so ist:

$$a = A \sin\left(\lambda t' + \frac{\pi}{2}\right) = A \cos \lambda t'.$$

Wir haben daher:

$$a' - a = -\frac{i_2 M}{\lambda K} = -\frac{i_2 M}{H\mu K}.$$

Dividiren wir diese Gleichung durch die oben für α gefundene

$$\alpha = -\frac{J_2 M}{H\mu},$$

so erhalten wir:

$$\frac{i_2}{J_2} = \frac{a' - a}{\alpha} \sqrt{\frac{K}{H\mu}}.$$

Führen wir die Schwingungsdauer der Nadel, $T = \pi \sqrt{\frac{1}{H}}$, ein, so wird diese Gleichung:

$$\frac{i_2}{J_2} = \frac{a' - a}{\alpha} \frac{T}{\pi}.$$

Beobachtet man also die Schwingungsdauer T und die drei Winkel a', a, α, so kann man $\frac{i_2}{J_2}$ berechnen, und hieraus, wie schon oben angegeben, ε finden.

Es ist dieses der Gedanke der angewandten Methode, die aber einige Veränderungen erleiden musste. Ein Umstand, der bei der Bestimmung von $\frac{i_2}{J_2}$ noch zu berücksichtigen war, ist der, dass durch die Bewegung des Magnets in dem Multiplicatordrahte, wenn er geschlossen ist, Ströme inducirt werden, welche die Schwingungen dämpfen.

Die Intensität des Stromes, der in jedem Augenblicke in dem Multiplicatordrahte inducirt wird, ist proportional mit der jedesmaligen Geschwindigkeit des Magnets und mit dem reducirten Drehungsmomente, welches ein der Einheit gleicher Strom in dem Multiplicatordrahte auf den Magnet ausüben würde, d. h. proportional mit $-M\frac{du}{dt}$; das Drehungsmoment, welches dieser Strom auf den Magnet ausübt, ist also proportional mit $-M^2\frac{du}{dt}$; wir setzen es $= -2\beta\frac{du}{dt}$. Die Differentialgleichung, der u bis t' und von $t' + \tau$ an genügt, ist also

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2\beta}{K} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{H\mu}{K}\, u = 0.$$

Rechnen wir t von einem Augenblicke an, für den $u = 0$ ist, und setzen der Kürze wegen:

$$\frac{H\mu}{K} - \frac{\beta^2}{K^2} = \lambda^2 \quad , \quad \frac{\beta}{K\lambda} = \eta,$$

so ist das Integral der Gleichung, welche von $t = 0$ bis $t = t^0$ gilt:

$$u = A \,.\, e^{-\eta\lambda t} \sin \lambda t,$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Von $t^0 + \tau$ an gilt ein anderes Integral, nämlich:

$$u = A' e^{-\eta\lambda t} \sin \lambda t + B' e^{-\eta\lambda t} \cos \lambda t.$$

Die Bedingungsgleichungen:

$$(u)_{t^0+\tau} = (u)_{t^0}, \quad \left(\frac{du}{dt}\right)_{t^0+\tau} = \left(\frac{du}{dt}\right)_{t^0} - \frac{i_2 M}{K}$$

haben unveränderte Gültigkeit behalten, und aus diesen findet man, wenn man wiederum $\sin \lambda t^0 = 0$ annimmt:

$$B' = 0$$

$$\text{also } u = A' e^{-\eta\lambda t} \sin \lambda t$$

$$\text{und } A' \cos \lambda t^0 = A \cos \lambda t^0 - \frac{i_2 M}{\lambda K} e^{\eta\lambda t^0}.$$

Das erste Maximum oder Minimum nach der Wirkung des inducirten Stromes findet statt

$$\text{für } \lambda t = \lambda t^0 + \operatorname{arc\,cotg} \eta$$

und in demselben Augenblicke würde ein Maximum oder Minimum stattgefunden haben, wäre der inducirte Strom nicht entstanden. Nennen wir wiederum das Maximum oder Minimum, welches wirklich stattfindet a', dasjenige, welches eingetreten wäre, hätte der inducirte Strom nicht gewirkt, a, so haben wir:

$$a' = \frac{A'}{\sqrt{1+\eta^2}}\, e^{-\eta\lambda t^0}\, e^{-\eta \operatorname{arc\,cotg} \eta} \cos \lambda t^0$$

$$a = \frac{A}{\sqrt{1+\eta^2}}\, e^{-\eta\lambda t^0}\, e^{-\eta \operatorname{arc\,cotg} \eta} \cos \lambda t^0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen, in Verbindung mit der Gleichung zwischen A und A' ergiebt sich:

$$a' - a = -\frac{i_2 M}{\lambda K} \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} e^{-\eta \operatorname{arc\,cotg} \eta}.$$

Dividirt man diese Gleichung durch diejenige für a und benutzt den Werth von λ, so findet man

$$\frac{a'-a}{a} = \frac{i_2}{J_2}\sqrt{\frac{H\mu}{K}}\, e^{-\eta \operatorname{arc\,cotg} \eta}$$

oder

$$\frac{i_2}{J_2} = \frac{a'-a}{a}\frac{T}{\pi} e^{\eta \operatorname{arc\,cotg} \eta},$$

wo T die Schwingungsdauer des Magnets bei ungeschlossenem Multiplicatordrahte bezeichnet. Um η zu bestimmen, müssen Versuche über die Abnahme der Schwingungen des Magnets bei geschlossenem Multiplicatordrahte angestellt werden; aus diesen ergiebt sich η leicht, da $e^{-\eta\pi}$ das Verhältniss zweier aufeinanderfolgenden Schwingungsbögen ist.

Ein zweiter Umstand, welcher eine Complication der Beobachtungen nöthig machte, war die Schwierigkeit der genauen Bestimmung von w_0. Ich umging diese dadurch, dass ich eine Einrichtung traf, vermöge deren ich w_0 beliebig verkleinern oder vergrössern konnte, und dann $\frac{i_2}{J_2}$ für zwei verschiedene Werthe von w_0 beobachtete. Es sei

$$\text{für } w_0 = w_0' \quad \frac{i_2}{J_2} = \left(\frac{i_2}{J_2}\right)'$$

$$\text{für } w_0 = w_0'' \quad \frac{i_2}{J_2} = \left(\frac{i_2}{J_2}\right)'';$$

dann hat man die Gleichungen:

$$\varepsilon = -\left(\frac{i_2}{J_2}\right)' \frac{w_0'}{P}$$

$$\varepsilon = -\left(\frac{i_2}{J_2}\right)'' \frac{w_0''}{P}$$

und aus diesen folgt:

$$\varepsilon = -\frac{w_0' - w_0''}{\left(\frac{J_2}{i_2}\right)' - \left(\frac{J_2}{i_2}\right)''} \frac{1}{P}.$$

Hiernach hat man nur nöthig, die Differenz $w'_0 - w''_0$ anzugeben, und das lässt sich leichter thun.

Eine Veränderung in dieser Formel für ε musste endlich noch aus folgendem Grunde vorgenommen werden. Ich hatte die eine Drahtrolle, R_1, aus zweien zusammengesetzt, einer inneren und einer äusseren, zwischen welche ich den inducirenden Strom sich theilen liess. Ich traf diese Anordnung, um bei der vorhandenen Kette einen stärkeren Inductionsstrom zu erhalten. An die Stelle von P musste daher eine andere Grösse treten, und zwar, wenn man P' und P'' die Potentiale des inneren und des äusseren Theiles von R_1 in Bezug auf R_2 nennt, w_1' und w_1'' die Widerstände des inneren und des äusseren Theiles von R_1, der Ausdruck:

$$P' \frac{w_1''}{w_1' + w_1''} + P'' \frac{w_1'}{w_1' + w_1''}.$$

Ich wende mich jetzt zur Angabe der Versuche selbst. Die vorkommenden Längenmaasse gebe ich in preussischen Zollen an. Der Magnet, dessen Ablenkungen ich beobachtete, hatte eine Länge von 4 Zoll, eine Breite und eine Dicke von $\frac{1}{2}$ Z. Er war mit einem Spiegelapparate versehen, das Fernrohr und die Scale waren etwa 12 Fuss von dem Spiegel entfernt, ein Scalentheil hatte die Länge von 0,1 Z.; war demnach ein Scalentheil durch den Verticalfaden des Fernrohrs gegangen, so hatte sich der Magnet ungefähr um 1′ 12″ gedreht. Der Multiplicator enthielt ungefähr 200 Windungen und eine Drahtlänge von 280 Fuss. Der zu ihm verwendete Kupferdraht hatte einen Durchmesser von $\frac{1}{68}$ Z. Gleicher Draht war zur Anfertigung der Rollen benutzt; der Draht der kleineren Rolle, R_2, erfüllte einen cylindrischen Ring von 1 Z. Höhe, 0,5 Z. innerem, 1,155 Z. äusserem Radius; von den beiden Drähten der grösseren Rolle, R_1, erfüllte der eine einen cylindrischen Ring von 1 Z. Höhe, 1,3 Z. innerem, 1,48 Z. äusserem Radius, der andere einen cylindrischen Ring von 1 Z. Höhe, 1,48 Z. innerem, 1,66 Z. äusserem Radius. Bei der kleineren Rolle lagen in der Richtung der Höhe 45, in der Richtung des Radius 28 Windungen neben einander, bei jedem der beiden Theile der grösseren Rolle 48 in der Richtung der Höhe, 8 in der Richtung des Radius. Die Gestelle der beiden Drahtrollen waren von Messing; sie waren

so aufgestellt, dass ihre Axen in dieselbe Verticale, ihre Grundflächen in dieselben horizontalen Ebenen fielen. Die Induction wurde dadurch hervorgebracht, dass die kleinere Drahtrolle aus dieser Lage in die Höhe gezogen wurde vermittelst eines Fadens, der in dem Mittelpunkte ihrer oberen Fläche befestigt und über eine kleine Rolle, die sich über ihr befand, geführt war. Die freien Enden des Drahtes der beweglichen Drahtrolle waren um einander gewunden, dann war aus ihnen eine auseinandergezogene Spirale gebildet, diese nach oben geführt, hier festgebunden, und nach unten zurückgeleitet.

In Bezug auf den Apparat bemerke ich noch, dass die Möglichkeit, w_0 nach Belieben zu verändern, erreicht war durch ein, an einem ausgespannten Drahte verschiebbares Quecksilbernäpfchen. Beobachtungen wurden bei zwei verschiedenen Werthen von w_0, w_0' und w_0'', also bei zwei verschiedenen Stellungen des Quecksilbernäpfchens, angestellt; die Differenz $w_0' - w_0''$, auf deren Kenntniss es ankam, war = dem Widerstande eines Kupferdrahtes von dem Querschnitte des ausgespannten und der Länge der Strecke, um welche das Quecksilbernäpfchen verschoben worden war. Diese Länge war 14,097 Z.; der Querschnitt des ausgespannten Kupferdrahtes hatte sich aus seinem absoluten und seinem specifischen Gewichte und seiner direkt gemessenen Länge = 0,4061 Quadratlinien ergeben. Setzt man die Leitungsfähigkeit dieses Drahtes = 1, so wird $w_0' - w_0''$ = dem Quotienten aus diesem Querschnitte in jene Länge, d. h.

$$= 5000 \frac{1}{1\,\text{Z.}}.$$

Für w_0'' war ein so kleiner Werth von w_0 gewählt, als es die Vorrichtung erlaubte; dieser war etwa der 20. Theil der Differenz $w_0' - w_0''$. Die Kette, die ich anwandte, bestand aus 6 kleinen Daniell'schen Bechern, die voltaisch mit einander verbunden waren.

Ich gebe jetzt das unmittelbare Protokoll eines Satzes der Beobachtungen an, die angestellt sind, um $\frac{J_2}{i_2}$ für die beiden Werthe von w_0 zu ermitteln. Es bezieht sich derselbe auf den grösseren Werth von w_0.

66,6
67,5
110,5
15
30,4
15,8
29,6

Die Bedeutung dieser Zahlen ist die folgende: Es wurde die bewegliche Rolle in die Lage gebracht, dass sie mit der festen in einer Höhe sich befand; dann wurde die Kette in Wirksamkeit gesetzt. Hierdurch erhielt der Magnet eine neue Gleichgewichtslage, um welche er Schwingungen machte; er wurde so weit beruhigt, indem der Strom der Kette zu passenden Zeiten unterbrochen und wiederhergestellt wurde, bis der Vertikalfaden scheinbar nur von 66,6 bis 67,5 ging; als er von 67,5 kommend, in $\frac{66,6 + 67,5}{2}$ d. h. in 67,05 sich befand, wurde die bewegliche Drahtrolle schnell in die Höhe gezogen; der Faden des Fernrohrs ging bis 110,5. Darauf wurde der Strom der Kette unterbrochen, zu einem Zeitpunkte, der so gewählt war, dass die Schwingungen des Magnets gedämpft wurden, und 4 aufeinanderfolgende Elongationen beobachtet; es sind dieses die 4 letzten der angegebenen Zahlen. Nimmt man aus diesen die arithmetischen Mittel, und aus diesen wiederum die Mittel, so erhält man, wie bekannt, den Scalenpunkt, der dem magnetischen Meridiane entspricht; dieser ist bei der angeführten Beobachtungsreihe 22,9. Das Mittel aus den beiden ersten Zahlen, d. h. 67,05, giebt den Scalenpunkt, welcher der Gleichgewichtslage des Magnets unter dem Einflusse des galvanischen Stroms entspricht; die Differenz 67,05 — 22,9, d. h. 44,15, ist also der oben mit α bezeichnete Winkel. Wäre der inducirte Strom nicht entstanden, so hätte der Magnet statt der beobachteten Elongation 110,5 die Elongation 66,6 gehabt; die Differenz 110,5 — 66,6, d. h. 43,9, ist also unser $a' - a$.

Aus Wiederholungen desselben Versuches, theils bei unveränderter Anordnung, theils nachdem die Richtungen des inducirenden und des inducirten Stromes oder die Richtung

eines dieser beiden durch passend angebrachte Commutatoren umgekehrt worden waren, ergaben sich folgende Werthe für log Brig. $\frac{a' - a}{a}$:

9,9976. 9,9991. 9,9974. 0,0018. 0,0030. 0,0036. 9,99[illegible]
0,0019. 0,0036. 0,0038. 0,0043. 9,9964. 0,0001. 9,99[illegible]
0,0037. 0,0050. 0,0041. 0,0061. 0,0014. 9,9959. 0,00[illegible]

Ich wandte das Mittel aus allen diesen Zahlen an; dieses ist 0,0013.

Für den kleineren Werth von w_0 durfte $\frac{a' - a}{a}$ nur mit geringerer Genauigkeit bestimmt werden; für diesen fand ich aus 4 Beobachtungen für log Brig: $\frac{a' - a}{a}$ die Werthe:

1,235. 1,250. 1,211. 1,232.

Das Mittel hieraus ist: 1,232.

Aus diesen beiden Zahlen musste $\left(\frac{J_2}{i_2}\right)'$ und $\left(\frac{J_2}{i_2}\right)''$ berechnet werden. Die Schwingungsdauer des Magnets bei unverschlossenem Multiplicatordrahte, T, hatte sich gefunden:

$= 7'', 095$ mitt. Zeit

und Beobachtungen über die Abnahme der Schwingungen, die geschahen, während der Multiplicatordraht auf dieselbe Weise geschlossen war, wie bei den eben beschriebenen Versuchen, hatten das logarithmische Decrement, d. h. nach unserer Bezeichnung log Brig. e^{η} ergeben:

$= 0,0267.$

Hieraus folgte:

$$\lg e^{\eta \operatorname{arc\,cotg} \eta} = 0,0132$$

und

$$\left(\frac{J_2}{i_2}\right)' = 0,4283 \frac{1}{1}$$

$$\left(\frac{J_2}{i_2}\right)'' = 0,0252 \frac{1}{1}.$$

Die Potentiale P' und P'' habe ich unter der Voraussetzung berechnet, dass für die Windungen einer jeden der Drahtrollen Kreise substituirt werden könnten, die in gleichen als unendlich klein zu betrachtenden Zwischenräumen liegen. Durch diese Voraussetzung wurde das Potential je zweier

Drahtrollen ein 6faches Integral; zu integriren war nach den Peripherien, den Höhen und den Radien der beiden Rollen. Die 4 ersten Integrationen liessen sich analytisch mit Hülfe elliptischer Transcendenten ausführen, und die numerische Berechnung der Potentiale hätte keine Schwierigkeit gehabt, wenn nicht die Integrationen nach den Radien hinzugekommen wären; um diese auszuführen, musste ich zu mechanischen Quadraturen meine Zuflucht nehmen, und diese erforderten eine ziemlich mühsame Rechnung. Das Resultat war

$$P' = -2\,229\,000 \text{ Zoll}$$
$$P'' = -2\,519\,000 \text{ Zoll}$$

und hieraus ergab sich:

$$P = P' \frac{w_1''}{w_1' + w_1''} + P'' \frac{w_1'}{w_1' + w_1''} = -2\,383\,000 \text{ Z.}$$

Es wird hiernach, wenn man die Leitungsfähigkeit des Kupfers = 1 setzt:

$$\varepsilon = \frac{1}{192 \text{ Quadratzoll.}}$$

Dieses Resultat lässt sich auch folgendermassen aussprechen:

Es ist die Constante $\varepsilon = 1$, wenn man als Einheit der Geschwindigkeit die Geschwindigkeit von 1000 Fuss in der Sekunde, als Einheit des Widerstandes den Widerstand eines Kupferdrahtes von einer Quadratlinie Querschnitt und 0,434 Z. Länge annimmt.

Ueber die Bewegung der Elektricität in Drähten.[1])

Ich habe versucht eine allgemeine Theorie der Bewegung der Elektricität in einem unendlich dünnen Drahte aufzustellen, indem ich gewisse Thatsachen, welche bei constanten elektrischen Strömen und Strömen, deren Intensität sich nur langsam ändert, stattfinden, als allgemein geltend angenommen habe. Ich erlaube mir hier diese Theorie zu entwickeln, und ihre Anwendung auf einige einfache Fälle auseinander zu setzen.

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 100. 1857.

Ich denke mir einen homogenen und überall gleich dicken Draht von kreisförmigem Querschnitt; auf der Mittellinie dieses Drahtes nehme ich einen festen und einen veränderlichen Punkt an; das Stück der Mittellinie zwischen beiden nenne ich s; durch den veränderlichen Punkt lege ich einen Querschnitt und bezeichne die Polarcoordinaten eines Punktes dieses Querschnitts in Beziehung auf ein Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt ist, durch ϱ und ψ. Ich will die elektromotorische Kraft berechnen, welche die beiden Elektricitäten in der Nähe des durch s, ϱ und ψ bestimmten Punktes nach der Längsrichtung des Drahtes zu trennen strebt. Diese Kraft rührt her zum Theil von vorhandener freier Elektricität, zum Theil von der Induction, die in Folge der Aenderungen der Stromstärke in allen Theilen des Drahtes stattfindet. In Beziehung auf den ersten Theil kann man von dem Coulomb'schen elektrostatischen Gesetze Gebrauch machen. Es bezeichne V die Potentialfunction der freien Elektricität in Bezug auf den betrachteten Punkt, also die Summe der einzelnen freien Elektricitätsmengen, eine jede dividirt durch ihre Entfernung von dem Punkte. Die Elektricitätsmengen sollen hierbei nach mechanischem Maasse gemessen sein, d. h. Einheit der Elektricitätsmenge soll diejenige sein, die auf eine gleiche Menge in der Einheit der Entfernung wirkend, die Einheit der Kraft ausübt. Ueberhaupt sollen alle Grössen, die in der Betrachtung vorkommen werden, Stromstärken, Widerstände u. s. w. nach mechanischem Maasse gemessen gedacht werden in der Weise, wie es Weber mehrfach in seinen elektrodynamischen Massbestimmungen angegeben hat. Es ist dann $-\frac{\partial V}{\partial s}$ die Kraft, mit der die freie Elektricität die Einheit positiver Elektricität in dem betrachteten Punkte nach der Richtung zu bewegen sucht, in der s wächst. Eben so gross ist die Kraft, die auf die negative Elektricität in entgegengesetzter Richtung wirkt. Daher ist $-2\frac{\partial V}{\partial s}$ die auf die Einheit der Elektricitätsmenge bezogene, in dem betrachteten Punkte wirksame elektromotorische Kraft, die von der freien Elektricität herrührt.

Bei der Entwickelung des Werthes von V werde ich annehmen, dass keine andere freie Elektricität auf den Draht wirkt als diejenige, die in ihm selbst sich befindet. Die Menge freier Elektricität, die zur Zeit t in dem Elemente des Drahtes enthalten ist, das dem Elemente der Mittellinie ds entspricht, werde ich durch $e\,ds$ bezeichnen; es soll ds' ein zweites Element der Mittellinie sein, und $e'\,ds'$ die Elektricitätsmenge, die in dem diesem entsprechenden Drahtelemente verhanden ist. Ich denke mir ein Stück des Drahtes, dessen Mittelpunkt in ds liegt, und dessen Länge 2ε ist, wo ε eine Grösse bedeuten soll, die als unendlich klein gegen die Länge des ganzen Drahtes, aber zugleich als unendlich gross gegen den Radius seines Querschnittes betrachtet werden darf. Sobald das Drahtelement, in dem die Elektricitätsmenge $e'\,ds'$ sich befindet, ausserhalb dieses Stückes liegt, kann man bei der Berechnung von V seine Elektricität in der Linie ds' concentrirt und den Punkt, auf den sich V bezieht, in der Linie ds liegend denken; es ist deshalb der Theil von V, der von dem ganzen Drahte mit Ausschluss des gedachten Stückes herrührt,

$$=\int\frac{e'\,ds'}{r},$$

wo r die Entfernung der Elemente ds und ds' bedeutet, und wo die Integration über die ganze Mittellinie mit Ausschluss des Stückes von der Länge 2ε auszudehnen ist. Was den von dem abgesonderten Stücke herrührenden Theil von V anbetrifft, so kann man diesen nur berechnen, wenn man die Vertheilung der freien Elekricität innerhalb eines Querschnitts kennt. Ich werde annehmen, dass hier, wie bei einem constanten Strome und bei dem elektrischen Gleichgewicht, sich freie Elektricität nur an der Oberfläche befindet, und überdies, dass ihre Dichtigkeit in allen Punkten der Peripherie eines Querschnitts dieselbe ist. Bezeichnet α den Radius des Querschnitts, so ist hiernach die Dichtigkeit der freien Elektricität in irgend einem Punkte der Oberfläche des gedachten Drahtstückes $=\frac{e}{2\pi\alpha}$; es ist daher, da man dasselbe seiner unendlich kleinen Länge wegen als gerade annehmen darf, der von ihm herrührende Theil von V

$$= \frac{e}{2\pi} \int_{-s}^{+s} \int_{0}^{2\pi} \frac{dx' d\psi'}{\sqrt{x'^2 + \alpha^2 + \rho^2 - 2\alpha\rho\cos(\psi - \psi)}}.$$

Es ist hier x' für $s' - s$ geschrieben, und ψ' bedeutet den Winkel zwischen dem nach einem Elemente der Drahtoberfläche gezogenen Radius und der Linie, von welcher aus der Winkel ψ gezählt wird. Führt man die Integration nach x' aus, und benutzt, dass s gegen α und gegen ρ unendlich gross ist, so findet man diesen Ausdruck

$$= -\frac{e}{\pi} \int_{0}^{2\pi} d\psi' \left(\lg 2s - \lg \sqrt{\alpha^2 + \rho^2 - 2\alpha\rho\cos(\psi' - \psi)} \right)$$

d. h.

$$= 2e \left(\lg 2s - \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} d\psi' \lg \sqrt{\alpha^2 + \rho^2 - 2\alpha\rho\cos(\psi' - \psi)} \right).$$

Setzt man

$$\int_{0}^{2\pi} d\psi' \lg \sqrt{\alpha^2 + \rho^2 - 2\alpha\rho\cos(\psi' - \psi)} = U,$$

so muss die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} = 0$$

erfüllt werden, weil die mit $d\psi'$ unter dem Integralzeichen multiplicirte Grösse für jeden Werth von ψ' dieser Gleichung genügt; man sieht aber leicht, indem man als Veränderliche, nach der zu integriren ist, $\psi' - \psi$ an Stelle von ψ' einführt, dass U von ψ unabhängig ist; es muss also

$$\frac{d^2 U}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dU}{d\rho} = 0$$

sein; hieraus folgt aber

$$U = C_1 \lg \rho + C_2,$$

wo C_1 und C_2 zwei unbekannte Constanten bedeuten. Diese lassen sich leicht bestimmen, indem man ρ unendlich klein gegen α annimmt; die Ausführung der Integration in dem Ausdrucke von U giebt dann

$$U = 2\pi \lg \alpha,$$

woraus folgt, dass $C_1 = 0$ ist, und U für alle vorkommenden Werthe von ρ diesen constanten Werth hat. Es ist mithin der Theil von V, der von dem Drahtstücke $2s$ herrührt,

$$= 2e \lg \frac{2\varepsilon}{\alpha},$$

und also

$$V = 2e \lg \frac{2\varepsilon}{\alpha} + \int \frac{e' ds'}{r}, \tag{1}$$

wobei die Integration über den ganzen Draht mit Ausnahme des Stückes 2ε auszudehnen ist.

Es handelt sich nun darum, den Ausdruck zu bilden für die elektromotorische Kraft, die in dem betrachteten Punkte inducirt wird durch die Aenderungen der Stromintensität in allen Theilen des Drahtes.

Wenn in einem Leiterelemente, dessen Länge l' ist, die Stromintensität, die durch i' bezeichnet werden soll, sich ändert, so wird dadurch in einem zweiten Leiterelemente eine elektromotorische Kraft inducirt, die bezogen auf die Einheit der Elektricitätsmenge, nach Weber,[1])

$$= -\frac{8}{c^2} \frac{\partial i'}{\partial t} \frac{l'}{r} \cos\theta \cdot \cos\theta'$$

ist, wo θ und θ' die Winkel bezeichnen, die die beiden Elemente bilden mit der von dem ersten nach dem zweiten gezogenen Linie, r die Länge dieser Linie und c die constante Geschwindigkeit, mit der zwei Elektricitätstheile gegen einander bewegt werden müssen, damit sie keine Kraft auf einander ausüben.

Für alle Theile des Drahtes mit Ausnahme des schon vorher betrachteten Stückes von der Länge 2ε kann man die elektrischen Ströme in der Mittellinie concentrirt sich denken; der Theil der gesuchten inducirten elektromotorischen Kraft, der von dem Drahte mit Ausschluss des genannten Stückes herrührt, ist daher

$$-\frac{8}{c^2} \int \frac{\partial i'}{\partial t} \frac{ds'}{r} \cos\theta \cdot \cos\theta',$$

wo i' die Intensität des Stromes bedeutet, der durch den Querschnitt des Drahtes an dem Orte von ds' fliesst, θ und θ' die Winkel, die die Elemente ds und ds' mit der Linie bilden, die von diesem nach jenem gezogen ist, r die Länge dieser

[1]) Elektrodynamische Maassbestimmungen, 1846 S. 354 und 1857 S. 268.

Linie, und wo die Integration über den ganzen Draht mit Ausschluss des bezeichneten Stückes auszudehnen ist.

In diesem Stücke darf man die Ströme nicht mehr in einer Linie concentrirt sich denken, dafür darf man sie aber als gerade und parallel mit ds betrachten. Durch den Anfangspunkt von ds' denke man sich einen Querschnitt des Drahtes gelegt, und bezeichne durch ϱ', ψ' die Polarcoordinaten eines Punktes desselben in Beziehung auf ein Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt ist, und dessen Axe parallel der Linie ist, von der aus der Winkel ψ' gerechnet wird; bedeutet dann J' die Stromdichtigkeit in dem durch ϱ und ψ' bestimmten Punkte, so erhält man für den Theil der inducirten elektromotorischen Kraft, der von dem Drahtstücke $2s$ herrührt, den Ausdruck:

$$-\frac{8}{c^2}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_{-s}^{+s}\frac{\partial J'}{\partial t}\cdot\frac{\varrho' d\varrho' d\psi' x'^2 dx'}{\left(x'^2+\varrho^2+\varrho'^2-2\varrho\varrho'\cos(\psi'-\psi)\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Da man J' als unabhängig von x' ansehen kann, so lässt sich die Integration nach x' leicht ausführen; benutzt man, dass s unendlich gross ist gegen alle Werthe von ϱ und ϱ', so findet man dadurch:

$$-\frac{16}{c^2}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\partial J'}{\partial t}\varrho' d\varrho' d\psi'\left[\lg 2s-1-\lg\sqrt{\varrho^2+\varrho'^2-2\varrho\varrho'\cos(\psi-\psi'}\right].$$

Da aber

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}J'\varrho' d\varrho' d\psi' = i$$

ist, so ist dieser Ausdruck

$$= -\frac{16}{c^2}\left[(\lg 2s-1)\frac{\partial i}{\partial t}\right.$$
$$\left.-\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\partial J'}{\partial t}\varrho' d\varrho' d\psi'\lg\sqrt{\varrho^2+\varrho'^2-2\varrho\varrho'\cos(\psi'-\psi)}\right].$$

Es wird daher die ganze inducirte elektromotorische Kraft

$$= -\frac{8}{c^2}\frac{\partial W}{\partial t},$$

wenn man setzt:

$$W = \int i' \frac{ds'}{r} \cos\theta \cos\theta' + 2i(\lg 2s - 1)$$
$$- 2\int_0^{\alpha}\int_0^{2\pi} J' \varrho' d\varrho' d\psi' \lg \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos(\psi - \psi')}.$$

Bei einem stationären elektrischen Strome ist die Stromdichtigkeit gleich dem Producte aus der, auf die Einheit der Elektricitätsmenge bezogenen, elektromotorischen Kraft in die Leitungsfähigkeit; ich mache die Annahme, dass dasselbe auch stattfindet, wenn der Strom kein stationärer ist. Diese Annahme wird erfüllt sein, wenn die auf die Elektricitätstheilchen wirkenden Kräfte, welche den Widerstand ausmachen, so mächtig sind, dass die Zeit, während welcher ein Elektricitätstheilchen noch in Bewegung bleibt nach dem Aufhören von beschleunigenden Kräften in Folge der Trägheit, als unendlich klein angesehen werden darf selbst gegen die kleinen Zeiträume, welche bei einem nicht stationären elektrischen Strome in Betracht kommen. Nach dieser Annahme hat man, wenn k die Leitungsfähigkeit des Drahtes, J die Stromdichtigkeit in dem durch die Werthe von s, ϱ und ψ bestimmten Punkte zur Zeit t bedeutet, die Gleichung:

$$J = -2k\left(\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial W}{\partial t}\right).$$

Aus diesem Ausdruck der Stromdichtigkeit J leite ich einen Ausdruck für die Stromstärke i ab, indem ich jenen mit $\varrho d\varrho d\psi$ multiplicire und in Bezug auf ϱ von 0 bis α, in Bezug auf ψ von 0 bis 2π integrire; da V von ϱ und ψ unabhängig ist, so erhalte ich, wenn ich

$$w = \frac{1}{\pi\alpha^2}\int_0^{\alpha}\int_0^{2\pi} W\varrho\, d\varrho\, d\psi$$

setze:

$$i = -2\pi k\alpha^2\left(\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}\right). \tag{2}$$

Dabei wird:

$$w = \int i' \frac{ds'}{r} \cos\theta \cos\theta + 2i(\lg 2s - 1)$$
$$- \frac{1}{\pi\alpha^2}\int_0^{\alpha}\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_0^{2\pi} J' \varrho' d\varrho' d\psi' \varrho d\varrho d\psi \lg \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos(\psi' - \psi)}.$$

Das Integral:

$$\int_0^{2\pi} d\psi \lg \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos(\psi - \varphi)}$$

ist von derselben Form wie das oben betrachtete und mit l' bezeichnete: aus den dort angeführten Schlüssen folgt, dass dasselbe $= 2\pi \lg \varrho'$ ist, wenn $\varrho' > \varrho$, und $= 2\pi \lg \varrho$, wenn $\varrho <$ Mit $\varrho d\varrho$ multiplicirt und von 0 bis α integrirt giebt dann dieser Ausdruck:

$$\pi\alpha^2\left(\lg\alpha - \frac{\alpha^2 - \varrho'^2}{2\alpha^2}\right).$$

Das dritte Glied in dem Ausdruck von w wird also =

$$\int_0^{\alpha}\int_0^{2\pi} J'\varrho' d\varrho' d\psi' = i$$

gesetzt werden darf:

$$= -2i\lg\alpha + \int_0^{\alpha}\int_0^{2\pi} \frac{\alpha^2 - \varrho'^2}{\alpha^2} J'\varrho' d\varrho' d\psi';$$

es ergiebt sich also:

$$w = \int i' \frac{ds'}{r} \cos\theta\cos\theta' + 2i\left(\lg\frac{2s}{\alpha} - 1\right) + \int_0^{\alpha}\int_0^{2\pi} \frac{\alpha^2 - \varrho'^2}{\alpha^2} J'\varrho' d\varrho' d\psi.$$

Das übrig gebliebene Doppelintegral kann nicht auf eine einfache Form zurückgeführt werden, da J' eine unbekannte Funktion von ϱ ist; sein Werth aber kann vernachlässigt werden gegen das Glied $2i\left(\lg\frac{2s}{\alpha} - 1\right)$, und für dieses darf man $\sim 2i\lg\frac{2s}{\alpha}$, wenn nur die Dicke des Drahtes klein genug gegen die Dimensionen der Figur, welche seine Mittellinie bildet; denn man wird dann s so wählen können, dass $\frac{s}{\alpha}$ eine unendlich grosse Zahl, und s doch noch unendlich klein gegen die Dimensionen der genannten Figur ist. Unter dieser Voraussetzung wird also:

$$(3) \qquad w = 2i\lg\frac{2s}{\alpha} + \int i' \frac{ds'}{r} \cos\theta\cos\theta',$$

wo die Integration über den ganzen Draht mit Ausschluss des Stückes von der Länge 2ε auszudehnen ist.

Zu den Gleichungen (1), (2) und (3) zwischen den 4 Grössen i, e, V, w lässt sich noch eine vierte hinzufügen.

Durch den Anfangspunkt und den Endpunkt von ds denke man sich zwei Querschnitte gelegt; in den ersten tritt in der Zeit ds in das von beiden begrenzte Drahtelement die Menge positiver Elektricität idt, durch den zweiten tritt in derselben Zeit aus dem Drahtelemente die Menge positiver Elektricität $\left(i + \frac{\partial i}{\partial s} ds\right) dt$; das Drahtelement verliert also in der Zeit dt an positiver Elektricität $\frac{\partial i}{\partial s} ds\, dt$; die negative Elektricität strömt in gleichen Mengen durch beide Querschnitte in entgegengesetzter Richtung; das Drahtelement gewinnt also in der Zeit dt an negativer Elektricität so viel, als es an positiver verliert; seine freie Elektricität, d. h. der Unterschied seiner positiven und seiner negativen, verringert sich also in dem Zeitelemente um $2\frac{\partial i}{\partial s} ds dt$; diese freie Elektricität ist aber eds, und daher ist [1])

$$2\frac{\partial i}{\partial s} = -\frac{\partial e}{\partial t}. \tag{4}$$

Die in den vier, mit Zahlen bezeichneten Gleichungen enthaltene Theorie will ich jetzt weiter entwickeln unter der Voraussetzung, dass die Gestalt der Mittellinie des Drahtes der Art ist, dass nie die Entfernung zweier Punkte derselben, zwischen denen ein endliches Stück des Drahtes liegt, unendlich klein ist. Es wird durch diese Voraussetzung der Fall ausgeschlossen, dass Inductionsrollen sich in der Leitung be-

[1]) Der Ableitung dieser Gleichung liegt die Vorstellung zu Grunde, dass auch bei dem nicht stationären Strome durch jeden Querschnitt des Leiters gleichzeitig gleiche Mengen der beiden Elektricitäten in entgegengesetzter Richtung sich bewegen. Wollte man diese Vorstellung nicht festhalten, so würde aber die Gleichung doch noch gelten; man müsste dann nur die Stromintensität definiren als das arithmetische Mittel aus den Mengen beider Elektricitäten, welche in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Leiters in entgegengesetzter Richtung gehen.

finden. Durch dieselbe vereinfachen sich wesentlich die Gleichungen (1) und (3).

Bezeichnet A den Ort des Elementes ds und bezeichnen B und C zwei Punkte, die auf den beiden Seiten in endlicher Entfernung von A auf dem Drathe liegen, so ist das Integral

$$\int \frac{e' ds'}{r},$$

ausgedehnt über den ganzen Draht mit Ausschluss des Stückes BAC, eine endliche Grösse, also unendlich klein gegen $2e \lg \frac{2s}{\alpha}$; es darf deshalb in der Gleichung (1) dieses Integral nur ausgedehnt werden über das Stück BAC mit Ausschluss des Theiles 2ε. Bezeichnet man daher durch σ den Bogen zwischen A und einem variablen Punkte des Drahtes, so darf das genannte Integral gesetzt werden:

$$= \int_{\varepsilon}^{AB} \frac{e' d\sigma}{r} + \int_{\varepsilon}^{AC} \frac{e' d\sigma}{r}.$$

Die Grösse $\frac{e'}{r}$ ist eine Funktion von σ, die sich dem Werthe $\frac{e}{\sigma}$ nähert, wenn σ sich der 0 nähert; die Integrale

$$\int_{\varepsilon}^{AB} \left(\frac{e'}{r} - \frac{e}{\sigma}\right) d\sigma \text{ und } \int_{\varepsilon}^{AC} \left(\frac{e'}{r} - \frac{e}{\sigma}\right) d\sigma$$

haben daher endliche Werthe, denn die zu integrirende Funktion wird nie unendlich gross; man darf deshalb für das in der Gleichung (1) vorkommende Integral auch setzen:

$$\int_{\varepsilon}^{AB} \frac{e\, d\sigma}{\sigma} + \int_{\varepsilon}^{AC} \frac{e\, d\sigma}{\sigma}$$

$$\text{d. h. } e \lg \frac{AB}{\varepsilon} + e \lg \frac{AC}{\varepsilon}.$$

Die Wahl der Längen AB und AC ist willkürlich, nur müssen dieselben endlich sein gegen die Länge des Drahtes: man wird für beide die Hälfte dieser Länge setzen dürfen; bezeichnet man die ganze Länge durch l, so wird also die Gleichung (1):

$$V = 2e \lg \frac{2s}{a} + 2e \lg \frac{l}{2s},$$

d. h.

$$V = 2e \lg \frac{l}{a}.$$

Durch Betrachtungen ganz derselben Art sieht man ein, dass die Gleichung (3) eine ähnliche Form erhält; sie wird:

$$w = 2i \lg \frac{l}{a}.$$

Diese Werthe von V und w sind in Gleichung (2) zu substituiren; thut man dieses, setzt der Kürze wegen

$$\lg \frac{l}{a} = \gamma$$

und bezeichnet den Widerstand des ganzen Drahtes, d. h. die Grösse

$$\frac{l}{k \pi a^2}$$

durch r, so erhält man:

$$i = -4\gamma \frac{l}{r} \left(\frac{\partial e}{\partial s} + \frac{4}{c^2} \frac{\partial i}{\partial t} \right).$$

Aus dieser Gleichung, in Verbindung mit der Gleichung (4) nämlich

$$2 \frac{\partial i}{\partial s} = -\frac{\partial e}{\partial t},$$

sind i und e als Funktionen von s und t zu bestimmen.

Eine partikuläre Lösung dieser Differentialgleichungen findet man, indem man

$$e = X \sin ns$$
$$i = Y \cos ns$$

setzt, wo n eine willkürliche Constante bezeichnet, und X und Y unbekannte Funktionen von t bedeuten. Die Gleichungen werden hierdurch:

$$Y = -4\gamma \frac{l}{r} \left(nX + \frac{4}{c^2} \frac{dY}{dt} \right)$$
$$2nY = \frac{dX}{dt}.$$

Durch Elimination von Y ergiebt sich hieraus:

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{c^2 r}{16\gamma l} \frac{dX}{dt} + \frac{c^2 n^2}{2} X = 0.$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ist:

$$X = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t},$$

wo C_1 und C_2 zwei willkürliche Constanten bedeuten, e die Basis der natürlichen Logarithmen ist, und λ_1 und λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind:

$$\lambda^2 - \frac{c^2 r}{16\gamma l}\lambda + \frac{c^2 n^2}{2} = 0.$$

Die Werthe von λ_1 und λ_2 sind demzufolge:

$$\frac{c^2 r}{32\gamma l}\left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{32\gamma}{cr\sqrt{2}} nl\right)^2}\right].$$

Um ein Urtheil darüber zu gewinnen, ob diese Wurzeln reell oder imaginär sind, soll ein specieller Fall betrachtet werden. Es sei der Draht der Jacobi'sche Widerstandsetalon, dessen Widerstand Weber gemessen hat. Dieser Draht ist ein Kupferdraht von $7^m,620$ Länge und $0^{mm},333$ Radius. Der Werth von γ ist hiernach sehr nahe $= 10$. Den Widerstand desselben nach elektromagnetischem Maasse hat Weber[1])

$$= 598 . 10^7$$

gefunden bei Zugrundelegung von Millimeter und Sekunde als Einheiten der Länge und der Zeit. Um den Widerstand nach mechanischem Maasse, also den Werth von r, zu finden, hat man diesen Werth mit $\frac{8}{c^2}$ zu multipliciren. Da nun, bei Benutzung derselben Einheiten[2]),

$$c = 4{,}39 . 10^{11}$$

ist, so ergiebt sich

$$r = 2{,}482 . 10^{-13}.$$

Es folgt hieraus

$$\frac{32\gamma}{rc\sqrt{2}} = 2070.$$

Die Grösse n, welche noch unbestimmt gelassen ist, soll später so gewählt werden, dass nl ein Vielfaches von π ist. Es wird dann das negative Glied unter dem Wurzelzeichen in den Ausdrücken von λ_1 und λ_2 so gross sein gegen 1, dass es als unendlich gross wird betrachtet werden dürfen. Dieser Umstand bringt eine bedeutende Vereinfachung der Aufgabe hervor. Es soll im Folgenden nur der Fall untersucht werden, dass derselbe Umstand stattfindet, d. h. dass

---

[1]) Elektrodynamische Maassbestimmungen 1850, S. 252.

[2]) Elektrodynamische Maassbestimmungen (Weber und Kohlrausch) 1856, S. 264.

$$\frac{32\gamma}{rc\sqrt{2}}$$

als unendlich gross gegen 1 angesehen werden kann; es wird diese Voraussetzung um so näher erfüllt sein, je kleiner der Widerstand des Drahtes bei gleichbleibendem Verhältniss zwischen Länge und Radius ist; es wird aber dieser Widerstand noch beträchtlich grösser als der des Jacobi'schen Drahtes sein dürfen, ohne dass die Resultate, zu denen wir gelangen werden, aufhören Gültigkeit zu besitzen.

Unter den gemachten Voraussetzungen werden die Werthe von λ_1 und λ_2

$$h \pm \frac{cn}{\sqrt{2}}\sqrt{-1},$$

wo der Kürze wegen

$$\frac{c^2 r}{32\gamma l} = h$$

gesetzt ist. Durch Einführung neuer Constanten an Stelle von C_1 und C_2 kann man dann den Ausdruck von X auf die Form bringen:

$$X = e^{-ht}\left(A\cos\frac{cnt}{\sqrt{2}} + B\sin\frac{cnt}{\sqrt{2}}\right).$$

Dabei ergiebt sich

$$Y = -\frac{e^{-ht}}{2}\left\{\left(\frac{h}{n}A - \frac{c}{\sqrt{2}}B\right)\cos\frac{cnt}{\sqrt{2}} + \left(\frac{c}{\sqrt{2}}A + \frac{h}{n}B\right)\sin\frac{cnt}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Ich werde voraussetzen, dass für $t = 0$, $i = 0$, also auch $Y = 0$ ist; diese Bedingung giebt:

$$B = -\frac{A}{\frac{nc}{h\sqrt{2}}};$$

die Grösse n soll, wie oben schon bemerkt wurde, einem Vielfachen von $\frac{\pi}{l}$ gleichgesetzt werden; es wird deshalb der Nenner des Ausdrucks von B gleich einem Vielfachen von

$$\pi\frac{c}{hl\sqrt{2}}$$

sein; die hier mit π multiplicirte Grösse ist aber

$$= \frac{32\gamma}{rc\sqrt{2}}$$

d. h. gerade die, von der vorausgesetzt wurde, dass sie unendlich gross wäre; es wird deshalb B unendlich klein gegen A sein, und man wird setzen können:

$$X = A \cdot e^{-ht} \cdot \cos \frac{cnt}{\sqrt{2}}$$

$$Y = -\frac{c}{2\sqrt{2}} A e^{-ht} \sin \frac{cnt}{\sqrt{2}}.$$

Multiplicirt man diese Ausdrücke resp. mit $\sin ns$ und $\cos ns$ und setzt die Produkte den Grössen e und i gleich, so erhält man eine partikuläre Lösung der für e und i geltenden Differentialgleichungen. Diese Lösung lässt sich dadurch verallgemeinern, dass man in ihr zu s eine willkürliche Constante addirt; dadurch erhält man:

$$e = e^{-ht} \cos \frac{cnt}{\sqrt{2}} (A \sin ns + A' \cos ns)$$

$$i = -\frac{c}{2\sqrt{2}} e^{-ht} \sin \frac{cnt}{\sqrt{2}} (A \cos ns - A' \sin ns).$$

Eine partikuläre Lösung von anderer Form, die ebenfalls der Bedingung genügt, dass i für $t = 0$ verschwindet, ist:

$$e = a + bs$$

$$i = -\frac{c^2}{8h} b (1 - e^{-2ht}),$$

wo a und b zwei willkürliche Constanten bezeichnen. Dass den beiden Differentialgleichungen hierdurch genügt wird, davon überzeugt man sich leicht, wenn man benutzt, dass die eine durch die Einführung der Grösse h die Gestalt erhält:

$$2hi = -\left(\frac{c^2}{4} \frac{\partial e}{\partial s} + \frac{\partial i}{\partial t}\right).$$

Man erhält eine Lösung, die man den anderweitigen Bedingungen der Aufgabe anpassen kann, wenn man e und i gleich Summen von partikulären Lösungen der angegebenen Formen setzt.

Es soll nun der Fall näher betrachtet werden, dass der Draht ein in sich zurückkehrender ist. In diesem Falle müssen e und i gleiche Werthe erhalten für $s = 0$ und für $s = l$, und zwar muss dieses stattfinden, welches auch der Anfangspunkt von s sein möge; das erfordert, dass e und i Funktionen von s sind, die periodisch sind um l; hierzu ist nöthig, dass

$$b = 0 \text{ und } n = m\frac{2\pi}{l}$$

ist, wo m eine ganze Zahl bedeutet. Man hat daher für e und i die folgenden Ausdrücke:

$$e = e^{-kt}\sum_1^\infty{}_m A_m \cos m\frac{2\pi}{l}\frac{c}{\sqrt{2}}t.\sin m\frac{2\pi}{l}s$$
$$+ a + e^{-kt}\sum_1^\infty{}_m A'_m \cos m\frac{2\pi}{l}\frac{c}{\sqrt{2}}t.\cos m\frac{2\pi}{l}s$$
$$i = -\frac{c}{2\sqrt{2}}e^{-kt}\sum_1^\infty{}_m A_m \sin m\frac{2\pi}{l}\frac{c}{\sqrt{2}}t.\cos m\frac{2\pi}{l}s$$
$$+ \frac{c}{2\sqrt{2}}e^{-kt}\sum_1^\infty{}_m A'_m \sin m\frac{2\pi}{l}\frac{c}{\sqrt{2}}t.\sin m\frac{2\pi}{l}s$$

Die Constanten a, A, A' lassen sich nach dem Fourier'schen Satze bestimmen, wenn e für $t = 0$ als Funktion von s gegeben ist. Die Lösung lässt sich aber noch auf eine andere Form bringen, welche deutlicher das Charakteristische derselben zeigt.

Es sei für $t = 0$

$$e = f(s);$$

die Ausdrücke unter den Summenzeichen in e und i forme man um nach den Gleichungen

$$\cos x \sin y = \tfrac{1}{2}\sin(y + x) + \tfrac{1}{2}\sin(y - x)$$
$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}\cos(y + x) + \tfrac{1}{2}\cos(y - x)$$
$$\sin x \sin y = -\tfrac{1}{2}\cos(y + x) + \tfrac{1}{2}\cos(y - x);$$

wenn man dann erwägt, dass die Funktion f nothwendig um l periodisch ist, so sieht man ein, dass die Ausdrücke von e und i folgendermassen sich schreiben lassen:

$$e = a + \tfrac{1}{2}e^{-kt}\left[f\left(s + \frac{c}{\sqrt{2}}t\right) + f\left(s - \frac{c}{\sqrt{2}}\right) - 2a\right]$$
$$i = -\frac{c}{4\sqrt{2}}e^{-kt}\left[f\left(s + \frac{c}{\sqrt{2}}\right) - f\left(s - \frac{c}{\sqrt{2}}\right)\right].$$

Die Grösse a ist dabei bestimmt durch die Gleichung:

$$a = \frac{1}{l}\int_0^l f(s)\,ds;$$

d. h. la ist die Menge freier Elektricität, die der ganze Draht enthält.

Der Ausdruck von e zeigt eine sehr merkwürdige Analogie zwischen der Fortpflanzung der Elektricität in dem Drahte und der Fortpflanzung einer Welle in einer gespannten Seite oder einem longitudinal schwingenden elastischen Stabe. Wenn $a = 0$, d. h. die Gesammtmenge der freien Elektricität gleich 0 ist, so zerfällt, wie ich mich ausdrücken will, die Elektricität in zwei Wellen von gleicher Stärke, die in entgegengesetzten Richtungen mit der Geschwindigkeit $\frac{c}{\sqrt{2}}$ durch den Draht laufen. Dabei nimmt die Dichtigkeit der Elektricität überall proportional mit e^{-ht} ab. Diese Abnahme ist aber im Vergleich mit der Geschwindigkeit der Wellen eine sehr langsame. Die Zeit nämlich, welche eine jede von beiden Wellen zu einem Umlaufe gebraucht, ist $= \frac{l\sqrt{2}}{c}$, und daher das Verhältniss der Dichtigkeiten der Elektricität an einem Pnnkte vor und nach einem Umlaufe das von

$$1 : e - \frac{hl\sqrt{2}}{c};$$

dieses Verhältniss ist aber unendlich wenig von 1 verschieden, da der Exponent von e der gemachten Voraussetzung gemäss unendlich klein ist. Im Vergleich mit Geschwindigkeiten, welche unserer Anschauung zugänglich sind, wird freilich die Abnahme der elektrischen Dichtigkeit immer eine sehr schnelle sein. Wäre der Draht der Jacobi'sche Widerstands-Etalon, so wäre $\frac{1}{h}$ sehr nahe gleich dem 2000sten Theile einer Sekunde: es würde mithin in diesem kurzen Zeitraume die elektrische Dichtigkeit in dem Verhältniss von e:1, d. h. von 2,7:1 abnehmen.

Wenn a nicht gleich 0 ist, oder die mittlere Dichtigkeit der Elektricität nicht gleich 0 ist, so ändert sich, wie der Ausdruck von e zeigt, der Ueberschuss der Dichtigkeit über die mittlere Dichtigkeit gerade so, als ob die letztere gleich 0 wäre.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer elektrischen Welle hat sich hier $= \frac{c}{\sqrt{2}}$ ergeben, also als unabhängig sowohl von dem Querschnitt, als von der Leitungsfähigkeit des Drahtes,

als endlich von der Dichtigkeit der Elektricität; ihr Werth ist der von 41950 Meilen in einer Sekunde, also sehr nahe gleich der Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume.

Wenn der Draht nicht ein in sich zurückkehrender ist, so darf die Grösse b nicht gleich 0 sein, und die Grössen n können andere Werthe als in dem betrachteten Falle haben; dafür sind für die Enden des Drahtes gewisse Gleichungen zu erfüllen, je nach den Bedingungen, denen die Enden unterworfen sind. Ist ein Ende isolirt, so muss an diesem immer $i = 0$ sein; ist dasselbe mit der Erde in vollkommne Verbindung gesetzt, so muss hier das Potential V, also auch e für alle Werthe von t verschwinden. Es hat keine Schwierigkeit, die Ausdrücke für e und i zu bilden für die Fälle, dass beide Enden isolirt, beide mit der Erde verbunden sind, oder das eine isolirt, das andere mit der Erde in Verbindung gesetzt ist. Es zeigt sich dabei, dass an einem Ende immer eine Reflexion der Welle, die es trifft, stattfindet; ist das Ende zur Erde abgeleitet, so ist mit der Reflexion eine Umkehrung der Welle verbunden, d. h. es geht negative Elektricität von demselben aus, wenn es von positiver getroffen wurde; an einem isolirten Ende findet die Reflexion ohne Umkehrung statt. Es entspricht also in gewisser Hinsicht das abgeleitete Ende dem festen Ende eines longitudinal schwingenden Stabes, das insolirte dem freien Ende des Stabes.

Es soll näher ein anderer hierher gehöriger Fall betrachtet werden. Es soll nämlich untersucht werden, wie sich die Elektricität in dem Schliessungsdrahte einer galvanischen Kette bewegt, bevor der Strom ein stationärer geworden ist. Ich werde dabei voraussetzen, dass der Widerstand der Kette unendlich klein gegen den des Schliessungsdrahtes, und dass der eine Pol derselben vollkommen zur Erde abgeleitet ist. Mit diesem soll der Anfang des Drahtes verbunden sein, mit dem andern das Ende desselben zur Zeit $t = 0$ in Verbindung gesetzt werden. Man wird dann annehmen dürfen, dass im Anfange des Drahtes, oder für $s = 0$, das Potential immer gleich 0 ist, und im Ende, oder für $s = l$, immer einen constanten, von der elektromotorischen Kraft der Kette abhängigen Werth hat. Dieser Werth muss, wenn K die elektromotorische

Kraft bedeutet, $\frac{1}{4}K$ sein. Die Bedingungen, denen die Ausdrücke von e und i genügen müssen, sind daher die folgenden:

Es muss für

$$s = 0 \qquad e = 0$$
$$s = l \qquad e = \frac{1}{4\gamma} K$$
$$t = 0 \qquad e = 0$$

sein.

Der ersten Bedingung wegen müssen die Grössen $A = 0$ sein, und es muss auch $a = 0$ sein. Da e für $s = l$ unabhängig von t sein soll, so müssen die Grössen n der Bedingung genügen.

$$\sin nl = 0,$$

d. h. es muss

$$n = m\frac{\pi}{l}$$

sein, wo m eine ganze Zahl bedeutet. Damit überdiess e für $s = l$ den angegebenen Werth annehme, muss

$$b = \frac{1}{4\gamma l} K$$

gemacht werden.

Setzt man der Kürze wegen

$$\frac{\pi}{l}\frac{c}{\sqrt{2}}\, t = \tau$$

und

$$\frac{\pi}{l}\, s = \varphi,$$

so hat man hiernach für e die Gleichung:

$$e = \frac{K}{4\gamma l}\, s + e^{-bt} \sum_{1}^{\infty} A_m \cos m\tau \sin m\varphi.$$

Die Constanten A bestimmen sich durch die letzte Bedingung; nach dieser muss für alle Werthe von φ zwischen 0 und π

$$\frac{K}{4\gamma\pi}\varphi = -\sum_{1}^{\infty} A_m \sin m\varphi$$

sein; aber nach dem Fourier'schen Satze gilt zwischen denselben Grenzen die Gleichung:

$$\varphi = -2\sum_1^\infty{}^m (-1)^m \frac{1}{m} \sin m\varphi;$$

man hat daher zu setzen:

$$A_m = (-1)^m \frac{K}{4\gamma\pi} \frac{1}{m}.$$

Man erhält dadurch:

$$e = \frac{K}{4\gamma}\left\{\frac{s}{l} + \frac{2}{\pi} e^{-ht} \sum_1^\infty{}^m \frac{(-1)^m}{m} \cos m\tau \sin m\varphi\right\}.$$

Bildet man den entsprechenden Ausdruck von i und erinnert sich dabei an die Gleichung, durch welche h definirt worden ist, so findet man:

$$i = -\frac{K}{r}(1 - e^{-2ht}) - \frac{cK}{4\sqrt{2}\,\gamma\pi} e^{-ht} \sum_1^\infty{}^m \frac{(-1)^m}{m} \sin m\tau \cos m\varphi.$$

Es soll nun die Bedeutung dieser Ausdrücke entwickelt werden; zunächst die des Ausdruckes von i. Es kommt dabei vornehmlich darauf an, den Werth der in demselben vorkommenden Summe zu finden. In derselben soll φ als eine Constante angesehen, und sie als eine Funktion von τ betrachtet werden. Diese Funktion ist periodisch um 2π; sie hat ferner entgegengesetzte Werthe für τ und $2\pi - \tau$; es genügt also die Werthe zu ermitteln, die sie durchläuft, wenn τ zwischen 0 und π liegt. Es ist

$$\sum_1^\infty{}^m \frac{(-1)^m}{m} \sin m\tau \cos m\varphi = \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty{}^m \frac{(-1)^m}{m} \sin m(\tau + \varphi)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty{}^m \frac{(-1)^m}{m} \sin m(\tau - \varphi).$$

Es ist aber die Summe:

$$\sum_1^\infty{}^m \frac{(-1)^m}{m} \sin mx,$$

wenn x zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, $= -\frac{x}{2}$, und, weil sie periodisch um 2π ist, daher allgemein

$$= -\tfrac{1}{2}(x - 2p\pi),$$

wo p diejenige ganze Zahl bedeutet, für welche $x - 2p\pi$ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt. Bei den Gränzen, welche für τ angenommen sind, liegt $\tau - \varphi$ immer zwischen $-\pi$ und $+\pi$,

da φ für alle Punkte des Drahtes einen Werth zwischen 0 und π hat. Es ist deshalb:

$$\sum \frac{(-1)^m}{m} \cdot \sin m(\tau - \varphi) = -\frac{\tau - \varphi}{2}.$$

Was den Werth von $\tau + \varphi$ anbetrifft, so kann dieser kleiner oder grösser als π sein. Es wird

$$\sum \frac{(-1)^m}{m} \sin m(\tau + \varphi) = -\frac{\tau + \varphi}{2}, \qquad \text{wenn } \varphi < \pi - \tau$$

$$= -\frac{\tau + \varphi}{2} + \pi \qquad \text{„ } \varphi > \pi - \tau$$

Es folgt daraus:

$$\sum \frac{(-1)^m}{m} \cos m\tau \cos m\varphi = -\frac{\tau}{2}, \qquad \text{wenn } \varphi < \pi - \tau$$

$$= -\frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{2} \qquad \text{„ } \varphi > \pi - \tau.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass τ zwischen 0 und π liegt. Ist es zwischen π und 2π, so ergiebt sich dieselbe Summe

$$= \pi - \frac{\tau}{2}, \text{ wenn } \varphi < \tau - \pi$$

und

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\tau}{2}, \text{ „ } \varphi > \tau - \pi.$$

Um für grössere Werthe von τ die Summe zu finden, hat man sich daran zu erinnern, dass dieselbe periodisch um 2π ist.

Es geht hieraus hervor, dass es in jedem Augenblicke an dem Drahte einen Punkt giebt, in welchem die Stromintensität einen Sprung erleidet. Dieser Punkt liegt zur Zeit $t = 0$ am Ende des Drahtes, schreitet von hier mit der Geschwindigkeit $\frac{c}{\sqrt{2}}$ gegen den Anfang vor, geht, sobald er diesen erreicht hat, mit derselben Geschwindigkeit gegen das Ende hin, kehrt hier wieder um und durchläuft so fortwährend die Länge des Drahtes mit derselben Geschwindigkeit hin- und hergehend. In jedem von den beiden Theilen, in welche der Draht in einem Augenblicke durch diesen Punkt getheilt wird, findet dabei in diesem Augenblicke überall dieselbe Stromintensität statt, so dass, wenn s und i zu rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes gemacht werden, eine Linie entsteht, die

der Form der Fig. 8 gezeichneten. Die Stromintensität ist vor dem Punkte, in dem der Sprung stattfindet,

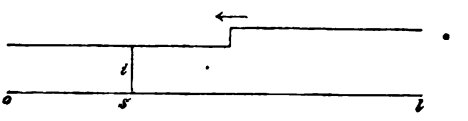


Fig. 8.

abgesehen vom Vorzeichen, immer die kleinere, hinter ihm die grössere, die Worte vor und hinter dabei im Sinne der Bewegung des Punktes gebraucht; die Fig. 8 gilt daher nur für einen Augenblick, in dem dieser Punkt vom Ende des Drahtes nach dem Anfange läuft; auf einen Augenblick, in dem das Entgegengesetzte stattfindet, bezieht sich Fig. 9. Die Grösse des Sprunges ist

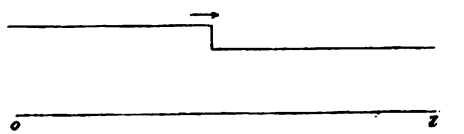


Fig. 9.

$$= \frac{cK}{8\sqrt{2\gamma}} e^{-ht}$$

oder wenn man durch J den Werth bezeichnet, dem i bei wachsender Zeit sich mehr und mehr nähert, d. h. den Werth von $\frac{K}{r}$,

$$= J \cdot \frac{cr}{8\sqrt{2\gamma}} e^{-ht}.$$

Diese Grösse hat ihren grössten Werth für $t = 0$; aber auch dieser ist in Folge einer Voraussetzung, die gemacht ist, unendlich klein gegen J. Etwas kürzer lässt sich der Ausdruck für die Grösse des Sprunges schreiben, wenn man die Zeit einführt, die der Punkt, an dem er stattfindet, oder eine elektrische Welle gebraucht, um sich durch die Länge des Drahtes fortzupflanzen. Bezeichnet man diese Zeit durch T, d. h. setzt man

$$T = \frac{l\sqrt{2}}{c},$$

so findet man leicht, dass jener Ausdruck

$$= J \cdot 2hT e^{-ht}$$

ist. Bei wachsender Zeit nimmt die Grösse des Sprunges ab, aber so langsam, dass während der Zeit T nur eine unendlich kleine Abnahme stattfindet.

Um den Vorgang vollständig zu übersehen, ist es jetzt nur noch nöthig, die Aenderungen der Stromstärke am Anfange des Drahtes zu untersuchen. Es sei diese, also der Werth von i für $s = 0$, i_0; dann findet man bei Benutzung der neu eingeführten Zeichen J und T:

$$i_0 = J(1 - e^{-2ht}) + \frac{J4hT}{\pi} e^{-ht} \sum_1^\infty m \frac{(-1)^m}{m} \sin m\tau.$$

Setzt man für die Summe ihren Werth, und bedenkt, dass

$$\frac{\tau}{\pi} = \frac{t}{T}$$

ist, so ergiebt sich:

$$i_0 = J(1 - e^{-2ht}) + J2he^{-ht}(2pT - t),$$

wo p diejenige ganze Zahl bedeutet, für welche

$$\frac{t - 2pT}{T}$$

ein ächter, positiver oder negativer Bruch ist. Es lässt sich p auch definiren als die grösste ganze Zahl, die in dem Bruche

$$\frac{t + T}{2T}$$

enthalten ist.

Für Werthe von t, für welche die Zahl p keine sehr grosse ist, lässt der Ausdruck von i_0 noch eine wesentliche Vereinfachung zu. Es ist nämlich für solche die Grösse ht unendlich klein, und man kann bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung die Gleichung für i_0 schreiben:

$$i_0 = J.\, 2ht + J2h\,(2pT - t)$$

d. h.

$$i_0 = pJ4hT.$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass die Stromintensität am Anfange des Drahtes 0 ist bis zur Zeit $t = T$; hier und in den Zeitpunkten $t = 3T$, $t = 5T$ u. s. f. ändert sich dieselbe sprungweise, und zwar ist der Sprung doppelt so gross, als in andern Punkten des Drathes. In den Zwischenzeiten ist sie constant.

In ähnlicher Weise lässt sich der Ausdruck von e discutiren. Es ist

$$\sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m}{m} \cos m\tau \sin m\varphi = \tfrac{1}{2} \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m}{m} \sin m(\tau+\varphi)$$
$$- \tfrac{1}{2} \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m}{m} \sin m(\tau-\varphi)$$

oder, sobald τ zwischen 0 und π liegt:

$$= -\frac{\varphi}{2}, \qquad \text{wenn } \varphi < \pi - \tau$$
$$= -\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}, \quad \text{wenn } \varphi > \pi - \tau;$$

liegt τ zwischen π und 2π, so ist dieselbe Summe:

$$= -\frac{\varphi}{2}, \qquad \text{wenn } \varphi < \tau - \pi$$
$$= -\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}, \quad \text{wenn } \varphi > \tau - \pi.$$

Die zweite Thatsache folgt aus der ersten, wenn man erwägt, dass die Summe gleiche Werthe hat für τ und $2\pi - \tau$. Man findet für grössere Werthe von τ den Werth der Summe, wenn man bedenkt, dass sie um 2π periodisch ist.

Es ergiebt sich hieraus, dass in jedem Augenblicke an einem Punkte des Drahtes auch e einen Sprung erleidet; dieser Punkt fällt immer mit demjenigen zusammen, in welchem der Sprung von i stattfindet. Grösser ist e immer auf der Seite dieses Punktes, auf der das Ende des Drahtes liegt, kleiner auf der Seite des Anfangs. Die Grösse des Sprunges ist

$$= \frac{K}{4\gamma} e^{-\lambda t},$$

oder, wenn man durch E den constanten Werth von e am Ende des Drahtes bezeichnet:

$$= E e^{-\lambda t}.$$

Auf der Seite des Punktes, in dem der Sprung stattfindet, auf welcher der Anfang des Drahtes liegt, ist

$$e = E \cdot \frac{s}{l} (1 - e^{-\lambda t}),$$

und auf der Seite des Endes

$$e = E \left\{ \frac{s}{l} (1 - e^{-\lambda t}) + e^{-\lambda t} \right\}.$$

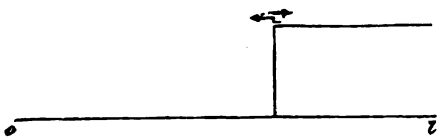


Fig. 10.

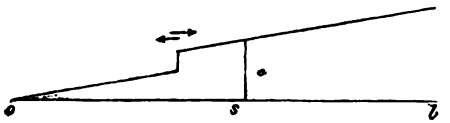


Fig. 11.

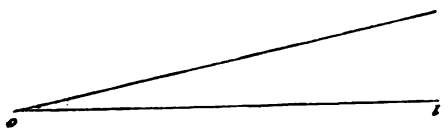


Fig. 12.

Macht man e und s zu rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes, so entsteht daher für einen gewissen Werth von t eine Linie von der Form Fig. 10; wenn t ein mässiges Vielfaches von T nicht überschreitet, so hat die Linie die Gestalt von Fig. 11; sie nähert sich der geraden Linie Fig. 12, je weiter t wächst.

Ueber die Bewegung der Elektricität in Leitern.[1])

In einer früheren Abhandlung[2]) habe ich eine Theorie der Bewegung der Elektricität in linearen Leitern aufgestellt; ich will jetzt zeigen, wie die dort durchgeführten Betrachtungen sich so verallgemeinern lassen, dass sie auf Leiter jeder Gestalt anwendbar werden.

Ich bezeichne durch x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes des Leiters; den Strom, der zur Zeit t in diesem Punkte fliesst, zerlege ich nach den drei Coordinatenaxen und nenne u, v, w die Stromdichtigkeiten der Componenten; diese Stromdichtigkeiten werden gleich sein müssen den Produkten aus den Componenten der im Punkte (x, y, z) wirksamen, auf die Einheit der Elektricitätsmenge bezogenen, elektromotorischen Kraft in die Leitungsfähigkeit. Diese elektromotorische Kraft rührt her zum Theil von vorhandener freier

1) Pogg. Annal. Bd. 102. 1857.
2) S. oben p. 131.

Elektricität, zum Theil von der Induction, die in Folge der Aenderungen der Stromstärke in allen Theilen des Leiters stattfindet. Bezeichnet Ω die Potentialfunktion der freien Elektricität in Bezug auf den Punkt (x, y, z), so sind die Componenten des ersten Theiles der elektromotischen Kraft

$$-2\frac{\partial\Omega}{\partial x},\quad -2\frac{\partial\Omega}{\partial y},\quad -2\frac{\partial\Omega}{\partial z}.$$

Um die Componenten des zweiten Theiles angeben zu können, bezeichne ich durch x', y', z' die Coordinaten eines zweiten Punktes des Leiters, durch u', v', w' die Werthe von u, v, w für diesen Punkt, durch r die Entfernung der Punkte (x, y, z) und (x', y', z'), und setze:

$$U=\iiint\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r^3}(x-x')\left[u'(x-x')+v'(y-y')+w'(z-z')\right]$$

$$V=\iiint\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r^3}(y-y')\left[u'(x-x')+v'(y-y')+w'(z-z')\right]$$

$$W=\iiint\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r^3}(z-z')\left[u'(x-x')+v'(y-y')+w'(z-z')\right],$$

wo die Integrationen über das ganze Volumen des Leiters ausgedehnt gedacht sind. Nach dem Weber'schen Gesetze der Induction sind dann die Componenten des zweiten Theiles der betrachteten elektromotorischen Kraft:

$$-\frac{8}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t},\quad -\frac{8}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t},\quad -\frac{8}{c^2}\frac{\partial W}{\partial t},$$

wo c diejenige constante Geschwindigkeit bezeichnet, mit der zwei Elektricitätstheile gegen einander bewegt werden müssen, damit sie keine Kraft auf einander ausüben. Ist daher k die Leitungsfähigkeit des Leiters, so hat man:

$$(1)\qquad u=-2k\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}+\frac{4}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}\right)$$

$$(2)\qquad v=-2k\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}+\frac{4}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

$$(3)\qquad w=-2k\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}+\frac{4}{c^2}\frac{\partial W}{\partial t}\right).$$

Dass die freie Elektricität auf die Oberfläche des Leiters beschränkt ist, wie beim Gleichgewicht oder bei constanten Strömen, darf man hier nicht annehmen; es wird sich in der That zeigen, dass im Allgemeinen das Gegentheil stattfindet. Ich bezeichne durch ε die Dichtigkeit der freien Elektricität im

Punkte (x, y, z), durch ε' die im Punkte (x', y', z'), durch ε ihre Dichtigkeit in einem Elemente der Oberfläche dS und durch e' dieselbe für ein zweites Element der Oberfläche dS', dann ist:

$$\Omega = \int \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r}\,\varepsilon' + \int \frac{dS'}{r}\,e', \tag{4}$$

wo die erste Integration über das ganze Volumen, die zweite über die ganze Oberfläche des Leiters auszudehnen ist.

Zu diesen Gleichungen lassen sich noch zwei hinzufügen, die sich auf die mit der Zeit stattfindenden Aenderungen der Dichtigkeiten der freien Elektricität beziehen. Für jeden Punkt im Innern des Leiters ist nämlich:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}; \tag{5}$$

und, bezeichnet man durch N die nach dem Innern des Leiters gerichtete Normale des Elementes dS seiner Oberfläche, so ist ferner für jeden Punkt dieser Oberfläche:

$$u\cos(N,x) + v\cos(N,y) + w\cos(N,z) = -\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial t}. \tag{6}$$

Aus den aufgestellten Gleichungen lässt sich eine merkwürdige Relation zwischen ε und Ω herleiten. Substituirt man nämlich die Werthe von u, v, w aus (1), (2), (3) in (5) und benutzt, dass:

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2} = -4\pi\varepsilon$$

ist, so findet man:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -16k\left[\pi\varepsilon - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right)\right].$$

Da die Gleichung für U sich schreiben lässt:

$$U = -\int dx'\,dy'\,dz'\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,[u'(x-x') + v'(y-y') + w'(z-z')],$$

so ist:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\int dx'\,dy'\,dz'\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}\,u'$$

$$-\int dx'\,dy'\,dz'\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial x'}\,[u'(x-x') + v'(y-y') + w'(z-z')],$$

Bildet man in ähnlicher Weise die Werthe von $\frac{\partial V}{\partial y}$ und $\frac{\partial W}{\partial z}$, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$$
$$= -\int dx'\,dy'\,dz' \left(u' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + v' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + w' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right);$$

denn es ist:

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} = 0$$

für alle Punkte (x', y', z'), die nicht mit dem Punkte (x, y, z) zusammenfallen; und ausgedehnt über einen unendlich kleinen Raum, in dem der Punkt (x, y, z) liegt, sind die Integrale, welche die zweiten Theile von $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial W}{\partial z}$ bilden, unendlich klein. Von der Richtigkeit der letzten Behauptung überzeugt man sich leicht durch dasselbe Verfahren, durch welches Gauss nachgewiesen hat, dass zu dem Potentiale von Massen, die continuirlich einen Raum erfüllen, in Beziehung auf einen Punkt in diesem Raume die Massen, die dem Punkte unendlich nahe liegen, nur unendlich wenig beitragen.[1]) Ersetzt man in dem Integrale, welches die rechte Seite der gefundenen Gleichung bildet, die nach x, y, z genommenen Differentialquotienten durch die negativen nach x', y', z' genommenen, zerlegt dasselbe in drei Theile und integrirt den ersten partiell nach x', den zweiten nach y', den dritten nach z', so erhält man:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$$
$$= -\int \frac{dS}{r} \left[u' \cos(N', x) + v' \cos(N', y) + w \cos(N, z) \right]$$
$$-\int \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} \right);$$

wo N' die nach Innen gerichtete Normale des Oberflächenelementes dS' bezeichnet. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (6), (5) und (4) lässt sich diese Gleichung aber schreiben:

---

[1]) Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins; 1839, S. 7.

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial t}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -8k\left(2\pi\varepsilon - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}\right). \tag{7}$$

Man ersieht aus dieser Gleichung sehr deutlich, dass nur ausnahmsweise $\varepsilon = 0$ sein kann, dass also im Allgemeinen auch im Innern des Leiters sich freie Elektricität befindet. Es ist wohl wahrscheinlich, dass bei den sogenannten mechanischen Wirkungen des Entladungsstromes eines Leydener Flasche, z. B. dem Zerstäuben eines feinen Drahtes, diese im Innern befindliche freie Elektricität eine wesentliche Rolle spielt.

Ich will die hier entwickelte Theorie jetzt auf den Fall anwenden, den ich in der im Eingange angeführten Abhandlung betrachtet habe, auf den Fall nämlich, dass der Leiter ein unendlich dünner Draht ist, in dessen Nähe keine andere elektrische Körper vorhanden sind. Ich will nachweisen, dass diese allgemeinere Theorie dieselben Resultate liefert, die ich dort hergeleitet habe, ausserdem aber noch gewisse Fragen beantwortet, die dort unbeantwortet geblieben sind.

Ich werde die allgemeinen Gleichungen zunächst vereinfachen durch die Einführung der Voraussetzung, dass der Leiter ein Cylinder von kreisförmigem Querschnitt ist, und dass die Strömungen, sowie die Vertheilung der freien Elektricität, symmetrisch zur Axe sind. Ich nehme die Axe zur x-Axe; für y und z führe ich neue Coordinaten ϱ und φ ein, so, dass

$$y = \varrho \cos\varphi, \quad z = \varrho \sin\varphi$$

ist; entsprechend setze ich:

$$y' = \varrho' \cos\varphi', \quad z' = \varrho' \sin\varphi'.$$

Ich bezeichne ferner die Stromdichtigkeit der auf der Axe des Cylinders senkrechten Componente des Stromes — positiv gerechnet in der von der Axe fortgehenden Richtung — für den Punkt (x, ϱ, φ) durch σ und für den Punkt $(x', \varrho' \varphi')$ durch σ'. Es ist dann:

$$v = \sigma \cos\varphi, \quad w = \sigma \sin\varphi,$$
$$v' = \sigma' \cos\varphi', \quad w' = \sigma' \sin\varphi'.$$

Man hat daher:

$$u = -2k\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}\right), \tag{8}$$

wo

$$U = \int \frac{dx'\,\varrho'\,d\varrho'\,d\varphi'}{r^3}(x-x')\left[u'(x-x') + \sigma'(\varrho\cos(\varphi-\varphi') - \varrho')\right]. \tag{9}$$

Vernachlässigt man die Wirkung der auf den Grundflächen des Cylinders befindlichen freien Elektricität, so lässt sich, wenn α den Radius des Cylinders bezeichnet, die Gleichung (4) schreiben:

$$\Omega = \int \frac{dx'\,\varrho'\,d\varrho'\,d\varphi'}{r}\varepsilon' + \alpha\int \frac{dx'\,d\varphi'}{r}e'. \tag{10}$$

Die Gleichung (5) wird:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho\sigma}{\partial \varrho} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}; \tag{11}$$

und die Gleichung (6), die sich auf die Oberfläche bezieht:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial t}. \tag{12}$$

Die Ausdrücke von Ω und U nehmen eine wesentlich einfachere Gestalt an, wenn man die Voraussetzung einführt, dass der Querschnitt des Cylinders unendlich klein ist, während seine Länge eine endliche ist. Ich nenne l diese Länge, den Anfangspunkt der Coordinaten lege ich in den Mittelpunkt des Cylinders, die Integrationen nach x' sind dann von $-\frac{l}{2}$ bis $+\frac{l}{2}$ auszudehnen. Der Kürze wegen setze ich

$$x' - x = \xi;$$

für dx' kann dann in den Integralen $d\xi$ geschrieben werden; die Integrationen nach ξ sind zwischen den Gränzen $-\frac{l}{2} - x$ und $\frac{l}{2} - x$ zu nehmen, von denen die erste stets negativ, die zweite stets positiv ist. Die in den Integralen vorkommende Grösse r ist bestimmt durch die Gleichung

$$r^2 = \xi^2 + \beta^2,$$

wo

$$\beta^2 = \varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho'\cos(\varphi - \varphi').$$

Um mit der Umformung des zweiten Theiles von Ω zu beginnen, denke ich mir in dem Integrale

$$\int_{-\frac{l}{2}-s}^{\frac{l}{2}-s} \frac{d\xi e'}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}}$$

e' nach dem Taylor'schen Satze nach Potenzen von ξ entwickelt, also gesetzt:

$$e' = e + \frac{\partial e}{\partial x}\xi + \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}\frac{\xi^2}{1.2} + \cdots;$$

die einzelnen Theile, in welche das Integral sich dann zerlegen lässt, sind von der Form:

$$\frac{1}{1.2..n}\frac{\partial^n e}{\partial x^n}\int \frac{\xi^n d\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}}.$$

Es ist aber:

$$\int \frac{\xi^n d\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}} = \frac{1}{n}\xi^{n-1}\sqrt{\beta^2+\xi^2} - \frac{n-1}{n}\beta^2 \int \frac{\xi^{n-2}d\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}}$$

und

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}} = \log(\xi + \sqrt{\beta^2+\xi^2})$$

$$\int \frac{\xi d\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}} = \sqrt{\beta^2+\xi^2}.$$

Wenn β unendlich klein ist, was stattfindet, wenn α unendlich klein ist, so wird hiernach der erste, und nur der erste, jener Theile unendlich gross. Man darf daher alle folgenden Theile gegen den ersten vernachlässigen, also setzen:

$$\int \frac{e' d\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}} = 2e\log\frac{\sqrt{l^2-4x^2}}{\beta},$$

oder auch, indem man wieder Endliches gegen unendlich Grosses vernachlässigt:

$$= 2e\log\frac{l}{\beta}.$$

Weiter ist nun:

$$\int_0^{2\pi} \log\beta d\varphi' = 2\pi\log\varrho', \text{ wenn } \varrho' > \varrho.$$

In dem zweiten Theile von Ω ist $\varrho' = \alpha$ zu setzen; es ist daher dieser zweite Theil, nämlich

$$\alpha \int \frac{dx'\,d\varphi'}{r}\,\varepsilon',$$
$$= 4\pi\alpha\varepsilon \log\frac{l}{\alpha}.$$

Aehnliche Betrachtungen lassen sich in Beziehung auf den ersten Theil von Ω anstellen. Bezeichnet man den Werth, den ε in dem Punkte (x, ϱ', φ') hat, durch ε'_0, so findet man durch dieselben, dass

$$\int \frac{\varepsilon'\,dx}{r} = 2\varepsilon'_0 \log\frac{l}{\beta}$$

gesetzt werden darf; weiter ist:

$$\int \log\beta\, d\varphi' = 2\pi \log\varrho', \quad \text{wenn } \varrho' > \varrho$$

und

$$= 2\pi\log\varrho, \quad \text{wenn } \varrho > \varrho':$$

für den einen, wie für den andern dieser beiden Ausdrücke kann man aber $2\pi\log\alpha$ schreiben, wenn man Endliches gegen unendlich Grosses vernachlässigt; es wird deshalb

$$\int \frac{dx'\,\varrho'\,d\varrho'\,d\varphi'}{r}\,\varepsilon' = 4\pi\log\frac{l}{\alpha}\int_0^a \varrho'\,d\varrho'\,\varepsilon'_0.$$

Setzt man

$$2\pi\alpha\varepsilon + 2\pi\int_0^a \varrho'\,d\varrho'\,\varepsilon'_0 = E,$$

d. h. bezeichnet man durch Edx die Menge freier Elektricität, die in dem dem Elemente dx entsprechenden Theile des Drahtes enthalten ist[1]), so ergiebt sich also:

$$\Omega = 2E\log\frac{l}{\alpha}. \tag{13}$$

In derselben Weise lässt sich der Ausdruck von U in der Gleichung (9) behandeln. In demselben denke ich mir u' und σ' nach Potenzen von ξ entwickelt, und dabei die Werthe von u und σ für den Punkt (x, ϱ', φ') durch u'_0 und σ'_0 bezeichnet. In den Theilen, in welche der Ausdruck sich dann zerlegen lässt, kommen Integrale vor von der Form:

$$\int \frac{\xi^n d\xi}{(\beta^2+\xi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

[1]) Es ist E hier dieselbe Grösse, die ich in der oben angeführten Abhandlung e genannt habe.

Es ist:

$$\int \frac{\xi^n d\xi}{(\beta^2+\xi^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{n-2}\frac{\xi^{n-1}}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}} - \frac{n-1}{n-2}\beta^2 \int \frac{\xi^{n-2} d\xi}{(\beta^2+\xi^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\int \frac{\xi\, d\xi}{(\beta^2+\xi^2)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\beta^2+\xi^2}$$

$$\int \frac{\xi^2 d\xi}{(\beta^2+\xi^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}} + \log(\xi + \sqrt{\beta^2+\xi^2}).$$

Von den Integralen der betrachteten Form, wenn sie genommen werden von einer negativen bis zu einer positiven endlichen Gränze, ist daher dasjenige, für welches $n = 2$ ist, und nur dieses, unendlich gross, falls β unendlich klein ist. Alle übrigen Integrale lassen sich daher gegen dieses vernachlässigen und in ihm kann der endliche Theil auch fortgelassen werden. Als Faktor kommt in demselben die Grösse

$$u'_0 - \frac{\partial \sigma'_0}{\partial x}(\rho\cos(\varphi-\varphi') - \rho')$$

vor; wegen der Kleinheit von ρ und ρ' kann aber hierfür u'_0 gesetzt werden. Hiernach erhält man durch eine Rechnung, die derjenigen gleich ist, welche oben in Bezug auf Ω angestellt ist:

$$U = 4\pi \log\frac{l}{a}\int \rho'\, d\rho'\, u'_0.$$

Bezeichnet man die Elektricitätsmenge, welche in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Drahtes fliesst, also die Intensität des Stromes, durch i, so lässt sich diese Gleichung einfacher schreiben:

$$U = 2i \log\frac{l}{a}.$$

Substituirt man diesen Werth von U und den Werth von L aus (13) in die Gleichung (8), so erhält man:

$$u = -4\log\frac{l}{a}k\left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial i}{\partial t}\right).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist unabhängig von ρ, es ist also auch u von ρ unabhängig und daher

$$i = \pi a^2 u;$$

mithin ist auch:

$$(14) \qquad i = -4\pi a^2 k \log\frac{l}{a}\left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial i}{\partial t}\right).$$

Eine zweite Gleichung zwischen den Grössen E und i erhält

man aus den Gleichungen (11) und (12). Multiplicirt man nämlich die erste von diesen mit $\varrho d\varrho d\varphi$, integrirt sie über den Querschnitt des Drahtes und zieht von ihr die zweite ab, nachdem diese mit $2\pi\alpha$ multiplicirt ist, so erhält man:

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial t}. \tag{15}$$

Bei der Ableitung der Gleichungen (14) und (15) ist vorausgesetzt, dass der Draht gerade ist. Da dieselben aber zeigen, dass auf den elektrischen Zustand an einer Stelle des Drahtes die elektrischen Zustände aller Punkte, die in endlicher Entfernung von dieser liegen, von keinem Einfluss sind, so werden sie auch gelten, wenn der Draht gekrümmt ist, sobald nur der Radius der Krümmung überall endlich ist und nicht Punkte unendlich nahe aneinander liegen, zwischen denen ein endliches Stück des Drahtes sich befindet. Die Gleichungen (14) und (15) sind aber dieselben wie diejenigen, zu denen ich für denselben Fall in der oben angeführten Abhandlung gekommen bin. Die hier entwickelte allgemeinere Theorie führt also zu denselben Resultaten, wie die dort auseinander gesetzte; sie führt aber auch noch zu weiteren. Hat man nämlich aus (14) und (15) E bestimmt, dann aus (13) Ω, so kann man durch Integration von (7) ε, oder die Dichtigkeit der freien Elektricität im Innern des Drahtes, finden, sobald nur für den Anfangspunkt der Zeit ε gegeben ist. Ist der Anfangswerth von ε unabhängig von ϱ, so ist immer ε hiervon unabhängig, d. h. die Dichtigkeit der freien Elektricität in allen Punkten eines Querschnitts ist dieselbe; denn nach (13) ist Ω unabhängig von ϱ, und in der Gleichung (7) kommt ϱ nicht vor. Nach der Bestimmung von ε kann man weiter e finden; wenn der Anfangswerth von ε unabhängig von ϱ ist, was vorausgesetzt werden soll, so dient hierzu die Gleichung:

$$E = 2\pi\alpha e + \pi\alpha^2\varepsilon.$$

Unter derselben Voraussetzung ist es endlich leicht σ aus ε zu berechnen; es ist nämlich:

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{\varrho}{\alpha}\frac{\partial e}{\partial t}.$$

Dass diese Gleichung für $\varrho = \alpha$ richtig ist, lehrt die Gleichung (12), und dass σ proportional mit ϱ ist, die Gleichung (11);

multiplicirt man nämlich diese mit $\varrho d\varrho$ und integrirt sie, indem man benutzt, dass u und ε unabhängig von ϱ sind, so findet man aus ihr:

$$\sigma = -\frac{\varrho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right) + \frac{\text{Const.}}{\varrho}.$$

Die Constante der Integration muss aber gleich 0 sein, denn für $\varrho = 0$ darf σ nicht unendlich werden, sondern es muss im Gegentheil verschwinden, weil in der Axe des Drahtes die Strömungen die Richtung der Axe haben müssen.

Ich habe die Lösung der Gleichungen (14) und (15) an dem mehrfach erwähnten Orte für einen Fall discutirt, dem man sich um so mehr nähert, je kleiner man den Widerstand des Drahtes macht, und habe nachgewiesen, dass in diesem Falle sich die Elektricität in dem Drahte ähnlich fortpflanzt, wie eine Welle in einer gespannten Saite, und zwar mit der Geschwindigkeit, die das Licht im leeren Raume hat. Es ist von Interesse auch den entgegengesetzten Fall zu untersuchen, den nämlich, dem man sich um so mehr nähert, je grösser der Widerstand des Drahtes wird. Ich will dieses hier thun unter der Voraussetzung, dass die beiden Enden des Drahtes mit einander verbunden sind.

Ich bezeichne wieder, wie in der früheren Abhandlung, den Widerstand des Drahtes durch r, und setze

$$\log \frac{l}{\alpha} = \gamma;$$

dann ist die Lösung der Differentialgleichungen (14) und (15), welches auch der Werth von r sein möge, die folgende:

$$E = \Sigma\,(C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}) \sin nx + (C_1' e^{-\lambda_1 t} + C_2' e^{-\lambda_2 t}) \cos nx,$$

$$i = \sum -\frac{1}{2n}(\lambda_1 C_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{-\lambda_2 t}) \cos nx + \frac{1}{2n}(\lambda_1 C_1' e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2' e^{-\lambda_2 t}) \sin nx,$$

wo n ein Vielfaches von $\frac{2\pi}{l}$ bezeichnet, λ_1 und λ_2 die Werthe:

$$\frac{c^2 r}{32\gamma l}\left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{32\gamma}{cr\sqrt{2}} nl\right)^2}\right]$$

haben, C_1, C_2, C_1', C_2' willkürliche Constanten sind, und die Summation über alle Werthe von n auszudehnen ist. Die Constanten C bestimmen sich leicht, sobald E und i für $t = 0$ gegeben sind; hat man nämlich die Funktionen von x, in welche E und i für $t = 0$ übergehen sollen, dargestellt in der Form:

$$\Sigma(E_n \sin nx + E'_n \cos nx)$$

und

$$\Sigma(-i_n \cos nx + i'_n \sin nx),$$

so hat man die Gleichungen:

$$E_n = C_1 + C_2$$

$$i_n = \frac{1}{2n}(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2)$$

und

$$E'_n = C_1' + C_2'$$

$$i'_n = \frac{1}{2n}(\lambda_1 C_1' + \lambda_2 C_2');$$

die Auflösungen dieser sind:

$$C_1 = \frac{\lambda_2 E_n - 2ni_n}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$C_2' = \frac{-\lambda_1 E_n + 2ni_n}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$C_1' = \frac{\lambda_2 E'_n - 2ni'_n}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$C_2' = \frac{-\lambda_1 E'_n + 2ni'_n}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

In der früheren Abhandlung ist der Fall untersucht, dass

$$\frac{32\gamma}{cr\sqrt{2}}$$

als unendlich gross betrachtet werden kann; es soll nun angenommen werden, dass diese Grösse unendlich klein ist. Es sind dann die beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 reell; ist λ_2 die grössere von beiden, so ist bei Vernachlässigung von Gliedern niederer Ordnung:

$$\lambda_2 = \frac{c^2 r}{16\gamma l}, \quad \lambda_1 = \frac{8\gamma l}{r} n^2.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \left(\frac{16\gamma}{cr\sqrt{2}} nl\right)^2;$$

dieser Ausdruck ist unendlich klein, da nl ein Vielfaches von

2π, also endlich ist. Die Ausdrücke der Grössen C lassen sich hiernach schreiben:

$$C_1 = E_n - \frac{2n}{\lambda_2} i_n, \qquad C_1' = E_n' - \frac{2n}{\lambda_2} i_n',$$

$$C_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} E_n + \frac{2n}{\lambda_2} i_n, \quad C_2' = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} E_n' + \frac{2n}{\lambda_2} i_n.$$

Der Coëfficient von $\sin nx$ in dem Ausdrucke von E wird daher:

$$E_n \left(e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 t}\right) - \frac{2n}{\lambda_2} i_n \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right)$$

oder

$$E_n e^{-\lambda_1 t} - \frac{2n}{\lambda_2} i_n (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}),$$

und der Coëfficient von $-\cos nx$ in dem Ausdrucke von i:

$$E_n \frac{\lambda_1}{2n} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) - i_n \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right).$$

Man erhält hieraus die Coëfficienten von $\cos nx$ in E und von $\sin nx$ in i, wenn man für E_n und i_n setzt E_n' und i_n'. Schliesst man den Fall aus, dass der Anfangswerth von i unendlich gross ist gegen die Werthe, die i bei ungeändertem Anfangswerthe von E erhält, wenn der Anfangswerth von $i = 0$ ist, so vereinfachen sich diese Ausdrücke. Es ist nämlich aus ihnen ersichtlich, dass, wenn $i = 0$ für $t = 0$, d. h. wenn $i_n = 0$ ist, i von der Ordnung von $E \frac{\lambda_1}{2n}$ ist; es ist also bei der ausgesprochenen Beschränkung i_n von der Ordnung $E_n \frac{\lambda_1}{2n}$, und es werden sich die Coëfficienten von $\sin nx$ in E und von $-\cos nx$ in i schreiben lassen:

$$E_n e^{-\lambda_1 t}$$

und

$$E_n \frac{\lambda_1}{2n} e^{-\lambda_1 t} + \left(i_n - E_n \frac{\lambda_1}{2n}\right) e^{-\lambda_2 t}.$$

Schliesst man ferner von der Betrachtung diejenigen Werthe von t aus, die so klein sind, dass $\lambda_1 t$ unendlich klein ist, so ist $\lambda_2 t$ unendlich gross, und daher der zweite Term in dem zweiten dieser Ausdrücke gegen den ersten zu vernachlässigen. Da dieselben Betrachtungen auch in Bezug auf die Coëfficienten von $\cos nx$ und von $\sin nx$ in den Ausdrücken von E und

i gelten, so werden diese Ausdrücke, wenn man noch für λ_1 den oben aufgestellten Werth substituirt:

$$E = \Sigma (E_n \sin nx + E'_n \cos nx)\, e^{-\frac{8\gamma l}{r} n^2 t} \tag{16}$$

$$i = \frac{4\gamma l}{r} \Sigma n (-E_n \cos nx + E'_n \sin nx)\, e^{-\frac{8\gamma l}{r} n^2 t}. \tag{17}$$

Diese Ausdrücke sind unabhängig von c; es sind die Lösungen der Differentialgleichungen, die aus (14) und (15) entstehen, wenn man c unendlich gross setzt, nämlich der Differentialgleichungen:

$$i = -\frac{4\gamma l}{r} \frac{\partial E}{\partial x}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Eliminirt man aus diesen i, so erhält man:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{8\gamma l}{r} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2},$$

welche Gleichung von derselben Form wie diejenige ist, welche die Fortpflanzung der geleiteten Wärme bestimmt. In dem betrachteten Falle pflanzt sich also die Elektricität ähnlich wie die geleitete Wärme fort.

Dass bei der über den Widerstand r gemachten Voraussetzung die Gleichungen (16) und (17) wirklich Lösungen der Gleichungen (14) und (15) sind, lässt sich auch leicht *a posteriori* nachweisen. Man überzeugt sich nämlich ohne Schwierigkeit, dass bei jener Voraussetzung $\frac{4}{c^2} \frac{\partial i}{\partial t}$ unendlich klein gegen $\frac{\partial E}{\partial x}$ ist, wenn für i und E ihre Werthe aus (17) und (16) gesetzt werden.

In ganz ähnlicher Weise, wie der Fall, dass der Draht ein in sich zurückkehrender ist, hier behandelt ist, lässt sich auch der Fall behandeln, dass die Enden des Drahtes getrennt sind und in ihnen das Potential zwei constante Werthe hat. Man findet für diesen unter der Voraussetzung, dass der Widerstand des Drahtes gross genug ist, dieselbe Analogie zwischen der Fortpflanzung der Elektricität und der der geleiteten Wärme, die sich hier gezeigt hat.

Bei dem Jacobi'schen Widerstandsetalon, einem Kupferdrahte von $7^m,62$ Länge und $0^{mm},333$ Radius ist, wie an dem mehrfach erwähnten Orte gezeigt ist,

$$\frac{32\gamma}{rc\sqrt{2}} = 2070;$$

bei einem Drahte von demselben Material, demselben Querschnitt und einer Länge von 1000 Kilometer ist dieselbe Grösse $= 0{,}034$; sie kann bei jenem näherungsweise als unendlich gross, bei diesem als unendlich klein betrachtet werden; es pflanzt sich bei jenem die Elektricität ähnlich wie eine Welle in einer Saite, bei diesem wie die geleitete Wärme fort.

Thomson[1]) hat die Bewegung der Elektricität in einem unterseeischen Telegraphendrahte untersucht; er hat dabei die Annahme gemacht, ohne die Zulässigkeit derselben zu prüfen, dass die Induction keinen merklichen Einfluss ausübt, und hat gezeigt, dass dann die Elektricität sich wie die geleitete Wärme bewegt. Die hier durchgeführten Betrachtungen beweisen, dass jene Annahme schon bei einem einfachen Drahte erfüllt ist, wenn die Länge desselben nur gross genug ist; sie wird um so mehr richtig sein bei einem unterseeischen Telegraphendrahte, bei dem die Bewegung der Elektricität in Folge der im Meereswasser stattfindenden Leitung erheblich verlangsamt wird.

Zur Theorie der Entladung einer Leydener Flasche.[2])

Bei seinen schönen Versuchen über die elektrische Flaschenentladung[3]) ist Hr. Feddersen zu dem Schlusse geführt, dass unter gewissen Umständen der Entladungsstrom einer Leydener Flasche aus aufeinanderfolgenden Strömen von abwechselnder Richtung zusammengesetzt ist, einem Schlusse, der von anderen Seiten mannigfache Bestätigungen erfahren hat, und dessen Richtigkeit durch die Beobachtung des Hrn. v. Oettingen,

---

[1]) Phil. Mag. Ser. IV, Vol. II, p. 157.
[2]) Pogg. Annal. Bd. 121. 1864.
[3]) Pogg. Annal. Bd. 113, S. 43 und Bd. 116, S. 132.

nach der eine positiv geladene Flasche oft einen negativen Rückstand zeigt,[1]) mir über jeden Zweifel erhoben zu sein scheint. Hr. Feddersen hat weiter gefunden, dass die Dauer der einzelnen, bei einer Entladung aufeinanderfolgenden Ströme dieselbe ist, aber abhängt von der Natur der Flasche und des Schliessungsbogens; er hat sie unter mannigfach abgeänderten Umständen gemessen und mehrere einfache Sätze über sie aufgestellt.

In seinen Abhandlungen hat Hr. Feddersen mehrfach auf eine Theorie hingewiesen, welche einen ähnlichen Verlauf des Entladungsstromes einer Leydener Flasche ergiebt, wie seine Messungen ihn gezeigt haben; ohne indessen näher zu untersuchen, in wie weit die Theorie mit diesen Messungen im Einklange ist. Wenngleich sich von dieser Theorie voraussehen lässt, dass sie nicht in vollständiger Uebereinstimmung mit der Erfahrung sein kann, so scheint es doch von Interesse, sie mit den Resultaten der Versuche des Hrn. Feddersen zu vergleichen. Diese Vergleichung durchzuführen ist hier meine Absicht.

Ein wesentliches Hinderniss, welches sich der Aufstellung einer strengen Theorie des Entladungsstromes einer Leydener Flasche entgegensetzt, ist die mangelhafte Kenntniss, welche man von den Bedingungen besitzt, unter denen der elektrische Funke zu Stande kommt und fortbesteht. Es soll hier angenommen werden, dass, so lange die Entladung dauert, das Potential der vorhandenen freien Elektricität in den beiden Körpern, zwischen denen der Funke übergeht, denselben Werth hat. Eine zweite Voraussetzung, die gemacht werden soll, und die der Wirklichkeit eben so wenig genau entsprechen wird, wie jene, ist die, dass zwischen den Elektricitätsmengen, die die beiden Belegungen der Flasche enthalten, und den Potentialwerthen in diesen in jedem Augenblicke der Entladung dieselben Beziehungen bestehen, wie wenn die Elektricitäten sich im Gleichgewichte befänden. Drittens soll die Voraussetzung gemacht werden, dass gleichzeitig in allen Theilen des Schliessungsbogens die gleiche Stromstärke statt-

[1]) Pogg. Ann. Bd. 115, S. 313.

findet; eine Voraussetzung, deren Zulässigkeit später aber geprüft werden wird.

Es sei i die Stromstärke im Schliessungsbogen zur Zeit t, positiv gerechnet, wenn die positive Elektricität von der inneren Belegung zur äusseren fliesst, und gemessen nach der von Weber sogenannten mechanischen Einheit; dann ist i die Menge positiver Elektricität, die in der Zeiteinheit der inneren Belegung entzogen, der äusseren zugeführt wird, und gleichzeitig die Menge negativer Elektricität, die in der Zeiteinheit der inneren Belegung zugeführt und der äusseren entzogen wird. Bezeichnen Q_i und Q_a die Elektricitätsmengen der beiden Belegungen zur Zeit t, so ist daher:

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{dQ_a}{dt} = -2i. \tag{1}$$

Bedeutet ferner w den Widerstand des Schliessungsbogens nach mechanischem Maasse, so ist das Produkt wi gleich der, nach demselben Maasse gemessenen elektromotorischen Kraft, die auf den Schliessungsbogen wirkt. Diese elektromotorische Kraft rührt zum Theil von der Verschiedenheit der Potentialwerthe in den Enden des Drahtes — oder, was dasselbe ist, in den beiden Belegungen — her, zum Theil von der Induction, die in Folge der Aenderung der Stromstärke in dem Schliessungsbogen eintritt. Sind V_i und V_a die Potentialwerthe in den beiden Belegungen, so ist der erste dieser beiden Theile

$$= 2(V_i - V_a).$$

Um den zweiten ausdrücken zu können, bezeichne man durch ds und ds' zwei Elemente des Schliessungsbogens, durch θ und θ' die Winkel, die sie bilden mit der von ds nach ds' gezogenen Linie, durch r die Länge dieser Linie, und setze:

$$W = \iint \frac{ds\,ds'}{r} \cos\theta \cos\theta',$$

wo jede der beiden Integrationen über die ganze Länge des Schliessungsbogens auszudehnen ist. Hierbei bedeutet W das Potential eines Stromes in Beziehung auf sich selbst, der den Schliessungsbogen mit einer Intensität durchfliesst, die der Einheit der Intensität nach elektromagnetischem Maasse gleich ist. Jener zweite Theil der elektromotorischen Kraft ist dann

$$= -\frac{8}{c^2} W \frac{di}{dt},$$

wo c die in dem Weber'schen elektrischen Grundgesetze vorkommende Constante, nämlich die constante Geschwindigkeit bedeutet, mit der zwei Elektricitätstheilchen gegen einander bewegt werden müssen, damit sie keine Kraft auf einander ausüben. Man hat hiernach die Gleichung:

$$(2) \qquad wi = 2(V_i - V_a) - \frac{8}{c^2} W \frac{di}{dt}.$$

Die Grössen Q_i und Q_a sind ferner lineare homogene Funktionen von V_i und V_a; und zwar ist, wenn man die Grösse der Belegungen als unendlich gross gegen das Quadrat der Dicke des Glases der Flasche betrachten darf:

$$(3) \qquad Q_i = Q_a = \beta(V_i - V_a),$$

wo β die Capacität der Flasche bedeutet.

Aus den Gleichungen (1), (2) und (3) findet man, wenn man

$$Q_i = Q_a = Q$$

setzt, mit Leichtigkeit für Q die Differentialgleichung:

$$\frac{8}{c^2} W \frac{d^2 Q}{dt^2} + w \frac{dQ}{dt} + \frac{4}{\beta} Q = 0.$$

Die Lösung derselben ist:

$$Q = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t},$$

wo A_1 und A_2 willkürliche Constanten und λ_1 und λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\frac{8}{c^2} W \lambda^2 + w\lambda + \frac{4}{\beta} = 0$$

bedeuten. Die Lösung lässt sich auf die Form bringen:

$$Q = e^{-ht}\left(A \cos \frac{t}{T}\pi + B \sin \frac{t}{T}\pi\right),$$

wo A und B neue willkürliche Constanten sind, und h und T die Werthe haben:

$$h = \frac{w c^2}{16 W}$$

$$T = \frac{\pi \sqrt{2\beta W}}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2 c^2 \beta}{128 W}}}.$$

Die Gleichungen stimmen mit denjenigen überein, welche bei

anderer Bezeichnung und auf einem andern Wege W. Thomson in seiner Abhandlung *on transient electric currents*[1]) abgeleitet hat.

Wenn T reell ist, so ist die Entladung eine oscillatorische und der Werth von T ist die Dauer einer einfachen Oscillation.

Um dieses theoretische Resultat mit den Versuchen des Hrn. Feddersen zu vergleichen, hat man zunächst zu untersuchen, ob unter den Umständen, unter denen dieser seine Messungen angestellt hat, die Theorie oscillatorische Entladungen ergiebt, d. h. ob der Ausdruck

$$\frac{w^2 c^2 \beta}{128\, W}$$

kleiner als 1 ist.

Man nehme Millimeter und Sekunde als Einheiten der Länge und der Zeit an. Der Werth von c ist dann nach Weber und Kohlrausch:

$$c = 4{,}39 \,.\, 10^{11}.$$

Bei der Berechnung von w kann man davon ausgehen, dass für den Jacobi'schen Widerstandsetalon, d. h. für einen Kupferdraht von $7^{m},620$ Länge und $0^{mm},333$ Radius[2])

$$w = 2{,}482 \,.\, 10^{-13}$$

ist; für einen Kupferdraht von der Länge l und dem Radius α ist demnach:

$$w = 3{,}612 \,.\, 10^{-18} \cdot \frac{l}{\alpha^2}.$$

Bedeutet ferner S die Fläche einer Belegung der Flasche, δ die Dicke und μ den Inductionscoëfficienten des Glases, so ist:

$$\beta = \mu \frac{S}{4\pi\delta}. \tag{4}$$

Was endlich den Werth von W anbelangt, so ergiebt die Rechnung, die ich in meiner Abhandlung über die Bewegung der Elektricität in Drähten[3]) durchgeführt habe, unter der Voraussetzung, dass

$$\log \frac{l}{\alpha}$$

[1]) Phil. Mag. June 1853.
[2]) S. oben p. 142.
[3]) S. oben p. 131 u. 154.

als unendlich gross betrachtet werden darf, und dass das Verhältniss einer jeden Sehne der Linie, die der Draht bildet, zum zugehörigen Bogen ein endliches ist:

$$W = 2l \log \frac{l}{\alpha}. \tag{5}$$

Man ersieht hieraus, dass, wenn der Schliessungsbogen aus einem gleichartigen Drahte gebildet ist, jener Ausdruck

$$\frac{w^2 c^2 \beta}{128 W}$$

einen um so grösseren Werth hat, je grösser die Belegung der Flasche (oder Batterie) und je länger der Schliessungsbogen ist. Die grösste Batterie, die Hr. Feddersen bei den hier in Rede stehenden Versuchen angewandt hat, bestand aus 16 Flaschen von je 0,2006 Quadratmeter innerer Belegung und 4 bis 5^{mm} Glasdicke; der längste Schliessungsbogen aus einem Drahte von 1343^m Länge und $1^{mm},35$ Dicke. Setzt man mit Hrn. Siemens[1]) für Glas $\mu = 2$, so ergiebt sich für diese Batterie und diesen Schliessungsbogen:

$$\beta = 1{,}135 \cdot 10^5$$
$$w = 1{,}064 \cdot 10^{-11}$$
$$W = 3{,}896 \cdot 10^7$$

und

$$\frac{w^2 c^2 \beta}{128 W} = 0{,}000497.$$

Der fragliche Ausdruck ist daher kleiner als 1, und mithin die Entladung auch nach der Theorie eine oscillatorische. Sein Werth ist so klein, dass er ohne jeden merklichen Fehler gegen 1 vernachlässigt werden kann; mit noch grösserem Rechte kann das bei den Versuchen geschehen, die mit kürzerem Schliessungsbogen oder mit geringerer Flaschenzahl angestellt sind; für alle diese Versuche kann man daher setzen:

$$T = \frac{\pi \sqrt{2 \beta W}}{c}. \tag{6}$$

Diese Gleichung spricht mehrere von den Sätzen aus, die Hr. Feddersen aus seinen Versuchen geschlossen hat. Sie zeigt zunächst, dass die Oscillationsdauer von der Grösse der La-

[1]) Pogg. Ann. Bd. 102, S. 112.

dung unabhängig ist, denn diese Grösse kommt in dem Ausdruck von T nicht vor; sie zeigt weiter, dass die Oscillationsdauer auch von dem Widerstande des Schliessungsbogens unabhängig ist, denn der Widerstand w ist dem Ausdrucke von T verschwunden; ferner sagt sie, dass die Oscillationsdauer mit der Quadratwurzel aus der Fläche der Belegung proportional ist, denn β ist dieser Fläche proportional. Dieses letzte Gesetz fand Hr. Feddersen bei den längsten Schliessungsbögen, die er anwandte, nicht mehr strenge richtig; es zeigte sich ihm eine Abweichung von demselben in dem Sinne, dass die Oscillationsdauer bei Verkleinerung der Fläche der Belegung nicht so rasch abnahm, als das Gesetz es erfordert hätte; weiter unten werde ich nachweisen, dass die Theorie eine Abweichung von demselben Sinne ergiebt, wenn man die Voraussetzung fallen lässt, dass in allen Punkten des Schliessungsbogens gleichzeitig dieselbe Stromstärke stattfindet. Denkt man sich in die Gleichung (6) für W seinen Werth aus der Gleichung (5) gesetzt, so sieht man, dass die Oscillationsdauer zunimmt, wenn die Länge des Schliessungsbogens l vergrössert wird, und zwar so, dass sie etwas schneller als die Quadratwurzel aus der Länge wächst. Man sieht dabei ferner, dass die Oscillationsdauer langsam zunimmt, wenn der Radius des Drahtes α verringert wird. Jene Gleichung (5) setzt eine Aufspannnung des Drahtes voraus, bei der irgend zwei Punkte, zwischen denen ein endliches Stück des Drahtes liegt, in endlicher Entfernung von einander sich befinden. Werden zwei Theile des Drahtes einander genähert, die in derselben Richtung von dem Strome durchflossen werden, so wird das Potential W vergrössert; es wird dieses verkleinert, wenn man zwei Theile nähert, die der Strom in entgegengesetzter Richtung durchfliesst. Es muss deshalb im ersten Falle die Oscillationsdauer vergrössert, im zweiten verkleinert werden. Das Alles ist in völliger Uebereinstimmung mit den Schlüssen, die Hr. Feddersen aus seinen Beobachtungen gezogen hat.

Es bleibt zur Prüfung der Formel (6) nun aber noch zu untersuchen übrig, in wie weit die absoluten Werthe der Oscillationsdauer, die sie giebt, mit den Messungen des Hrn. Feddersen übereinstimmen. Eine genaue Uebereinstim-

mung kann hier nicht erwartet werden, da die Werthe, die die Grössen β und W bei diesen Messungen hatten, nicht genau berechnet, sondern nur geschätzt werden können; es kann sich nur darum handeln, zu entscheiden, ob die Theorie für die Oscillationsdauer Werthe von derselben Ordnung giebt, wie die Versuche sie ergeben haben. Ich wähle zu diesem Zwecke die Versuchreihe, deren Resultate Hr. Feddersen S. 164 seiner Abhandlung im 116. Bande von Pogg. Ann. angegeben hat; sie ist ausgeführt mit einer Batterie von 10 Flaschen der oben angegebenen Dimensionen und einem Schliessungsdrahte von $1^{mm},35$ Dicke. In der folgenden Tabelle sind in der ersten Columne die Längen des Schliessungsdrahtes angegeben, in der zweiten die beobachteten Oscillationsdauern[1]), in der dritten die mit Hülfe der Gleichungen (4), (5), (6) berechneten Werthe derselben in Zehnmilliontel einer Sekunde.

l	T	
m	beob.	berechn.
5,26	13	9
15,26	31	15
25,26	41	20
45,26	60	27
65,26	75	33
85,26	84	38
115,26	93	45
180,3	131	57
317,0	177	77
445,0	227	93

Man sieht, dass die Werthe von T, auf welche die Theorie führt, von derselben Ordnung, wie die beobachteten sind, aber im Durchschnitt nur etwa halb so gross, als diese. Es ist wohl nicht wahrscheinlich, dass ein so grosser Unterschied durch die Ungenauigkeit der Werthe herbeigeführt ist, welche für β und W bei der Rechnung zu Grunde gelegt sind; vielmehr scheint man zu dem Schlusse genöthigt zu sein, dass bei der Entladung der Batterie eine Ursache mitwirkt, welche bei

[1]) Aus der Abhandlung des Hrn. Feddersen geht nicht mit Sicherheit hervor, ob die für die Oscillationsdauer angegebenen Zahlenwerthe sich auf einfache oder doppelte Schwingungen beziehen; auf meine Anfrage ist Hr. Feddersen so freundlich gewesen mir die Auskunft zu geben, dass das erstere der Fall ist.

der Theorie nicht berücksichtigt ist, und welche die Oscillationen wesentlich verzögert. Um diesen Schluss vollkommen sicher zu stellen, wären freilich Versuche nöthig, bei denen die Werthe von β und W sich mit grösserer Sicherheit ermitteln liessen, als es bei den vorliegenden möglich ist.

Was die Grösse W anbelangt, so lässt sich, wie ich glaube, leicht eine Anordnung treffen, bei der ihre Berechnung mit der nöthigen Genauigkeit ohne Schwierigkeit ausgeführt werden kann. Der in (5) angegebene Werth setzt voraus, dass der Schliessungsdraht fern von andern Leitern in einer Linie ausgespannt ist, bei der überall zwischen einer Sehne und dem zugehörigen Bogen ein endliches Verhältniss besteht — eine Bedingung, welche bei einem sehr langen Drahte kaum erfüllt werden kann —; er gilt weiter nur in sofern, als der Logarithmus des Verhältnisses zwischen Länge und Radius des Drahtes als unendlich gross zu betrachten ist — eine Zahl, die bei den angeführten Versuchen wenig über 10 steigt. Für gewisse Formen des Drahtes lässt sich aber leicht ein genauerer Werth von W finden. Bildet der Draht einen Kreis, so ist:

$$W = 2l\left(\log\frac{l}{\alpha} - 1{,}508\right);$$

bildet er den Umfang eines Quadrats, so ist:

$$W = 2l\left(\log\frac{l}{\alpha} - 1{,}910\right).$$

Bildet der Draht eine Schraubenlinie, bei der die Höhe eines Ganges klein gegen den Radius der Schraube, aber gross gegen den Radius des Drahtes ist, so findet man W durch folgende Formeln:

Es sei n die Anzahl der Windungen, ε der Abstand je zwei aufeinanderfolgender, r ihr Radius und α, wie früher, der Radius des Drahtes; dann ist:

$W = nf(0) + 2(n-1)f(\varepsilon) + 2(n-2)f(2\varepsilon) + .. + 2f(n-1.\varepsilon)$,

wo

$$f(z) = \frac{4\pi r}{k}[(2-k^2)K - 2E],$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

$$k^2 = \frac{4r^2}{4r^2 + z^2}$$

und

$$f(0) = 4\pi r \left(\log \frac{8r}{\alpha} - \frac{7}{4} \right).$$

Wollte man dem Schliessungsdrahte die Gestalt einer Schraubenlinie geben, so müsste man denselben in seiner ganzen Länge mit einer Unterlage in Berührung bringen und man hätte einen wesentlichen Einfluss dieser auf die Bewegung der Elektricität in dem Drahte zu fürchten. Dieser Uebelstand fällt fort, wenn man den Draht um 4 isolirende Stützen, die in den Ecken eines Quadrats senkrecht zu seiner Fläche befestigt sind, so herumwindet, dass jede Windung nahe den Umfang eines Quadrats bildet. Bezeichnet a die Seite des Quadrats, ε die Entfernung zweier aufeinanderfolgender Windungen, n die Anzahl der Windungen und α den Radius des Drahtes, so ist für diesen Fall:

$$W = nf(0) + 2(n-1)f(\varepsilon) + 2(n-2)f(2\varepsilon) + \text{etc.},$$

wo

$$f(z) = 4a \log \frac{\sqrt{a^2 + z^2} + a}{\sqrt{a^2 + z^2} - a} - 8\,(\sqrt{a^2 + z^2} - z)$$

$$- 4a \log \frac{\sqrt{2a^2 + z^2} + a}{\sqrt{2a^2 + z^2} - a} + 8\,(\sqrt{2a^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + z^2})$$

und

$$f(0) = 8a \left(\log \frac{2(\sqrt{2} - 1)a}{\alpha} - \frac{7}{4} + \sqrt{2} \right).$$

Von einer der Voraussetzungen, aus welcher die Gleichung (6) abgeleitet ist, kann man die Theorie unabhängig machen; von der Voraussetzung nämlich, dass in allen Theilen des Schliessungsbogens gleichzeitig die gleiche Stromstärke stattfindet; freilich nur in dem Falle, dass die Bedingungen erfüllt sind, unter denen die Gleichung (5) gilt, d. h., dass $\log \frac{l}{\alpha}$ unendlich gross ist und der Draht eine Linie bildet, bei der

zwischen jeder Sehne und dem zugehörigen Bogen ein endliches Verhältniss besteht. Für diesen Fall habe ich in der schon oben angeführten Abhandlung über die Bewegung der Elektricität in Dräthen die folgenden Differentialgleichungen abgeleitet:

$$i = -4\gamma \frac{l}{w}\left(\frac{\partial E}{\partial s} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial i}{\partial t}\right)$$

$$2\frac{\partial i}{\partial s} = -\frac{\partial E}{\partial t},$$

wo i die Stromstärke zur Zeit t in dem Querschnitte des Drahtes bedeutet, der um s von seinem Anfange absteht, positiv gerechnet, wenn der Strom in der Richtung fliesst, in der s wächst, E die Menge freier Elektricität, die auf der Längeneinheit des Drahtes an demselben Orte zur selben Zeit sich befindet, wo weiter

$$\log \frac{l}{\alpha} = \gamma$$

gesetzt ist, und die übrigen Zeichen dieselbe Bedeutung, wie oben, haben. Diesen Gleichungen wird genügt, wenn man

$$E = X \sin ns$$
$$i = Y \cos ns$$

oder

$$E = X \cos ns$$
$$i = -Y \sin ns$$

und jedesmal

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{c^2 w}{16\gamma l}\frac{dX}{dt} + \frac{c^2 n^2}{2}X = 0$$

$$2nY = \frac{dX}{dt}$$

setzt, indem man unter n eine Constante versteht, über die später verfügt werden soll. Die Gleichung für X ergiebt:

$$X = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

wenn C_1 und C_2 zwei willkürliche Constanten und λ_1 und λ_2 die Werthe von

$$-h \pm \sqrt{\frac{c^2 n^2}{2} - h^2}\sqrt{-1}$$

bezeichnen, wo h dieselbe Bedeutung wie oben hat, nämlich

$$h = \frac{c^2 w}{32\gamma l}$$

ist. Führt man in dem Ausdrucke von X zwei neue willkürliche Constanten ein, für die aber die Zeichen C_1 und C_2 beibehalten werden mögen, so wird derselbe:

$$X = e^{-ht}\left(C_1 \sin t\sqrt{\frac{c^2n^2}{2} - h^2} + C_2 \cos t\sqrt{\frac{c^2n^2}{2} - h^2}\right).$$

Eine Lösung der für E und i aufgestellten Differentialgleichungen ist daher die folgende:

$$E = e^{-ht}\sum \sin t\sqrt{\frac{c^2n^2}{2} - h^2}(C_1 \sin ns + D_1 \cos ns)$$
$$+ \cos t\sqrt{\frac{c^2n^2}{2} - h^2}(C_2 \sin ns + D_2 \cos ns)$$
$$i = e^{-ht}\sum \cos t\sqrt{\frac{c^2n^2}{2} - h^2}(A_1 \cos ns - B_1 \sin ns)$$
$$+ \sin t\sqrt{\frac{c^2n^2}{2} - h^2}(A_2 \cos ns - B_2 \sin ns),$$

wo die Constanten A, B in gewisser Weise durch die Constanten C, D ausdrückbar sind und wo die Summenzeichen sich auf verschiedene Werthe des n beziehen.

Diese Lösung soll nun dem Falle angepasst werden, dass der Draht den Schliessungsbogen einer Leydener Flasche bildet. Das Ende des Drahtes, für welches $s = 0$ ist, sei mit der inneren, dasjenige, für welches $s = l$ ist, mit der äusseren Belegung in Verbindung. Die Zeichen Q_i, Q_a, V_i, V_a und β sollen dieselbe Bedeutung wie oben haben; zwischen diesen Grössen bestehen dann die Gleichungen (3). Bei der Ableitung der hier behandelten Differentialgleichungen ist bewiesen, dass das Potential der freien Elektricität in irgend einem Querschnitt des Drahtes

$$= 2\gamma E$$

ist; daraus folgt:

$$V_i = 2\gamma E_o$$
$$V_a = 2\gamma E_l,$$

wo die Indices o und l andeuten sollen, dass das für $s = 0$ und $s = l$ geltende E zu nehmen ist. Die Gleichungen (3) ergeben daher:

$$Q_i = Q_a = 2\beta\gamma(E_0 - E_l).$$

Den Gleichungen (1) entsprechen hier diese:

$$\frac{dQ_1}{dt} = -2i_0$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = -2i_1.$$

Daraus folgt:

$$i_0 = i_1 = -\beta\gamma\left(\frac{dE_0}{dt} - \frac{dE_1}{dt}\right),$$

oder bei Rücksicht auf die zweite der beiden Differentialgleichungen

$$i_0 = i_1 = 2\beta\gamma\left[\left(\frac{di}{ds}\right)_0 - \left(\frac{di}{ds}\right)_1\right].$$

Diese Doppelgleichung drückt die Bedingungen aus, die für jeden Werth von t an den Enden des Drahtes erfüllt sein müssen. Man genügt ihr, indem man sowohl für den Index 1 als für den Index 2:

$A = A\cos nl - B\sin nl = 2\beta\gamma n[A\sin nl - B(1-\cos nl$

setzt. Durch Elimination von A und B aus diesen Gleichungen folgt:

$$1 = 4\beta\gamma n \operatorname{tg}\frac{nl}{2}$$

oder

$$\frac{nl}{2}\operatorname{tg}\frac{nl}{2} = \frac{l}{8\beta\gamma}.$$

Die Wurzeln dieser transcendenten Gleichung bestimmen die Werthe von n, welche in die angegebenen Ausdrücke von E und i zu setzen sind. Die noch unbekannt bleibenden Constanten in diesen lassen sich bestimmen, wenn die Werthe von E und i für $t = 0$ gegeben sind.

Ein Blick auf den Ausdruck von i zeigt, dass an jeder Stelle des Schliessungsbogens der Strom zusammengesetzt ist aus einer unendlichen Zahl von oscillirenden Strömen; die Dauer einer einfachen Oscillation bei diesen Strömen ist gleich den Werthen, die der Ausdruck

$$\frac{\pi}{\sqrt{\frac{c^2 n^2}{2} - h^2}}$$

annimmt, wenn darin für n die Wurzeln der eben abgeleiteten transcendenten Gleichung gesetzt werden. Unter den Un-

ständen, unter denen Hr. Feddersen seine Versuche angestellt hat, ist die rechte Seite dieser Gleichung eine kleine Grösse; von den Werthen von $\frac{nl}{2}$ wird daher einer klein sein, während die anderen nahe π, 2π, 3π,.. sind. Bei diesen Versuchen ist weiter die Grösse h so klein, dass auch für den kleinsten Werth von n die Quadratwurzel, die die Oscillationsdauer bestimmt, reell ist; daraus folgt dann, dass eine von den Oscillationsdauern viel grösser ist als die übrigen. Man muss annehmen, dass die Messungen des Hrn. Feddersen sich auf die langsamsten Oscillationen bezogen haben; vielleicht rührten von den schnelleren die Unterabtheilungen her, die Hr. Feddersen in den breiteren Streifen seiner Photographieen des Funkens bemerkt hat [1]).

Betrachtet man die rechte Seite jener transcendenten Gleichung als unendlich klein, so wird für die kleinste Wurzel:

$$\left(\frac{nl}{2}\right)^2 = \frac{l}{8\beta\gamma},$$

das heisst

$$n = \frac{1}{\sqrt{2\beta\gamma l}},$$

also die grösste Oscillationsdauer

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\frac{c^2}{4\beta\gamma l} - h^2}}.$$

Dieser Ausdruck zeigt sich als identisch mit dem oben für T abgeleiteten, wenn man für h seinen Werth setzt und die Gleichung (5) berücksichtigt. Es ist oben nachgewiesen, dass für die hier in Rede stehenden Versuche dieser Ausdruck sich auf die in (6) angegebene Form bringen lässt, d. h. dass die Grösse h^2 unter dem Wurzelzeichen vernachlässigt werden kann. Dieses ist auch erlaubt, wenn man die Grösse

$$\frac{l}{8\beta\gamma}$$

nicht als unendlich klein betrachten will; auch dann darf

$$T = \frac{\pi\sqrt{2}}{cn}$$

[1]) Pogg. Ann. Bd. 116, S. 148.

gesetzt werden, wo n die kleinste Wurzel der mehrfach erwähnten transcendenten Gleichung bedeutet. Ein genauerer Näherungswerth dieser Wurzel, als der vorher angegebene, ist:

$$n = \frac{1}{\sqrt{2\beta\gamma l}}\left(1 - \frac{l}{48\beta\gamma}\right),$$

woraus folgt:

$$T = \frac{\pi\sqrt{4\beta\gamma l}}{c}\left(1 + \frac{l}{48\beta\gamma}\right).$$

Diese Gleichung erklärt die von Hrn. Feddersen gemachte Beobachtung, dass bei sehr langem Schliessungsbogen die Oscillationsdauer bei Verkleinerung der Flaschenzahl der Batterie langsamer als die Quadratwurzel aus dieser Zahl abnimmt. Bei einem Schliessungsbogen von 1343^m Länge und 1^{mm},35 Dicke fand Hr. Feddersen, als er einmal 16, dann 2 seiner Flaschen entlud, zwei Schwingungsdauern, deren Verhältniss 2,64 war; wären die Oscillationsdauern der Wurzel aus der Flaschenzahl proportional gewesen, so hätte dieses Verhältniss 2,83 sein müssen; die eben abgeleitete Gleichung giebt dasselbe = 2,53. Es zeigt sich also, dass das Glied, durch welches diese Gleichung von der Gleichung (6) sich unterscheidet, wenigstens von derselben Ordnung ist, wie die Abweichung von der Gleichung (6), welche die Beobachtung ergeben hat.

Zur Theorie der Bewegung der Elektricität in unterseeischen oder unterirdischen Telegraphendrähten.[1])

Sir William Thomson hat schon im Jahre 1855, von der Hypothese ausgehend, dass bei einem unterseeischen oder unterirdischen Telegraphendrahte der Einfluss der Induktion, die eine Folge der Aenderungen der Stromintensitäten ist, gegen den Einfluss der Ladungen vernachlässigt werden kann, den Satz abgeleitet, dass die Elektricität in einem solchen Drahte sich nach denselben Gesetzen fortpflanzt, wie die geleitete Wärme. Ich erlaube mir der Akademie eine Ableitung

[1]) Monatsbericht d. Akad. d. Wiss. zn Berlin vom 29. Oct. 1877.

dieses Satzes vorzulegen, die auf derselben Hypothese beruht, aber von allgemeineren Principien ausgeht, als die von Hrn. Thomson gegebene, und einige Formeln anzuknüpfen, die, soviel ich weiss, noch nicht veröffentlicht sind.

Die Grundlage der Rechnung sollen die Annahmen bilden, die Hr. Helmholtz in seiner Abhandlung im 72. Bande von Borchardt's Journal ausgesprochen hat. Es handle sich um ein System von sich berührenden, ruhenden Leitern, von denen jeder einzelne homogen ist, und die von einander sich unterscheiden durch ihre Leitungsfähigkeit und diëlektrische Polarisirbarkeit; an ihren Berührungsflächen mögen constante elektrische Differenzen stattfinden. Es seien x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes in einem der Leiter, u, v, w die Componenten der Stromdichtigkeit, α, β, γ die Componenten des auf die Volumeneinheit bezogenen elektrischen Moments in ihm zur Zeit t, λ die Leitungsfähigkeit, k eine, die diëlektrische Polarisirbarkeit des Leiters bestimmende Constante; man hat dann

$$(1)\qquad \begin{aligned} u &= -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \alpha &= -k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v &= -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \beta &= -k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ w &= -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \gamma &= -k \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned}$$

wo φ das elektrostatische Potential, eine Funktion von x, y, z und t bedeutet. Diese lässt sich als aus drei Theilen zusammengesetzt betrachten; der erste rührt her von der freien Elektricität, die theils im Innern, theils auf den Oberflächen der Leiter sich befindet, der zweite von der diëlektrischen Polarisation, der dritte endlich von den elektrischen Doppelschichten, die in den Berührungsflächen heterogener Leiter, zwischen denen elektrische Differenzen stattfinden, liegen. Es mögen diese Theile der Reihe nach U, V, W genannt werden. Um Ausdrücke für sie bilden zu können, bezeichne man durch ε die Dichtigkeit der freien Elektricität im Innern, durch e diejenige an der Oberfläche für den Punkt (x, y, z) zur Zeit t, durch ε' und e' die entsprechenden Grössen für einen andern Punkt (x', y', z'), durch $d\tau'$ ein Volumenelement, durch ds' ein Flächenelement, in dem der Punkt (x', y', z')

liegt, durch r die Entfernung der Punkte (x, y, z) und (x', y', z'); man hat dann

$$U = \int \frac{d\tau'}{r} \varepsilon' + \int \frac{ds}{r} e',$$

wo die Integrationen über den ganzen Raum und alle die Flächen auszudehnen sind, wo freie Electricität sich befindet. Bei entsprechender Bezeichnung ist ferner

$$V = \int d\tau' \left(\alpha' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \beta' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \gamma' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right),$$

und endlich ist

$$W = \int ds' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'} h',$$

wo ds' ein Element der Flächen bedeutet, an denen elektrische Differenzen ihren Sitz haben, n' eine Normale dieses Elementes und $4\pi h'$ die entsprechende elektrische Differenz.

Aus der Bedeutung der Zeichen u, v, w, ε, e folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

und, wenn man die Indices 1 und 2 auf zwei sich berührende Leiter bezieht und n_1 die nach dem Innern des ersten, n_2 die nach dem Innern des zweiten gerichtete Normale eines Elementes der Berührungsfläche nennt,

$$\begin{aligned} &u_1 \cos(n_1 x) + v_1 \cos(n_1 y) + w_1 \cos(n_1 z) \\ &+ u_2 \cos(n_2 x) + v_2 \cos(n_2 y) + w_2 \cos(n_2 z) = - \frac{\partial e}{\partial t}. \end{aligned}$$

Substituirt man in diese beiden Gleichungen die Werthe von u, v, w aus (1), so werden dieselben

$$\lambda \Delta \varphi = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \tag{2}$$

und

$$\lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} = \frac{\partial e}{\partial t}. \tag{3}$$

Es ist leicht aus den aufgestellten Relationen eine partielle Differentialgleichung und Grenzbedingungen zu bilden, welche nur die eine unbekannte Funktion φ enthalten. Zu diesem Zwecke sollen zunächst die drei Theile von φ einzeln betrachtet werden. Aus dem Ausdrucke von U folgt, dass

$$\Delta U = - 4\pi \varepsilon,$$

und ferner, dass U selbst überall stetig ist, seine Differential-

quotienten nach x, y, z aber an der Berührungsfläche zweier verschiedenen Leiter so unstetig sind, dass

$$\frac{\partial U}{\partial n_1} + \frac{\partial U}{\partial n_2} = -4\pi e.$$

Der für V aufgestellte Ausdruck lässt sich durch partielle Integration so umgestalten, dass man erhält

$$V = -\int \frac{\partial \tau'}{r}\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial x'} + \frac{\partial \beta'}{\partial y'} + \frac{\partial \gamma'}{\partial z'}\right)$$
$$-\int \frac{ds'}{r}\Big((\alpha' \cos(n'x) + \beta' \cos(n'y) + \gamma' \cos(n'z)\Big),$$

wo ds' ein Element der Oberfläche irgend eines der Leiter, n' die nach dem Innern dieses gerichtete Normale von ds' bedeutet. Hieraus folgt, dass

$$\Delta V = 4\pi\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right),$$

dass V selbst überall stetig ist, seine Differentialquotienten aber an der Berührungsfläche zweier Leiter so unstetig sind, dass

$$\frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{\partial V}{\partial n_2} = 4\pi\Big(\alpha_1 \cos(n_1 x) + \beta_1 \cos(n_1 y) + \gamma_1 \cos(n_1 z)$$
$$+ \alpha_2 \cos(n_2 x) + \beta_2 \cos(n_2 y) + \gamma_2 \cos(n_2 z)\Big).$$

Bei Rücksicht auf (1) werden diese beiden Gleichungen

$$\Delta V = -4\pi k \Delta \varphi$$

und

$$\frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{\partial V}{\partial n_2} = -4\pi\left(k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} + k_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n_2}\right).$$

Der Ausdruck von W endlich zeigt, dass

$$\Delta W = 0,$$

und dass an der Grenzfläche zweier Leiter W so unstetig ist, dass

$$W_1 - W_2 = -4\pi h,$$

die Differentialquotienten von W aber stetig sind, dass also

$$\frac{\partial W}{\partial n_1} + \frac{\partial W}{\partial n_2} = 0.$$

Nun war

$$\varphi = U + V + W$$

gesetzt; es ergiebt sich also für φ, dass

$$\Delta \varphi = -4\pi\varepsilon - 4\pi k \Delta \varphi,$$

also, wenn man nach t differenzirt und (2) benutzt,

(4) $$(1 + 4\pi k)\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial t} + 4\pi\lambda\Delta\varphi = 0,$$

dass ferner an der Berührungsfläche zweier Leiter

(5) $$\varphi_1 - \varphi_2 = -4\pi h$$

und

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial n_2} = -4\pi e - 4\pi\left(k_1\frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + k_2\frac{\partial\varphi}{\partial n_2}\right)$$

ist. Die letzte dieser Gleichungen wird durch Differentiation nach t und bei Rücksicht auf (3)

6) $$(1+4\pi k_1)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + (1+4\pi k_2)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial n_2} + 4\pi\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + 4\pi\lambda_2\frac{\partial\varphi}{\partial n_2} = 0.$$

Man hat also für φ die partielle Differentialgleichung (4) und die beiden Grenzbedingungen (5) und (6) gefunden. Durch besondere Annahmen sollen diese nun vereinfacht werden.

Bezeichnet man durch φ_0 den Werth von φ für $t = 0$, so folgt aus (4)

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 e^{-\frac{4\pi\lambda}{1+4\pi k}t},$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Es verschwindet also $\Delta\varphi$ immer, wenn es für $t = 0$, d. h. für einen Werth von t, verschwindet. Die Gleichung $\Delta\varphi = 0$ ist gleichbedeutend mit der Gleichung $\varepsilon = 0$ wegen der Relation zwischen $\Delta\varphi$ und ε, aus der eben (4) abgeleitet ist. Es werde angenommen, dass in einem Augenblick keine freie Elektricität im Innern der betrachteten Leiter vorhanden ist, dann befindet sich hier nie freie Elektricität und an Stelle von (4) tritt die partielle Differentialgleichung

$$\Delta\varphi = 0.$$

Ferner möge vorausgesetzt werden, dass elektrische Differenzen in dem betrachteten Systeme nicht wirksam sind, die Grössen h also verschwinden; dann lässt sich die Gleichung (5) durch die Bedingung ersetzen, dass φ überall stetig ist. Hierzu kommt die Gleichung (6), die, wenn man

$$\frac{1+4\pi k}{4\pi} = \mu$$

setzt, also durch $4\pi\mu$ die sogenannte Diëlektricitätsconstante bezeichnet,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_1\frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + \mu_2\frac{\partial\varphi}{\partial n_2}\right) + \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + \lambda_2\frac{\partial\varphi}{\partial n_2} = 0$$

wird. Durch die Annahme, dass φ in der Art von t abhängt, dass es den Faktor

$$e^{\nu t}$$

enthält, wo ν eine Constante bedeutet, verwandelt dieselbe sich in

$$(\lambda_1 + \nu\mu_1)\frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + (\lambda_2 + \nu\mu_2)\frac{\partial\varphi}{\partial n_2} = 0.$$

Es soll diese Annahme gemacht und ν imaginär gewählt werden; es wird dann φ complex; aber in dem reellen Theile desselben hat man eine reelle Lösung der Gleichungen (4), (5), (6), da diese Gleichungen linear und homogen sind und nur reelle Coëfficienten enthalten. Das Leitersystem sei so gestaltet, dass alle Berührungsflächen verschiedener Leiter kreisförmige Cylinder sind, die die z-Axe zur gemeinschaftlichen Axe haben, und es sei, wenn

$$\sqrt{x^2+y^2} = \varrho$$

gesetzt wird, φ nur eine Funktion von t, z und ϱ. Die partielle Differentialgleichung für φ ist dann

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = 0$$

und die Grenzbedingungen sagen aus, dass an den Berührungsflächen

$$\varphi \text{ und } (\lambda + \nu\mu)\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}$$

stetig sind. Eine Lösung der partiellen Differentialgleichung, die diesen Grenzbedingungen sich anpassen lässt, erhält man, wenn man annimmt, dass φ gleich dem Produkt aus

$$e^{\pm ims}$$

in eine von z unabhängige Grösse ist, wo $i = \sqrt{-1}$ und m eine Constante sein soll, deren reeller Theil positiv ist. Es muss dann

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} - m^2\varphi = 0$$

sein und man genügt der partiellen Differentialgleichung, indem man

$$\varphi = e^{\nu t \pm ims}\left(AP(m\varrho) + BQ(m\varrho)\right) \tag{7}$$

setzt, wo A und B willkürliche Constanten bedeuten, die für

die verschiedenen Leiter verschiedene Werthe haben können, und P und Q durch die Gleichungen definirt sind

$$P(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2.4)^2} + \cdots$$

$$Q(x) = -P(x)\left(\log\frac{x}{2} + 0{,}577.\right) + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4(1+\frac{1}{2})}{(2.4)^2} + \cdots\cdots$$

Zur Vervollständigung der Definition von $Q(x)$ muss noch hinzugefügt werden, dass der darin vorkommende $\log\frac{x}{2}$ reell sein soll, wenn x reell und positiv ist, und sich stetig ändern soll, wenn x sich ändert. Da der reelle Theil von m positiv bleibt, so ist hierdurch $Q(x)$ eindeutig bestimmt für alle Werthe, die sein Argument in der Gleichung (7) erhält. Es hat dabei $Q(m\rho)$ die Eigenschaft für $\rho = \infty$ zu verschwinden; für $\rho = 0$ ist $Q(m\rho)$ unendlich; $P(m\rho)$ dagegen bleibt für $\rho = 0$ endlich und wird unendlich für $\rho = \infty$.

Der betrachtete Fall soll nun dahin specialisirt werden, dass nur drei Leiter vorhanden sind, ein Kupferdraht vom Radius ρ_1, eine Hülle von Guttapercha, deren äusserer Radius ρ_2 ist, und ausserhalb dieser eine, sich ins Unendliche erstreckende Wassermasse. Auf den Kupferdraht möge der Index 1, auf das Wasser der Index 2 bezogen werden, während die auf die Guttapercha bezüglichen Grössen ohne Index bleiben sollen. Wegen der erwähnten Eigenschaften der Funktionen P und Q muss dann

$$B_1 = 0 \text{ und } A_2 = 0$$

sein und die Stetigkeitsbedingungen sind, wenn man

$$\frac{dP(x)}{dx} = P'(x),\ \frac{dQ(x)}{dx} = Q'(x)$$

setzt,

$$A\,P(m\rho_1) + B\,Q(m\rho_1) = A_1\,P(m\rho_1)$$
$$A\,P(m\rho_2) + B\,Q(m\rho_2) = B_2\,Q(m\rho_2)$$
$$(\lambda + \nu\mu)\big(A\,P'(m\rho_1) + B\,Q'(m\rho_1)\big) = (\lambda_1 + \nu\mu_1)\,A_1\,P'(m\rho_1)$$
$$(\lambda + \nu\mu)\big(A\,P'(m\rho_2) + B\,Q'(m\rho_2)\big) = (\lambda_2 + \nu\mu_2)\,B_2\,Q'(m\rho_2).$$

Daraus folgt, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda + \nu\mu - \lambda_1 - \nu\mu_1, & (\lambda + \nu\mu)\dfrac{Q'(m\rho_1)}{P'(m\rho_1)} - (\lambda_1 + \nu\mu_1)\dfrac{Q(m\rho_1)}{P(m\rho_1)} \\ (\lambda + \nu\mu)\dfrac{P'(m\rho_2)}{Q'(m\rho_2)} - (\lambda_2 + \nu\mu_2)\dfrac{P(m\rho_2)}{Q(m\rho_2)}, & \lambda + \nu\mu - \lambda_2 - \nu\mu_2 \end{vmatrix}$$

verschwindet. Der Modul von ν soll so klein sein, dass ν gegen λ_1 und λ_2 vernachlässigt werden kann; da μ, μ_1 und μ_2 nicht sehr grosse Zahlen sind und λ sich als unendlich klein gegen λ_1 und λ_2 betrachten lässt, so wird dann diese Gleichung

$$\begin{vmatrix} \lambda_1, (\lambda + \nu\mu)\frac{Q'(m\varrho_1)}{P'(m\varrho_1)} - \lambda_1 \frac{Q(m\varrho_1)}{P(m\varrho_1)} \\ (\lambda + \nu\mu)\frac{P'(m\varrho_2)}{Q'(m\varrho_2)} - \lambda_2 \frac{P(m\varrho_2)}{Q(m\varrho_2)}, \lambda_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Nun werde die Hypothese gemacht, dass der Modul von $m\varrho_1$, also auch der von $m\varrho_2$, als unendlich klein angesehen werden kann; die Rechnung wird zeigen, dass es einen solchen Werth von m giebt. Setzt man der Kürze wegen

$$\tfrac{1}{2} e^{0{,}577} = \gamma,$$

so hat man unter der genannten Hypothese

$$P(m\varrho_1) = 1 \qquad P'(m\varrho_1) = \frac{m\varrho_1}{2}$$

$$Q(m\varrho_1) = -\log\gamma\, m\varrho_1 \qquad Q'(m\varrho_1) = -\frac{1}{m\varrho_1}$$

$$P(m\varrho_2) = 1 \qquad P'(m\varrho_2) = \frac{m\varrho_2}{2}$$

$$Q(m\varrho_2) = -\log\gamma\, m\varrho_2 \qquad Q'(m\varrho_2) = -\frac{1}{m\varrho_2}.$$

Daher wird die Gleichung zwischen ν und m

$$\begin{vmatrix} \lambda_1, (\lambda + \nu\mu)\frac{2}{m^2\varrho_1^2} - \lambda_1 \log\gamma\, m\varrho_1 \\ \lambda + \nu\mu)\frac{m^2\varrho_2^2}{2} - \frac{\lambda_2}{\log\gamma m\varrho_2}, \lambda_2 \end{vmatrix} = 0$$

oder da

$$(\lambda + \nu\mu)\frac{m^2\varrho_2^2}{2} \text{ gegen } \frac{\lambda_2}{\log\gamma m\varrho_2}$$

unendlich klein ist,

$$\lambda + \nu\mu + \lambda_1 m^2 \frac{\varrho_1^2}{2} \log\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = 0. \tag{8}$$

Diese Gleichung ist von derselben Form, wie eine, auf die man bei der Theorie der Wärmeleitung in einem Stabe geführt wird, woraus der Eingangs erwähnte, zuerst von Hrn. Thomson ausgesprochene Satz folgt.

Für das Innere des Drahtes ist bis auf unendlich Kleines

$$P(m\varrho) = 1$$

und daher nach (7)

$$\varphi = Ae^{\nu t \pm ims},$$

wo A die oben mit A_1 bezeichnete Constante bedeutet, oder auch, wenn B eine neue Constante ist,

$$\varphi = Ae^{\nu t + ms} + Be^{\nu t - ms}.$$

Nun mache man

$$\nu = in,$$

wo n eine reelle, positive Grösse bedeuten soll; dann wird

$$\varphi = Ae^{i(nt+ms)} + Be^{i(nt-ms)}. \tag{9}$$

Um aus dieser complexen Lösung der für φ aufgestellten Bedingungen eine reelle zu finden, mache man

$$m = \alpha - i\beta \quad , \quad A = C - iC' \quad , \quad B = D - iD' \ ,$$

wo α positiv sein muss, da der reelle Theil von m positiv sein sollte, und setze $\varphi =$ dem reellen Theile des in (9) gegebenen Ausdrucks. So erhält man

$$\begin{aligned}\varphi = {} & e^{\beta s}\left(C\cos(nt+\alpha z) + C'\sin(nt+\alpha z)\right) \\ & + e^{-\beta s}\left(D\cos(nt-\alpha z) + D'\sin(nt-\alpha z)\right).\end{aligned} \tag{10}$$

Diese Gleichung stellt zwei Wellenzüge dar, von denen der eine in der Richtung der z-Achse, der andere in der entgegengesetzten Richtung mit der Geschwindigkeit

$$\frac{n}{\alpha}$$

fortschreitet, und bei denen die Höhe einer jeden Welle bei ihrem Fortschreiten in einem Verhältniss abnimmt, das durch den Werth von β bestimmt ist. Die Dauer der Periode, die φ in Bezug auf die Zeit hat, ist

$$\frac{2\pi}{n}.$$

Zur Bestimmung von α und β hat man der Gleichung (9) zufolge

$$\beta^2 - \alpha^2 = \frac{2i}{\lambda_1 \varphi_1^2 \log \frac{\varrho_2}{\varrho_1}}$$

$$\beta\alpha = \frac{n\mu}{\lambda_1 \varphi_1^2 \log \frac{\varrho_2}{\varrho_1}};$$

die zweite von diesen Gleichungen zeigt, dass β positiv ist, da α es ist. Ist λ_1 die Leitungsfähigkeit der Guttapercha, so wird

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{n\mu}{\lambda_1 \varrho_1^2 \log \frac{\varrho_2}{\varrho_1}}}.$$

Nimmt λ von Null an zu, so muss von den Grössen α und β zufolge der zweiten der für sie aufgestellten Gleichungen die eine zu-, die andere abnehmen; zufolge der ersten nimmt β zu und α ab. Je grösser die Leitungsfähigkeit der Guttapercha ist, um so grösser ist also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen, um so schneller nehmen diese aber auch an Höhe bei ihrem Fortschreiten ab. Ist λ sehr klein gegen n, so wird

$$\alpha = \sqrt{\frac{n\mu}{\lambda_1 \varrho_1^2 \log \frac{\varrho_2}{\varrho_1}}} \left(1 - \frac{\lambda}{2n\mu}\right), \quad \beta = \sqrt{\frac{n\mu}{\lambda_1 \varrho_1^2 \log \frac{\varrho_2}{\varrho_1}}} \left(1 + \frac{\lambda}{2n\mu}\right).$$

Wenn der Draht in der Richtung der positiven z-Axe als unbegrenzt anzusehen ist, so müssen die Constanten C und C' in der Gleichung (10) gleich Null gesetzt werden, damit innerhalb des Drahtes φ nicht unendlich werde. Ist überdies

(11) für $z = 0$ $\varphi = \cos nt$,

so folgt aus (10)

$$\varphi = e^{-\beta z} \cos (nt - \alpha z).$$

Es soll nun noch der Fall behandelt werden, dass die Bedingung (11) besteht, der Draht aber bei $z = l$ begrenzt und hier mit der einen Belegung eines Condensators verbunden ist, dessen andere Belegung mit der Erde in gut leitender Verbindung steht. Ist c die Capacität des Condensators, so muss dann

(12) für $z = l$ $c \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\pi \varrho_1^2 \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z}$

sein, da, wenn J die Intensität des Stromes in irgend einem Querschnitt des Drahtes bezeichnet,

(13) $$J = -\pi \varrho_1^2 \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

ist.

Zunächst werde der in 9) für φ gegebene complexe Ausdruck der Bedingung (12) und der Bedingung angepasst, dass

(14) für $z = 0$ $\varphi = e^{int}$

ist; der reelle Theil davon genügt dann den Gleichungen (10), (11), (12). Setzt man

$$\frac{cn}{\pi \varrho_1^2 \lambda_1} = \gamma,$$

so geben die Gleichungen (12) und (14) zwischen den in (9) vorkommenden Constanten A und B die Relationen

$$\begin{aligned} A(\gamma+m)e^{iml} + B(\gamma-m)e^{-iml} &= 0 \\ A \qquad\qquad + B \qquad\qquad &= 1; \end{aligned}$$

berechnet man aus diesen A und B und substituirt ihre Werthe in (9), so erhält man

$$\varphi = e^{imt}\,\frac{(\gamma+m)e^{iml(l-z)} - (\gamma-m)e^{-iml(l-z)}}{(\gamma+m)e^{iml} - (\gamma-m)e^{-iml}}.$$

Von besonderem Interesse ist die Kenntniss der Stromintensität J; aus (13) folgt, dass diese gleich dem reellen Theile von

$$e^{imt}\pi\varrho_1^2\lambda_1\, im\,\frac{(\gamma+m)e^{iml(l-z)} + (\gamma-m)e^{-iml(l-z)}}{(\gamma+m)e^{iml} - (\gamma-m)e^{-iml}}$$

ist. Diesen Ausdruck setze man

$$= e^{imt}\,a\,(\cos\delta + i\sin\delta),$$

wo a positiv sein soll; dann ist also

$$J = a\cos(nt+\delta).$$

Die beiden Grössen a und δ, die Amplitude und die Phase der Stromintensität, findet man auf die folgende Weise. Man mache

$$\begin{aligned} (\gamma+m)e^{iml(l-z)} + (\gamma-m)e^{-iml(l-z)} &= M(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \\ (\gamma+m)e^{iml} - (\gamma-m)e^{-iml} &= N(\cos\nu + i\sin\nu), \end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned} M\cos\vartheta &= e^{\beta l(l-z)}\big((\gamma+\alpha)\cos\alpha(l-z) + \beta\sin\alpha(l-z)\big) \\ &\quad + e^{\beta l(l-z)}\big((\gamma-\alpha)\cos\alpha(l-z) + \beta\sin\alpha(l-z)\big), \\ M\sin\vartheta &= e^{\beta l(l-z)}\big((\gamma+\alpha)\sin\alpha(l-z) - \beta\cos\alpha(l-z)\big) \\ &\quad - e^{-\beta l(l-z)}\big((\gamma-\alpha)\sin\alpha(l-z) - \beta\cos\alpha(l-z)\big), \\ N\cos\nu &= e^{\beta l}\big((\gamma+\alpha)\cos\alpha l + \beta\sin\alpha l\big) \\ &\quad - e^{-\beta l}\big((\gamma-\alpha)\cos\alpha l + \beta\sin\alpha l\big), \\ N\sin\nu &= e^{\beta l}\big((\gamma+\alpha)\sin\alpha l - \beta\cos\alpha l\big) \\ &\quad + e^{-\beta l}\big((\gamma-\alpha)\sin\alpha l - \beta\cos\alpha l\big), \end{aligned}$$

mit der Bestimmung, dass M und N positiv sind; dann ist

$$a = \pi\varrho_1^2\lambda_1\,\frac{M}{N}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

$$\delta = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta} + \vartheta - \nu,$$

wo der actg im ersten Quadranten zu wählen ist.

M und ϑ sind von z abhängig, während alle übrigen in den Ausdrücken von a und δ vorkommenden Grössen davon unabhängig sind. Für $z = l$ hat man

$$M = 2\gamma \quad , \quad \vartheta = 0,$$

für $z = 0$

$$M\cos\vartheta = e^{\beta l}\big((\gamma+\alpha)\cos\alpha l + \beta\sin\alpha l\big) + e^{-\beta l}\big((\gamma-\alpha)\cos\alpha l + \beta\sin\alpha l\big)$$

$$M\sin\vartheta = e^{\beta l}\big((\gamma+\alpha)\sin\alpha l - \beta\cos\alpha l\big) - e^{-\beta l}\big((\gamma-\alpha)\sin\alpha l - \beta\cos\alpha l\big).$$

Nimmt man die Capacität des Condensators, also auch γ, als unendlich gross an, so hat man denselben Fall, wie wenn das Ende des Drahtes $z = l$ unmittelbar mit der Erde in gut leitende Verbindung gesetzt ist. M und N erhalten dann den Faktor γ; unterdrückt man diesen, was geschehen kann, ohne die Richtigkeit der Gleichungen für a und δ zu beeinträchtigen, da in diesen nur das Verhältniss von M und N vorkommt, so erhält man

$$M\cos\vartheta = (e^{\beta(l-z)} + e^{-\beta(l-z)})\cos\alpha\,(l-z)$$
$$M\sin\vartheta = (e^{\beta(l-z)} - e^{-\beta(l-z)})\sin\alpha\,(l-z)$$
$$N\cos\eta = (e^{\beta l} - e^{-\beta l})\cos\alpha l$$
$$N\sin\eta = (e^{\beta l} + e^{-\beta l})\sin\alpha l.$$

Ueber den inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen.[1])

Die Gleichungen, auf welche die von Poisson aufgestellte mathematische Theorie des in weichem Eisen inducirten Magnetismus geführt hat, sind für den Fall, dass der Eisenkörper ein Rotations-Ellipsoïd ist, von Neumann in Crelle's Journal, Bd. 37, allgemein aufgelöst. Ein unbegrenzter Cylinder kann als ein Rotations-Ellipsoïd mit unendlich grosser Excentricität betrachtet werden; die Reihen-Entwickelungen von Neumann verlieren aber ihre Anwendbarkeit, wenn man in

[1]) Crelle's Journal. Bd. 48. 1853.

denselben die Excentricität unendlich gross setzt, ausser in dem Falle, dass der Mittelpunkt der magnetisirenden Kräfte in unendlicher Entfernung liegt. Es soll hier die Lösung jener Gleichungen für einen unbegrenzten Cylinder unter der Annahme, dass die Mittelpunkte der inducirenden Kräfte im Endlichen liegen, auf einem andern Wege entwickelt werden.

§ 1.

Nach der Theorie von Poisson finden für jeden Punkt eines Eisenkörpers, der durch Vertheilung magnetisirt ist, die beiden Gleichungen:

(1) $$0 = V + \varphi + U$$

(2) $$U = -k\int \frac{ds}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varphi}{dN_i}$$

statt. In denselben bedeutet V das Potential der magnetisirenden Kräfte, k eine von der Natur des Eisens abhängige Constante, φ eine Funktion, welche den magnetischen Zustand des Körpers dadurch bestimmt, dass $k\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $k\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $k\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ die magnetischen Momente, bezogen auf die Volumen-Einheit, in dem Punkte sind, welcher x, y, z zu rechtwinkligen Coordinaten hat; ds ist ein Element der Oberfläche des Eisenkörpers, N_i ein unbestimmtes Stück der nach Innen gerichteten Normale von ds, $\frac{\partial \varphi}{\partial N_i}$ der Werth des nach N_i genommenen Differentialquotienten von φ für $N_i = 0$; ε die Entfernung des Elements ds von dem Punkte, auf welchen sich U bezieht; die Integration endlich ist über die ganze Oberfläche des Körpers auszudehnen. Hat man diesen beiden Gleichungen gemäss φ bestimmt, so stellt der Ausdruck für U in der Gleichung (2), sobald man in ihm unter ε die Entfernung des Elements ds von einem äusseren Punkte versteht, das Potential des magnetisirten Eisenkörpers in Beziehung auf diesen Punkt dar.

Ich werde die Gleichungen (1) und (2) zunächst auf eine andere Form bringen, die ihre Lösung in dem gegenwärtigen Falle erleichtert.

Nach einem von Gauss bewiesenen Satze kann jedes Potential von Massen, die ausserhalb eines begrenzten Raumes

liegen, bezogen auf einen Punkt in diesem Raume, als herrührend von Massen auf der Oberfläche desselben betrachtet werden. V und φ sind Potentiale von Massen, die ausserhalb des Eisenkörpers liegen; sie sollen als von Massenvertheilungen auf der Oberfläche des Körpers herrührend angesehen werden. Bezogen auf einen äusseren Punkt sollen V und φ die Potentiale von denselben Massenvertheilungen auf der Oberfläche bedeuten. Bezeichnet N_a ein unbestimmtes Stück der nach Aussen gerichteten Normale von ds, und $\frac{\partial \varphi}{\partial N_a}$ den Werth des nach N_a genommenen Differentialquotienten von φ für $N_a = 0$, so ist die Dichtigkeit der Masse, von welcher φ herrührt, in dem Elemente ds:

$$-\frac{1}{4\pi}\cdot\left(\frac{\partial \varphi}{\partial N_i}+\frac{\partial \varphi}{\partial N_a}\right).$$

Die Dichtigkeit der Masse, von welcher V herrührt, ist bei entsprechender Bezeichnung:

$$-\frac{1}{4\pi}\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial N_i}+\frac{\partial V}{\partial N_a}\right).$$

Ferner ist U ein Potential von Massen, die auf der Oberfläche liegen, und deren Dichtigkeit in dem Elemente ds,

$$-k\frac{\partial \varphi}{\partial N_i}$$

ist; die Dichtigkeit der Massenvertheilung auf der Oberfläche, deren Potential $V+\varphi+U$ ist, ist daher:

$$-\frac{1}{4\pi}\cdot\left\{\frac{\partial V}{\partial N_i}+\frac{\partial V}{\partial N_a}+(1+4\pi k)\frac{\partial \varphi}{\partial N_i}+\frac{\partial \varphi}{\partial N_a}\right\}.$$

Da das genannte Potential für alle Punkte des Eisenkörpers $= 0$ ist, so muss diese Dichtigkeit für alle Punkte der Oberfläche verschwinden; d. h. es muss für alle diese Punkte die Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial N_i}+\frac{\partial V}{\partial N_a}+(1+4\pi k)\frac{\partial \varphi}{\partial N_i}+\frac{\partial \varphi}{\partial N_a}=0 \tag{3}$$

stattfinden. Diese Gleichung gilt zunächst nur für den Fall, dass der Eisenkörper ein endlicher ist; doch lässt sie sich auch auf einen unbegrenzten Cylinder anwenden, sobald die Kräfte, durch welche derselbe magnetisirt wird, von Polen ausgehen, die in der Endlichkeit liegen.

§ 2.

Um für den bezeichneten Fall φ aus der Gleichung (3) ermitteln zu können, sollen zuerst Entwickelungen für ein Potential von Massen abgeleitet werden, die auf der Cylinderfläche liegen, dessen Werth in dieser Fläche gegeben ist, in Beziehung auf einen inneren und auf einen äusseren Punkt.

Es seien x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes in Beziehung auf ein Coordinatensystem, dessen x-Axe die Axe des Cylinders ist, und es sei V das Potential in Beziehung auf diesen Punkt. Soll angedeutet werden, dass das Potential sich auf einen Punkt innerhalb oder ausserhalb des Cylinders bezieht, so soll dem V der Index i oder a beigefügt werden.

Es ist

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

oder, wenn man

$$y = r\cos\vartheta\,, \quad z = r\sin\vartheta$$

setzt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = 0.$$

Es handelt sich darum V_i so zu bestimmen, dass es innerhalb des Cylinders dieser partiellen Differentialgleichung genügt, und für die Oberfläche in eine gegebene Funktion von x und ϑ übergeht; desgleichen V_a so zu bestimmen, dass es ausserhalb des Cylinders derselben Gleichung Genüge thut, und für die Oberfläche derselben Funktion von x und ϑ gleich wird.

Eine particuläre Lösung der Gleichung (4) ist folgende:

$$V = W_m \cos m\vartheta + W'_m \sin m\vartheta\,,$$

wo m eine ganze Zahl sein soll, W_m und W'_m Funktionen von x und r bedeuten, die der Gleichung

$$\frac{\partial^2 W_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial W_m}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2}\cdot W_m = 0$$

genügen.

Man kann setzen:

$$W_m = T_{nm}\,(G_{nm}\,.\cos nx + H_{nm}\,.\sin nx)$$
$$W'_m = T_{nm}\,(G'_{nm}\,.\cos nx + H'_{nm}\,.\sin nx),$$

wo n, G_{nm}, H_{nm}, G'_{nm}, H'_{nm} willkürliche Constanten sind und T_{nm} eine Funktion von r ist, die der Gleichung:

$$(5) \qquad \frac{d^2 T_{nm}}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d T_{nm}}{dr} - \left(\frac{m^2}{r^2} + n^2\right) T_{nm} = 0$$

Genüge thut.

Ist $S_m(\varrho)$ eine Funktion von ϱ, welche die Gleichung:

$$(6) \qquad \varrho \frac{d^2 S_m}{d\varrho^2} + (m+1) \frac{d S_m}{d\varrho} - S_m = 0$$

erfüllt, so genügt man der Gleichung (5) durch:

$$T_{nm} = r^m \cdot S_m\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right).$$

Das allgemeine Integral der Gleichung (6) ist von Kummer in Crelle's Journal, (Bd. 17, S. 229), in folgender Gestalt angegeben:

$$S_m = a \cdot \psi(1+m, \varrho) + b\varrho^{-m} \cdot \psi(1-m, \varrho);$$

hier sind a und b die willkürlichen Constanten, und die Funktion ψ wird durch die Gleichung:

$$\psi(\alpha, \varrho) = 1 + \frac{\varrho}{\alpha \cdot 1} + \frac{\varrho^2}{\alpha \cdot \alpha+1 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{\varrho^3}{\alpha \cdot \alpha+1 \cdot \alpha+2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

definirt. Ich setze

$$\psi(1+m, \varrho) = P_m(\varrho);$$

dann ist

$$T_{nm} = r^m P_m\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right)$$

ein particuläres Integral der Gleichung (5), und zwar ein solches, welches für $\varrho = \infty$ unendlich gross wird, und für $\varrho = 0$ endlich bleibt oder verschwindet.

Kummer zeigt a. a. O., dass die Gleichung (6) auch durch:

$$S_m = \int_0^\infty u^{-m-1} \cdot e^{-u} \cdot e^{-\frac{\varrho}{u}} du,$$

erfüllt wird, und er findet den Werth dieses Integrals:

(7) $= \Pi(-m-1)\psi(1+m, \varrho) + \Pi(m-1)\varrho^{-m}\psi(1-m, \varrho)$,

wo $\Pi(z)$ die von Gauss in seiner Abhandlung *„circa seriem infinitam“* .... in den Comment. Goetting. vom Jahre 1812, betrachtete Funktion bedeutet.

Der Ausdruck (7) soll durch

$$Q_m(\varrho)$$

bezeichnet werden; dann ist auch

$$T_{nm} = r^m Q_m \left(\frac{n^2 r^2}{4}\right)$$

ein particuläres Integral der Gleichung (5) und zwar ein solches, welches für $r = 0$ unendlich gross wird, aber für $r = \infty$ verschwindet.

Der Ausdruck (7) stellt sich, wenn m eine ganze Zahl ist, welcher Fall hier gerade in Betracht kommt, in einer unbestimmten Form dar. Man findet seinen Werth, indem man in ihm $m + \varepsilon$ statt m schreibt, wo ε eine unendlich kleine Grösse ist.

Setzt man, mit Gauss:

$$\frac{d \log \Pi(\varepsilon)}{dz} = \psi(z)$$

und benutzt die Gleichungen:

$$\Pi(z+1) = (z+1).\Pi(z) \ , \ \Pi(0) = 1,$$

so ergiebt sich:

$$\Pi(-m-\varepsilon-1) = \frac{(-1)^{m+1}}{1.2....m}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \psi(m)\right),$$

und, wenn m nicht $= 0$ ist:

$$\Pi(m+\varepsilon-1) = 1.2..m-1\left(1 + \varepsilon\,\psi(m-1)\right).$$

Dabei ist:

$$\psi(m) = \psi(0) + 1 + \tfrac{1}{2} + . + \frac{1}{m}$$

und

$$\psi(0) = -\,0{,}577\ 2157\ldots$$

Ferner findet man

$$\psi\left(1+m+\varepsilon, \varrho\right) = \psi(1+m, \varrho)$$

$$- \varepsilon\left\{ \varrho \frac{\frac{1}{m+1}}{m+1.1} + \varrho^2 \frac{\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}}{m+1.m+2.1.2} + \varrho^3 \frac{\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}}{m+1.m+2.m+3.1.2.3} + . \right\};$$

$$\psi(1-m\varepsilon, \varrho) = 1 - \frac{\varrho}{m-1.1} + \frac{\varrho^2}{m+1.m+2.1.2}$$

$$- . + \frac{(-1)^m \varrho^{m-1}}{m-1.m-2..1.1.2..m-1}$$

$$+\frac{(-1)^m\varrho^m}{(1.2..m-1)^2m}\left\{\psi(1+m,\varrho)\left(\frac{1}{\varepsilon}-1-\tfrac{1}{2}-.-\frac{1}{m-1}\right)\right.$$

$$\left.+\varrho\,\frac{1}{m+1.1}+\varrho^2\frac{1+\frac{1}{2}}{m+1.m+2.1.2}+\varrho^3\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{m+1.m+2.m+3.1.2.3}+.\right\}.$$

Endlich ist

$$\varrho^{-m-\varepsilon}=\varrho^{-m}(1-\varepsilon\,\log\,\varrho).$$

Substituirt man diese Werthe in den Ausdruck (7), so ergiebt sich: [1])

$$Q_m(\varrho)=1.2..m-1.\varrho^{-m}\left\{1-\frac{\varrho}{m-1.1}+\frac{\varrho^2}{m-1.m-2.1.2}-.\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{m-1}\varrho^{m-1}}{m-1.m-2..1.1.2..m-1}\right\}$$

$$+\frac{(-1)^m}{1.2..m}\left\{\psi(1+m,\varrho)\left(\psi(m)+\psi(0)-\log\varrho\right)+\varrho\frac{\frac{1}{m+1}+1}{m+1.1}\right.$$

$$\left.+\varrho^2\frac{\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+1+\frac{1}{2}}{m+1.m+2.1.2}+\varrho^3\frac{\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{m+1.m+2.m+3.1.2.3}+.\right\}.$$

Für den Fall $m=0$, hat man:

$$Q_0(\varrho)=\Pi(-\varepsilon-1)\psi(1+\varepsilon,\varrho)+\Pi(\varepsilon-1)\varrho^{-\varepsilon}\psi(1-\varepsilon,\varrho),$$

$$\Pi(-\varepsilon-1)=-\frac{1}{\varepsilon}+\psi(0),$$

$$\Pi(\varepsilon-1)=+\frac{1}{\varepsilon}+\psi(0),$$

$$\psi(1+\varepsilon,\varrho)=\psi(1,\varrho)-\varepsilon\left\{\varrho\,\frac{1}{1^2}+\varrho^2\frac{1+\frac{1}{2}}{(1.2)^2}+\varrho^3\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{(1.2.3)^2}+\ldots\right\}$$

$$\psi(1-\varepsilon,\varrho)=\psi(1,\varrho)+\varepsilon\left\{\varrho\,\frac{1}{1^2}+\varrho^2\frac{1+\frac{1}{2}}{(1.2)^2}+\varrho^3\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{(1.2.3)^2}+\ldots\right\}$$

$$\varrho^{-\varepsilon}=1-\varepsilon\log\varrho;$$

daraus folgt:

$$Q_0(\varrho)=2\left\{\varrho\,\frac{1}{1^2}+\varrho^2\frac{1+\frac{1}{2}}{(1.2)^2}+\varrho^3\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{(1.2.3)^2}+\ldots\right\}$$

$$+(2\psi(0)-\log\varrho)\psi(1,\varrho).$$

---

[1]) Es ist hier ein Fehler, der sich im ursprünglichen Texte befindet, verbessert.

Es giebt für $Q_m(\varrho)$ eine einfache *semiconvergente* Reihe, die nach fallenden Potenzen von ϱ fortschreitet, und die hier beiläufig angeführt werden mag. Kummer hat in der zitierten Abhandlung gezeigt, dass

$$Q_m(\varrho) = \frac{\sqrt{\pi}\,\varrho^{-m} e^{-2\sqrt{\varrho}}}{2^{2m-1}\Pi(-m-\frac{1}{2})} \int_0^\infty (u+u^2)^{-m-\frac{1}{2}} e^{-u\sqrt{\varrho}}\,du,$$

und dass

$$\int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}e^{-ux}\,du}{(1+u)^\beta} = \Pi(\alpha-1)x^{-\alpha}\left\{1 - \frac{\alpha.\beta}{1.x} + \frac{\alpha.\alpha+1.\beta.\beta+1}{1.2.x^2} - \cdots\right.$$

ist. Setzt man in der zweiten Gleichung:

$$\alpha = \tfrac{1}{2} - m,\ \beta = \tfrac{1}{2} + m,\ x = 4\sqrt{\varrho}$$

und verbindet sie mit der ersten, so erhält man:

$$Q_m(\varrho) = \sqrt{\pi}.\varrho^{-\frac{2m+1}{4}} e^{-2\sqrt{\varrho}}\left\{1 - \frac{(1-4m^2)}{1.16\sqrt{\varrho}}\right.$$
$$+ \frac{(1-4m^2)(9-4m^2)}{1.2.(16\sqrt{\varrho})^2} - \frac{(1-4m^2)(9-4m^2)(25-4m^2)}{1.2.3.(16\sqrt{\varrho})^3} + \cdots$$

Es wurden die beiden folgenden partikulären Integrale der Gleichung (4) gefunden:

$$V = \cos m\vartheta\, r^m P_m\left(\frac{n^2r^2}{4}\right)(G_{nm}\cos nx + H_{nm}\sin nx)$$
$$+ \sin m\vartheta\, r^m P_m\left(\frac{n^2r^2}{4}\right)(G'_{nm}\cos nx + H'_{nm}\sin nx$$

und

$$V' = \cos m\vartheta\, r^m Q_m\left(\frac{n^2r^2}{4}\right)(I_{nm}\cos nx + K_{nm}\sin nx)$$
$$+ \sin m\vartheta\, r^m Q_m\left(\frac{n^2r^2}{4}\right)(I'_{nm}\cos nx + K'_{nm}\sin nx),$$

wo die neu eingeführten Grössen I_{nm}, K_{nm}, I'_{nm}, K'_{nm} willkürliche Constanten bezeichnen; das erste Integral wird $= \infty$ für $r = \infty$, und nicht $= \infty$ für $r = 0$; das zweite wird $= \infty$ für $r = 0$ und verschwindet für $r = \infty$. Von jeder dieser Lösungen kann in Beziehung auf n das Integral, in Beziehung auf m die Summe genommen werden; man kann setzen:

$$V = \sum_0^\infty{}_m \cos m\vartheta \int_0^\infty r^m P_m\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right)(G_m(n)\cos nx + H_m(n)\sin nx)\,dn$$

$$+ \sum_1^\infty{}_m \sin m\vartheta \int_0^\infty r^m P_m\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right)(G'_m(n)\cos nx + H'_m(n)\sin nx)\,dn$$

$$V_a = \sum_0^\infty{}_m \cos m\vartheta \int_0^\infty r^m Q_m\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right)(I_m(n)\cos nx + K_m(n)\sin nx)\,dn$$

$$+ \sum_1^\infty{}_m \sin m\vartheta \int_0^\infty r^m Q_m\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right) I'_m(n)\cos nx + K'_m(n)\sin nx)\,dn,$$

falls sich zeigen lässt, dass die Funktionen von n: G_m, H_m, G'_m, H'_m, I_m, K_m, I'_m, K'_m sich so bestimmen lassen, dass die Ausdrücke von V_i und V_a einer gegebenen Funktion von x und ϑ gleich werden, wenn man in ihnen für r den Radius des Cylinders setzt.

Es sei R der Radius des Cylinders, $\overline{V}$ die Funktion von x und ϑ, in welche V_i und V_a für $r = R$ übergehen sollen. Mit Hülfe des Fourier'schen Satzes lässt sich $\overline{V}$ auf folgende Form bringen:

$$(8)\quad \begin{cases} \overline{V} = \sum_0^\infty{}_m \cos m\vartheta \int_0^\infty (A_m(n)\cos nx + B_m(n)\sin nx)\,dn \\ \quad + \sum_1^\infty{}_m \sin m\vartheta \int_0^\infty (A'_m(n)\cos nx + B'_m(n)\sin nx)\,dn. \end{cases}$$

Ist dieses geschehen und nimmt man die Werthe von $G_m(n)$, $H_m(n)$ u. s. w. aus den Gleichungen:

$$\frac{G_m(n)}{A_m(n)} = \frac{H_m(n)}{B_m(n)} = \frac{G'_m(n)}{A'_m(n)} = \frac{H'_m(n)}{B'_m(n)} = \frac{1}{R^m P_m\left(\frac{n^2 R^2}{4}\right)}$$

$$\frac{I_m(n)}{A_m(n)} = \frac{K_m(n)}{B_m(n)} = \frac{I'_m(n)}{A'_m(n)} = \frac{K'_m(n)}{B'_m(n)} = \frac{1}{R^m Q_m\left(\frac{n^2 R^2}{4}\right)},$$

so wird der gestellten Forderung genügt.

Hat man daher die Funktionen $A_m(n)$, $B_m(n)$, $A'_m(n)$, $B'_m(n)$ der Gleichung (8) gemäss bestimmt, so ist:

$$(9)\quad \begin{cases} V_i = \sum_0^\infty{}_m \cos m\vartheta \int_0^\infty \frac{r^m P_m\left(\frac{n^2+r^2}{4}\right)}{R^m P_m\left(\frac{n^2+R^2}{4}\right)} (A_m(n)\cos nx + B_m(n)\sin nx)\,dn \\ \quad + \sum_1^\infty{}_m \sin m\vartheta \int_0^\infty \frac{r^m P_m\left(\frac{n^2+r^2}{4}\right)}{R^m P_m\left(\frac{n^2+R^2}{4}\right)} (A'_m(n)\cos nx + B'_m(n)\sin nx)\,dn, \\ \text{und} \\ V_a = \sum_0^\infty{}_m \cos m\vartheta \int_0^\infty \frac{r^m Q_m\left(\frac{n^2+r^2}{4}\right)}{R^m Q_m\left(\frac{n^2+R^2}{4}\right)} (A_m(n)\cos nx + B_m(n)\sin nx)\,dn \\ \quad + \sum_1^\infty{}_m \sin m\vartheta \int_0^\infty \frac{r^m Q_m\left(\frac{n^2+r^2}{4}\right)}{R^m Q_m\left(\frac{n^2+R^2}{4}\right)} (A'_m(n)\cos nx + B'_m(n)\sin nx)\,dn. \end{cases}$$

§ 3.

Es sollen jetzt die gefundenen Entwickelungen benutzt werden, um φ aus der Gleichung (3) zu bestimmen. Bei dieser Gleichung ist vorausgesetzt, dass sowohl V als φ als Potentiale von Massen dargestellt sind, die auf der Oberfläche des Cylinders liegen. In Beziehung auf V wird diese Bedingung durch die in (9) aufgestellten Ausdrücke erfüllt; sie wird auch in Beziehung auf φ erfüllt, wenn man, entsprechend

$$(10)\quad \begin{cases} \varphi_i = \sum_0^\infty{}_m \cos m\vartheta \int_0^\infty \frac{r^m P_m\left(\frac{n^2+r^2}{4}\right)}{R^m P_m\left(\frac{n^2+R^2}{4}\right)} (C_m(n)\cos nx + D_m(n)\sin nx)\,dn \\ \quad + \sum_1^\infty{}_m \sin m\vartheta \int_0^\infty \frac{r^m P_m\left(\frac{n^2+r_2}{4}\right)}{R^m P_m\left(\frac{n^2+R^2}{4}\right)} (C'_m(n)\cos nx + D'_m(n)\sin nx)\,dn \\ \varphi_a = \sum_0^\infty{}_m \cos m\vartheta \int_0^\infty \frac{r^m Q_m\left(\frac{n^2+r^2}{4}\right)}{R^m Q_m\left(\frac{n^2+R^2}{4}\right)} (C_m(n)\cos nx + D_m(n)\sin nx)\,dn \\ \quad + \sum_1^\infty{}_m \sin m\vartheta \int_0^\infty \frac{r^m Q_m\left(\frac{n^2+r^2}{4}\right)}{R^m Q_m\left(\frac{n^2+R^2}{4}\right)} (C'_m(n)\cos nx + D'_m(n)\sin nx)\,dn \end{cases}$$

setzt, wo $C_m(n)$, $D_m(n)$, $C'_m(n)$, $D'_m(n)$ Funktionen bedeuten, die eben durch die Gleichung (3) ihre Bestimmung erhalten sollen.

Man hat:

$$\frac{\partial V}{\partial N_i} = -\frac{\partial V_i}{\partial r}, \frac{\partial \varphi}{\partial N_i} = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial r}$$
$$\frac{\partial V}{\partial N_a} = \frac{\partial V_a}{\partial r}, \frac{\partial \varphi}{\partial N_a} = \frac{\partial \varphi_a}{dr},$$

wenn man auf der rechten Seite dieser Gleichungen $r = R$ setzt; es ist daher:

$$\frac{\partial V}{\partial N_i} = -\sum_0^\infty{}_m \cos m\vartheta \int_0^\infty \frac{\partial \log\left(R^m P_m\left(\frac{n^2 R^2}{4}\right)\right)}{\partial R}(A_m(n)\cos nx + B_m(n)\sin nx)dn$$
$$-\sum_1^\infty{}_m \sin m\vartheta \int_0^\infty \frac{\partial \log\left(R^m P_m\left(\frac{n^2 R^2}{4}\right)\right)}{dR}(A'_m(n)\cos x + B'_m(n)\sin nx)dn$$

und

$$\frac{\partial V}{\partial N_a} = \sum_0^\infty{}_m \cos m\vartheta \int_0^\infty \frac{\partial \log\left(R^m Q_m\left(\frac{n^2 R^2}{4}\right)\right)}{dR}(A'_m(n)\cos nx + B_m(n)\sin nx)dn$$
$$+\sum_1^\infty{}_m \sin m\vartheta \int_0^\infty \frac{\partial \log\left(R^m Q_m\left(\frac{n^2 R^2}{4}\right)\right)}{\partial R}(A'_m(n)\cos nx + B'_m(n)\sin nx)dn.$$

Aus diesen Ausdrücken erhält man die Ausdrücke für $\frac{\partial \varphi}{\partial N_i}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial N_a}$, wenn man statt der Buchstaben A, B die Buchstaben C, D setzt. Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (3), so zeigt sich, dass dieselbe identisch erfüllt wird, wenn man:

$$\frac{C_m(n)}{A_m(n)} = \frac{D_m(n)}{B_m(n)} = \frac{C'_m(n)}{A'_m(n)} = \frac{D'_m(n)}{B'_m(n)}$$
$$= -\frac{\frac{\partial \log\left(R^m Q_m\left(\frac{n^2 R^2}{4}\right)\right)}{\partial R} - \frac{\partial \log\left(R^m P_m\left(\frac{n^2 R^2}{4}\right)\right)}{\partial R}}{\frac{\partial \log\left(R^m Q_m\left(\frac{n^2 R^2}{4}\right)\right)}{\partial R} - (1+4\pi k)\frac{\partial \log\left(R^m P_m\left(\frac{n^2 R^2}{4}\right)\right)}{\partial R}}$$

macht. Führt man in diesen Ausdruck

$$\varrho = \frac{n^2 R^2}{4} \tag{11}$$

ein, so wird derselbe

$$= - \frac{1}{1 - 4\pi k \dfrac{Q_n(\varrho)\left(m P_n(\varrho) + 2\varrho \dfrac{dP_n(\varrho)}{d\varrho}\right)}{2\varrho\left(P_n(\varrho)\dfrac{dQ_n(\varrho)}{d\varrho} - Q_n(\varrho)\dfrac{dP_n(\varrho)}{d\varrho}\right)}}.$$

Nun genügen $P_n(\varrho)$ und $Q_n(\varrho)$ der Differentialgleichung $\ldots$ hieraus ergiebt sich leicht:

$$P_n(\varrho)\frac{dQ_n(\varrho)}{d\varrho} - Q_n(\varrho)\frac{dP_n(\varrho)}{d\varrho} = \frac{c}{\varrho^{n+1}},$$

wo c eine von ϱ unabhängige Grösse bedeutet. Man findet den Werth derselben, wenn man ϱ als unendlich klein voraussetzt. Unter dieser Annahme ist, nach den im vorigen Paragraphen über $P_n(\varrho)$ und $Q_n(\varrho)$ gemachten Angaben:

$$P_n(\varrho) = 1, \quad \frac{dP_n(\varrho)}{d\varrho} = \frac{1}{n+1},$$

$$Q_n(\varrho) = \frac{1.2\ldots n-1}{\varrho^n}, \quad \frac{dQ_n(\varrho)}{d\varrho} = -\frac{1.2\ldots n}{\varrho^{n+1}}.$$

Für $n = 0$ ist aber:

$$Q_0(\varrho) = -\log\varrho, \quad \frac{dQ_0(\varrho)}{d\varrho} = -\frac{1}{\varrho};$$

hieraus ergiebt sich:

$$P_n(\varrho)\frac{dQ_n(\varrho)}{d\varrho} - Q_n(\varrho)\frac{dP_n(\varrho)}{d\varrho} = -\frac{1.2\ldots n}{\varrho^{n+1}}$$

$$P_0(\varrho)\frac{dQ_0(\varrho)}{d\varrho} - Q_0(\varrho)\frac{dP_0(\varrho)}{d\varrho} = -\frac{1}{\varrho},$$

also

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{C_n(n)}{A_n(n)} = \dfrac{D_n(n)}{B_n(n)} = \dfrac{C'_n(n)}{A'_n(n)} = \dfrac{D'_n(n)}{B'_n(n)} \\ \quad = -\dfrac{1}{1 + 2\pi k \dfrac{\varrho^n Q_n(\varrho)\left(m P_n(\varrho) + 2\varrho \dfrac{dP_n(\varrho)}{d\varrho}\right)}{1.2\ldots n}} \\ \text{und} \\ \dfrac{C_0(n)}{A_0(n)} = \dfrac{D_0(n)}{B_0(n)} + \dfrac{C'_0(n)}{A'_0(n)} = \dfrac{D'_0(n)}{B'_0(n)} \\ \quad = -\dfrac{1}{1 + 4\pi k \varrho Q_1(\varrho)\dfrac{dP}{d\varrho}(\varrho)}. \end{array}\right. \tag{12}$$

Durch die Gleichungen (12), (11) und die erste der Gleichungen (10) ist die Function φ für alle Punkte im Innern des Eisenkörpers, und dadurch magnetische Zustand desselben bestimmt. Es ist von Interesse, auch das Potential des magnetisirten Eisenkörpers in Beziehung auf einen äusseren Punkt, d. h. die Grösse U_a, zu ermitteln. Wenn V und φ als Potentiale von Massen dargestellt sind, die auf der Oberfläche des Körpers liegen (wie es im Früheren geschehen ist), so findet die Gleichung:

$$V_a + \varphi_a + U_a = 0;$$

statt. Daraus ergiebt sich leicht:

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
U_a = &\sum_0^\infty{}_m \cos m\vartheta \int_0^\infty \frac{r_m Q_m\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right)}{R^m Q_m\left(\frac{n^2 R^2}{4}\right)} \Big(E_m(n)\cos nx \\
&\qquad + F_m(n)\sin nx\Big)\,dn, \\
&+\sum_1^\infty{}_m \sin m\vartheta \int_0^\infty \frac{r_m Q_m\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right)}{R^m Q_m\left(\frac{n^2 R^2}{4}\right)} \Big(E'_m(n)\cos nx \\
&\qquad + F'_m(n)\sin nx\Big)\,dn, \\
&\frac{E_m(n)}{A_m(n)} = \frac{F_m(n)}{B_m(n)} = \frac{E'_m(n)}{A'_m(n)} = \frac{F'_m(n)}{B'_m(n)} \\
&= -\frac{2\pi k \dfrac{\varrho^m Q_m(\varrho)\left(m P_m(\varrho) + 2\varrho \dfrac{dP_m(\varrho)}{d\varrho}\right)}{1.2\ldots m}}{1 + 2\pi k \dfrac{\varrho^m Q_m(\varrho)\left(m P_m(\varrho) + 2\varrho \dfrac{dP_m(\varrho)}{d\varrho}\right)}{1.2\ldots m}}, \\
&\frac{E_0(n)}{A_0(n)} = \frac{F_0(n)}{B_0(n)} = \frac{E'_0(n)}{A'_0(n)} = \frac{F'_0(n)}{B'_0(n)} \\
&\qquad = -\frac{4\pi k \varrho\, Q_0(\varrho) \cdot \dfrac{dP_0(\varrho)}{d\varrho}}{1 + 4\pi k \varrho\, Q_0(\varrho) \cdot \dfrac{dP_0(\varrho)}{d\varrho}},
\end{aligned}\right.$$

wo ϱ wiederum den in der Gleichung (11) angegebenen Werth hat.

§ 4.

Die aufgestellten Formeln sind nicht gültig, wenn die Kräfte, welche den Eisencylinder magnetisiren, ganz oder zum Theil von einem elektrischen Strome herrühren, der den Cylinder umkreist. In diesem Falle haben die Integrale, welche nach dem Fourier'schen Satze den mit A, B, A', B' bezeichneten Grössen gleich sind, keine angebbaren Werthe, weil das Potential V nicht für $x = -\infty$ und $x = +\infty$ verschwindet. Das Potential eines geschlossenen elektrischen Stromes, dessen Intensität nach elektro-magnetischem Maasse $= 1$ ist, ist gleich der Fläche, welche der Kegel, der zur Spitze den Punkt hat, auf den das Potential sich bezieht, und der durch die Stromcurve geht, von der Kugelfläche ausschneidet, die um denselben Punkt mit dem Radius 1 beschrieben ist. Man kann nach Willkür den einen oder den andern der beiden Theile, in welche die Kugel durch den Kegel zerlegt wird, als das Potential ansehen; nur muss man beachten, dass das Potential sich stetig ändert, wenn der Punkt, auf welchen es sich bezieht, seine Lage stetig ändert. (Vgl. Neumann's Allgemeine Gesetze der inducirten elektrischen Ströme; Abh. der Berl. Ak. 1845. p. 73.) Es folgt daraus, dass, wenn ein Strom von der Intensität 1, der den Cylinder einmal umfliesst, beim Magnetisiren mitwirkt, das Potential V so angenommen werden kann, dass es für $x = -\infty$ verschwindet, dass es dann aber für $x = +\infty$ den Werth 4π erhält.

Es soll jetzt gezeigt werden, wie in einem solchen Falle der magnetische Zustand des Cylinders und seine Wirkung nach Aussen sich ermitteln lässt.

Es möge das System von Körpern, von welchen die magnetisirenden Kräfte ausgehen, als verschiebbar in der Richtung der x-Axe betrachtet werden, und es sei ξ die x-Ordinate eines mit diesem Systeme fest verbundenen Punktes. Alsdann werden V, φ und U Funktionen, nicht bloss von x, r und ϑ, sondern auch von ξ sein. Differenzirt man die Gleichungen (1) und (2) nach ξ, so erhält man Gleichungen, die sich von diesen nur dadurch unterscheiden, dass V, φ und U durch $\frac{\partial V}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial U}{\partial \xi}$ ersetzt sind. Daraus folgt, dass, wenn

$\frac{\partial V}{\partial \xi}$ das Potential der magnetisirenden Kräfte ist, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}$ diejenige Funktion ist, deren Differentialquotienten die magnetischen Momente im Innern des Cylinders bestimmen, und $\frac{\partial U_a}{\partial \xi}$ das Potential des magnetisirten Cylinders in Beziehung auf einen äusseren Punkt. Es verschwindet aber $\frac{\partial V}{\partial \xi}$ sowohl für $x = -\infty$ als für $x = +\infty$, auch wenn die Kräfte, deren Potential V ist, von elektrischen Strömen herrühren; daher können die im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln benutzt werden, um $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial U_a}{\partial \xi}$ aus $\frac{\partial V}{\partial \xi}$ zu finden. Bestimmt man die Funktionen A, B, A', B' so, dass die Gleichung erfüllt wird, in welche (8) übergeht, wenn man $\overline{V}$ durch $\frac{\partial \overline{V}}{\partial \xi}$ ersetzt, so sind die in (10) und (13) für φ_i und U_a aufgestellten Ausdrücke $= \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial U_a}{\partial \xi}$.

Die Grössen V, φ, U sind aber Funktionen von $x - \xi$; es ist daher:

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial \xi} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Ersetzt man also in (8) $\overline{V}$ durch $\frac{\partial \overline{V}}{\partial x}$, so geben die in (10) und (13) für φ_i und U_a aufgestellten Ausdrücke die Werthe von $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}$ und $\frac{\partial U_a}{\partial x}$. Aus diesen erhält man durch Integration φ_i und U_a selbst. Die hierbei auftretenden Constanten der Integration können Funktionen von r und ϑ sein. Um den magnetischen Zustand des Cylinders und seine Wirkung nach Aussen zu ermitteln, ist es nur nöthig, die Differentialquotienten derselben nach r und ϑ zu kennen; diese werden dadurch bestimmt, dass $\frac{\partial \varphi_i}{\partial r}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \vartheta}$, $\frac{\partial U_a}{\partial r}$, $\frac{\partial U_a}{\partial \vartheta}$ für $x = \pm\infty$ verschwinden müssen.

§ 5.

Es soll der Fall näher untersucht werden, dass die magnetisirenden Kräfte von einem Kreisstrome herrühren, dessen Mittelpunkt in der Axe des Cylinders liegt, und dessen Ebene

senkrecht auf dieser Axe steht. Der Strom habe die Intensität 1 und den Radius s; der Mittelpunct desselben sei der Anfangspunkt der Coordinaten; dann ist für $r = 0$:

$$V = 2\pi\left(1 + \frac{x}{\sqrt{(s^2 + x^2)}}\right),$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{2\pi s^2}{(s^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Bedeutet $f(x)$ eine Funktion, für welche $f(-x) = f(+x)$ ist, so hat man nach dem Fourier'schen Satze:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dn \,.\, \cos nx \int_0^\infty d\alpha \,.\, \cos n\alpha \,.\, f(\alpha);$$

die Funktion $\frac{\partial V}{dx}$ genügt der für $f(x)$ ausgesprochenen Bedingung, daher ist für $r = 0$:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 4\int_0^\infty dn \,.\, \cos nx \int_0^\infty \frac{s^2 d\alpha \,.\, \cos n\alpha}{(s^2 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}},$$

oder, wenn man $s\alpha$ für α schreibt:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 4\int dn \,.\, \cos nx \int_0^\infty \frac{d\alpha \,.\, \cos ns\alpha}{(1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Das nach α zu nehmende Integral kann man auf das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos p\alpha \,.\, d\alpha}{\sqrt{(1 + \alpha^2)}},$$

zurückführen, und dieses lässt sich auf folgende Weise finden.

Es ist:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2 y^2}\, dy = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \,.\, \frac{1}{\alpha},$$

also, wenn $\alpha^2 = 1 + \alpha^2$ gemacht wird:

$$\frac{1}{\sqrt{(1 + \alpha^2)}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-y^2} \,.\, e^{-\alpha^2 y^2}\, dy,$$

mithin:

$$\int_0^\infty \frac{\cos p\alpha \,.\, d\alpha}{\sqrt{(1 + \alpha^2)}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \,.\, \int_0^\infty e^{-y^2}\, dy \int_0^\infty \cos p\alpha \,.\, e^{-\alpha^2 y^2}\, d\alpha$$

$$= \int_0^\infty e^{-y^2}\, dy \,.\, \frac{1}{y} \,.\, e^{-\frac{p^2}{4y^2}},$$

oder, wenn man $y^2 = u$ setzt:

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{u}\, e^{-u} \,.\, e^{-\frac{p^2}{4u}}\, du,$$

oder endlich bei der in § 2 gebrauchten Bezeichnung:

$$\int_0^\infty \frac{\cos p\alpha \,.\, d\alpha}{\sqrt{(1+\alpha^2)}} = \tfrac{1}{2}\, Q_0\left(\frac{p^2}{4}\right).$$

Statt dieser Gleichung kann man auch

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha\, d\alpha}{\sqrt{(p^2+\alpha^2)}} = \tfrac{1}{2}\, Q_0\left(\frac{p^2}{4}\right)$$

schreiben. Differenzirt man nun nach p, so erhält man:

$$-\int_0^\infty \frac{p \cos \alpha \,.\, d\alpha}{(p^2+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = \tfrac{1}{2}\, \frac{d}{dp} \,.\, Q_0\left(\frac{p^2}{4}\right),$$

oder, wenn man

$$\frac{d\, Q_0(\varrho)}{d\varrho} = Q'_0(\varrho) \tag{15}$$

setzt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos p\alpha \,.\, d\alpha}{(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{p^2}{4}\, Q'_0\left(\frac{p^2}{4}\right).$$

Der Gleichung (14) zufolge ist daher für $r = 0$:

$$\frac{\partial V}{dx} = -4 \int_0^\infty dn\, \cos nx \,.\, \frac{n^2 s^2}{4}\, Q'_0\left(\frac{n^2 s^2}{4}\right).$$

Für ein unbestimmtes r hat man aber nach der ersten der Gleichungen (9):

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int_0^\infty dn \cos nx\, \frac{P_0\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right)}{P_0\left(\frac{n^2 R^2}{4}\right)}\, A_0(n);$$

die Vergleichung dieser beiden Ausdrücke zeigt, dass:

$$A_0(n) = -4\, P_0\left(\frac{n^2 R}{4}\right) \,.\, \frac{n^2 s^2}{4}\, Q'_0\left(\frac{n^2 s^2}{4}\right).$$

Setzt man, entsprechend der Gleichung (15):

$$\frac{dP_0(\varrho)}{d\varrho} = P_0'(\varrho),$$

so erhält man aus den Gleichungen (10), (11), (12) und (13):

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = 4\int_0^\infty \frac{dn \,.\, \cos nx P_0\left(\frac{n^2r^2}{4}\right) \,.\, \frac{n^2s^2}{4}\, Q_0'\left(\frac{n^2s^2}{4}\right)}{1 + 4\pi k\left(\frac{n^2R^2}{4}\right) P_0'\left(\frac{n^2R^2}{4}\right) \,.\, Q_0\left(\frac{n^2R^2}{4}\right)}$$

(16)
$$\frac{\partial U_a}{\partial x} =$$

$$16\pi k \,.\, \int_0^\infty \frac{dn \,.\, \cos nx \,.\, Q_0\left(\frac{n^2r^2}{4}\right) \,.\, P_0\left(\frac{n^2R^2}{4}\right) \,.\, \frac{n^2R^2}{4} \,.\, P_0'\left(\frac{n^2R^2}{4}\right) \,.\, \frac{n^2s^2}{4} \,.\, Q_0'\left(\frac{n^2s^2}{4}\right)}{1 + 4\pi k\,\frac{n^2R^2}{4} \,.\, P_0'\left(\frac{n^2R^2}{4}\right) \,.\, Q_0\left(\frac{n^2R^2}{4}\right)}.$$

Ich füge noch folgende Bemerkung hinzu.

Aus dem für $A_0\,(n)$ gefundenen Werthe folgt, dass $-\frac{1}{4}\frac{\partial V_i}{\partial x}$ dem bestimmten Integrale

$$\int_0^\infty dn \cos nx \,.\, P_0\left(\frac{n^2r^2}{4}\right) \,.\, \frac{n^2s^2}{4}\, Q_0'\left(\frac{n^2s^2}{4}\right)$$

gleich ist; dieselbe Grösse lässt sich aber auch durch elliptische Integrale ausdrücken. Thut man dies, so erhält man den Werth dieses bestimmten Integrals durch elliptische Integrale ausgedrückt. Betrachtet man statt des Potentials eines Kreisstromes das Potential einer Kreislinie, auf der die anziehende Masse gleichmässig vertheilt ist, so gelangt man auf ähnliche Weise zu der Gleichung

$$\int_0^\infty dn \cos nx\, P_0\left(\frac{n^2r^2}{4}\right) \,.\, Q_0\left(\frac{n^2s^2}{4}\right) \;\cdot$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x^2+(s+r)^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{4sr}{x^2+(s+r)^2}\sin^2\varphi}}.$$

Bei der Ableitung dieser Gleichung ist vorausgesetzt, dass $s > r$ ist; sie gilt auch nur unter dieser Voraussetzung, da das Integral auf ihrer linken Seite keinen angebbaren Werth mehr hat, wenn $s < r$ ist. Es geht dies aus der folgenden Betrachtung hervor.

Für ein unendlich grosses ϱ ist:

$$Q_0(\varrho) = \sqrt{\pi}\frac{1}{\sqrt[4]{\varrho}}e^{-2\sqrt{\varrho}}$$

$$P_0(\varrho) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{\varrho}}e^{2\sqrt{\varrho}},$$

und daher für ein unendlich grosses n:

$$P_0\left(\frac{n^2r^2}{4}\right)\cdot Q_0\left(\frac{n^2s^2}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{(sr)}}\cdot\frac{1}{n}e^{-n(s-r)},$$

dieser Ausdruck verschwindet, wenn $s > r$, er wird aber unendlich gross, wenn $s < r$ ist.

§ 6.

Liegen die Mittelpunkte der magnetisirenden Kräfte in unendlicher Entfernung, so sind die hier angegebenen Entwickelungen nicht anwendbar. Aber in diesem Falle lässt sich der magnetische Zustand des Cylinders finden, indem man ihn als ein Rotations-Ellipsoïd mit unendlich grosser Excentricität betrachtet.

Ein Ellipsoïd wird durch Kräfte, die für alle seine Punkte gleich sind, gleichmässig magnetisirt, d. h. so, dass die magnetischen Momente, bezogen auf die Volumen-Einheit, constant sind. Bedeuten α, β, γ diese magnetischen Momente, sind ferner die Hauptaxen des Ellipsoïds die Coordinaten-Axen und a, b, c die Componenten der magnetisirenden Kraft, so ist, wie Neumann gezeigt hat:

$$(17)\qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{ka}{1+kA^0}, \\ \beta = \dfrac{kb}{1+kB^0}, \\ \gamma = \dfrac{kc}{1+kC^0}, \end{cases}$$

wo A^0, B^0, C^0 gewisse, von den Verhältnissen der Hauptaxen abhängige Grössen bezeichnen. Für ein Rotations-Ellipsoïd hat Neumann die Werthe dieser Grössen aufgestellt; führt man in diese Werthe die Bedingung ein, dass das Ellipsoïd ein unbegrenzter Cylinder sei, dessen Axe die x-Axe ist, so erhält man:

$$A^0 = 0 \quad , \quad B^0 = C^0 = 2\pi;$$

für den Cylinder ist daher:

$$\alpha = ka$$

$$\beta = \frac{kb}{1 + 2\pi k}$$

$$\gamma = \frac{kb}{1 + 2\pi k}.$$

Kennt man den magnetischen Zustand, in welchen eine Eisenmasse durch Kräfte versetzt wird, deren Mittelpunkt in unendlicher Entfernung sich befindet, so ist man im Stande, die magnetischen Momente derselben Eisenmasse anzugeben für den Fall, dass sie durch irgend welche Kräfte magnetisirt ist. Man gelangt hierzu durch Anwendung folgenden Satzes:

Das Potential einer Eisenmasse, die magnetisirt ist durch ein System I, in Beziehung auf ein System II, ist gleich dem Potential derselben Eisenmasse, wenn sie magnetisirt ist durch das System II, in Beziehung auf das System I.

Dieser Satz lässt sich wie folgt beweisen.

Es sollen V_1, φ_1, U_1 die drei Grössen V, φ, U für den Fall bezeichnen, dass die Eisenmasse durch das System I magnetisirt ist, V_2, φ_2, U_2 dieselben Grössen für den Fall, dass das System II den Magnetismus hervorruft. Das Potential der durch I magnetisirten Eisenmasse in Beziehung auf einen äusseren Punkt ist dann:

$$U = -k\int \frac{ds}{s} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i},$$

wo s die Entfernung des in Rede stehenden Punktes von dem Elemente der Oberfläche, ds, bedeutet; das Potential der Eisenmasse in Beziehung auf das System II, welches durch $U_{1,2}$ bezeichnet werden mag, ist daher:

$$U_{1,2} = -k\int ds \,.\, V_2 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i},$$

wo V_2 auf den Ort des Elements ds zu beziehen ist.

Für alle Punkte der Eisenmasse, also auch für ihre Oberfläche ist aber:

$$V_2 + \varphi_2 + U_2 = 0;$$

daraus folgt:

$$U_{1,2} = k\int ds \,.\, \varphi_2 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i} + k\int ds \,.\, U_2 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i}.$$

Substituirt man in diese Gleichung:

$$U_2 = -k\int \frac{ds'}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial N_i},$$

wo ds' ein zweites Element der Oberfläche, N_i' die Normale desselben und ε die Entfernung der beiden Elemente ds und ds' bedeutet, so erhält man:

$$U_{12} = k\int ds \cdot \varphi_2 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i} - k^2 \iint \frac{ds\, ds'}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial N_i};$$

der Ausdruck rechts in dieser Gleichung ändert seinen Werth nicht, wenn man die Indices 1 und 2 vertauscht, denn es ist

$$\int ds\, \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i} = \int ds\, \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial N_i}$$

weil φ_1 und φ_2 Potentiale von Massen ausserhalb des Eisenkörpers sind; hieraus geht die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes hervor.

Dieser Satz soll nun auf den Fall angewendet werden, dass das System II ein Magnetpol ist, der unendlich entfernt liegt. In diesem Falle ist

$$V_2 = -(ax + by + cz)$$

zu setzen, wo a, b, c die Componenten der Kraft bedeuten, die der Pol ausübt; es wird also:

$$U_{12} = k \int ds (ax + by + cz) \frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i}$$

$$= ak\int ds.x.\frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i} + bk\int ds.y.\frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i} + ck\int ds.z.\frac{\partial \varphi_1}{\partial N_i}.$$

Die Coëfficienten von a, b, c rechts in dieser Gleichung sind die negativ genommenen magnetischen Momente des Eisenkörpers, wenn er durch die Kräfte, deren Potential V_1 ist, magnetisirt ist; bezeichnet man diese Momente durch L_1, M_1, N_1, und beachtet, dass sie unabhängig von a, b, c sind, so erhält man:

$$L_1 = -\frac{\partial U_{12}}{\partial a}$$

$$M_1 = -\frac{\partial U_{12}}{\partial b}$$

$$N_1 = -\frac{\partial U_{12}}{\partial c}.$$

Nach dem vorausgeschickten Satze ist aber:

$$U_{1,2} = -k\int ds \,.\, V_1 \,.\, \frac{\partial \varphi_2}{\partial N_i},$$

oder auch, wenn man durch dv ein Element des Volumens des Eisenkörpers bezeichnet:

$$U_{1,2} = k\int dv \left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\,.\,\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y}\,.\,\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial z}\,.\,\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right).$$

Substituirt man einen dieser beiden Werthe von $U_{1,2}$ in die Gleichungen für L_1, M_1, N_1, so erhält man diese durch φ_1 ausgedrückt, welches als bekannt vorausgesetzt ist. Bei der Ausführung der Differentiationen nach a, b, c verschwinden diese Grössen aus der Rechnung, da V_1 unabhängig und φ_2 eine lineare Funktion von ihnen ist.

Für ein Ellipsoïd, dessen Hauptaxen die Coordinaten-Axen sind, ist:

$$\varphi_2 = \frac{ax}{1 + kA^0} + \frac{by}{1 + kB_0} + \frac{cz}{1 + kC^0};$$

daraus ergiebt sich — wenn der Index 1 jetzt weggelassen wird:

$$L = -\frac{k}{1 + kA^0}\int dv \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$M = -\frac{k}{1 + kB^0}\int dv \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$N = -\frac{k}{1 + kC^0}\int dv \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Diese Ausdrücke sind identisch mit denen, welche Neumann auf eine andere Weise hergeleitet hat.

Für den unbegrenzten Cylinder werden die Ausdrücke für die magnetischen Momente folgende:

$$(18)\qquad \begin{cases} L = -k\int dv \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ M = -\dfrac{k}{1 + 2\pi k}\int dv \dfrac{\partial V}{\partial y}, \\ N = -\dfrac{k}{1 + 2\pi k}\int dv \dfrac{\partial V}{\partial z}. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen lässt sich folgendermassen schreiben:

$$L = -k\int dy \,.\, dz\,(V_\infty - V_{-\infty}),$$

wenn man durch V_∞ und $V_{-\infty}$ die Werthe von V für $x = \infty$

und $x = -\infty$ bezeichnet. Rührt V nur von Magnetpolen her, die im Endlichen liegen, so ist $V_\infty = V_{-\infty} = 0$, also auch $L = 0$; ist der Cylinder durch elektrische Ströme, die ihn umkreisen, magnetisirt, so ist, welches auch die Gestalt der Stromcurven sei:

$$V_\infty - V_{-\infty} = 4\pi . I\eta,$$

wo I die Intensität der Ströme und η die Zahl der Windungen bedeutet, in welchen dieselben um den Cylinder geführt sind. Es wird dann also:

$$L = -4\pi^2 k . R^2 I\eta,$$

wo R wieder den Radius des Cylinders bezeichnet.

§ 7.

Der durch die Gleichungen (10), (11) und (12) bestimmte Ausdruck von φ_i vereinfacht sich sehr, wenn man den Radius des Cylinders, R, unendlich klein setzt. In diesem Falle wird ϱ, d. h. $\frac{n^2R^2}{4}$, unendlich klein; die Gleichungen (12) geben dann für jedes m, ausser für $m = 0$:

$$\frac{C_m(n)}{A_m(n)} = \frac{D_m(n)}{B_m(n)} = \frac{C'_m(n)}{A'_m(n)} = \frac{D'_m(n)}{B'_m(n)} = -\frac{1}{1+2\pi k}$$

und

$$\frac{C_0(n)}{A_0(n)} = \frac{D_0(n)}{B_0(n)} = \frac{C'_0(n)}{A'_0(n)} = \frac{D'_0(n)}{B'_0(n)} = -1.$$

Bezeichnet man das dem $m = 0$ entsprechende Glied der in (9) gegebenen Entwickelung von V_i mit $V_i^{(0)}$, d. h. setzt man

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_i \, d\vartheta = V_i^{(0)},$$

so giebt der in (10) aufgestellte Ausdruck für φ_i:

$$\varphi_i = -V_i^{(0)} - \frac{V_i - V_i^{(0)}}{1+2\pi k}. \tag{19}$$

Diese Gleichung ist zunächst nur für den Fall bewiesen, in welchem die Gleichungen (9) und (10) gelten, d. h. für den Fall, dass der Cylinder durch Magnetpole, die in der Endlichkeit liegen, magnetisirt ist. Aber auch wenn ein elektrischer Strom, der den Cylinder umfliesst, bei seiner Magnetisirung mitwirkt, kann man sich der Gleichung (19) bedienen, um seinen Zustand kennen zu lernen. In diesem Falle ist nämlich:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = -\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial x} - \frac{1}{1+2\pi k}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x} - \frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial x}\right).$$

Durch Integration nach x erhält man hieraus:

$$\varphi_i = C - V_i^{(0)} - \frac{V_i - V_i^{(0)}}{1+2\pi k};$$

die Grösse C muss hier von r und ϑ unabhängig sein, da $\frac{\partial V_i^{(0)}}{\partial r}$, $\frac{\partial V_i}{\partial r}$ und $\frac{\partial V_i}{\partial \vartheta}$ für $x = \pm\infty$ verschwinden, und für dieselben Werthe von x auch $\frac{\partial \varphi_i}{\partial r}$ und $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \vartheta}$ verschwinden sollen: wenn daher die Grösse C auch nicht $= 0$ ist, so hat ihr Werth doch keinen Einfluss auf die Differentialquotienten von φ_i, die allein den magnetischen Zustand bestimmen.

Mit Hülfe der Gleichung (19) lassen sich leicht die magnetischen Momente des ganzen Cylinders berechnen; man gelangt dann für den hier betrachteten Fall zu denselben Ausdrücken, die in (18) angegeben sind.

Rühren die magnetisirenden Kräfte von einem kreisförmigen elektrischen Strome her, wie er in § 5 betrachtet worden ist, so wird die Wirkung des Cylinders nach Aussen durch die Gleichung (16) bestimmt. Durch die Annahme, dass R unendlich klein ist, geht diese Gleichung in

$$\frac{\partial V_a}{\partial x} = 4\pi k R^2 \int_0^\infty dn \,.\, \cos nx \,.\, n^2 Q_0\left(\begin{matrix} n^2 r^2 \\ 4 \end{matrix}\right) \frac{n^2 s^2}{4} Q_0\left(\begin{matrix} n^2 s^2 \\ 4 \end{matrix}\right)$$

über. Hieraus lässt sich leicht der Ausdruck für das Potential des magnetisirten Cylinders in Beziehung auf einen zweiten Kreisstrom bilden, dessen Mittelpunkt in der Axe des Cylinders liegt, und dessen Ebene senkrecht auf dieser Axe steht. Es sei W dieses Potential, der Radius des zweiten Kreisstromes sei $= r$, seine Intensität $= 1$, und x der Abstand der Mittelpunkte der beiden Ströme; dann hat man, mit Rücksicht darauf, dass die Summe der Massen, deren Potential V_a ist, verschwindet:

$$W = 2\pi \int_0^\infty \frac{\partial V_a}{\partial x}\, r\, dr\,.$$

Da $Q_0(\varrho)$ der Differentialgleichung genügt, die man aus 6) erhält, wenn man $m = 0$ setzt, so ist:

$$Q_0(\varrho) = \frac{d}{d\varrho}\varrho Q'_0(\varrho),$$

und daher

$$\frac{n^2 r}{2} Q_0\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right) = \frac{d}{dr} \cdot \frac{n^2 r^2}{4} Q'_0\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right),$$

also

$$\int_r^\infty r dr n^2 Q_0\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right) = -2\frac{n^2 r^2}{4} Q'_0\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right).$$

Hieraus folgt:

$$W = -16\pi^2 k R^2 \int_0^\infty dn \cos nx \frac{n^2 r^2}{4} Q'_0\left(\frac{n^2 r^2}{4}\right) \frac{n^2 s^2}{4} Q'_0\left(\frac{n^2 s^2}{4}\right).$$

Anhang.

Die Grundgleichungen der Poisson'schen Theorie des inducirten Magnetismus, nämlich die Gleichungen (1) und (2), können aus der Annahme hergeleitet werden, dass das magnetische Moment einer Kugel von weichem Eisen, bezogen auf die Volumen-Einheit, wenn die Kugel unter dem Einfluss einer für alle ihre Punkte constanten Kraft sich befindet, gleich der Intensität dieser Kraft, multiplicirt mit einer constanten Grösse ist. Die Versuche von Müller und Weber haben aber gezeigt, dass diese Annahme nicht zulässig ist, wenn die magnetisirende Kraft sehr stark ist, und haben zu dem Schlusse geführt, dass die Grösse, die nach der Poisson'schen Theorie constant sein soll, von der Intensität der magnetisirenden Kraft abhängt, in der Weise, dass sie um so kleiner wird, je mehr die Kraft wächst. Ich will die Gleichungen ableiten, die bei dieser Annahme an die Stelle der Gleichungen (1) und (2) gesetzt werden müssen.

Es seien α, β, γ die magnetischen Momente, reducirt auf die Einheit des Volumens, einer Kugel, auf die eine constante magnetisirende Kraft wirkt, deren Componenten X, Y, Z sind. Wenn die Coërcitivkraft des Eisens $= 0$ ist, d. h. wenn der magnetische Zustand desselben allein von den Kräften abhängt, die in dem betrachteten Augenblicke auf dasselbe wirken, so muss die magnetische Axe der Kugel mit der Richtung der Kraft zusammenfallen; es muss daher

$$\alpha : \beta : \gamma = X : Y : Z$$

sein, und folglich nach der gemachten Annahme:

$$(20)\quad \begin{cases} \alpha = Xf(\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}) \\ \beta = Yf(\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}) \\ \gamma = Zf(\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}), \end{cases}$$

wo f eine Funktion ist, die abnimmt, wenn ihr Argument wächst.

Nun stelle man sich in einer beliebig gestalteten Eisenmasse, die magnetisirenden Kräften ausgesetzt ist, zwei concentrische Kugelflächen, S und S', vor: beide unendlich klein, die zweite aber gegen die erste unendlich gross. In beiden Kugeln können die magnetischen Momente, reducirt auf die Volumen-Einheit, als constant betrachtet werden; die Kräfte, die auf die Punkte der kleineren Kugel von den magnetischen Molecülen, die zwischen den beiden Kugelflächen liegen, ausgeübt werden, heben daher einander auf. Die kleinere Kugel wird demnach in ihrem magnetischen Zustande durch die Kräfte erhalten, welche von Aussen her auf die Eisenmasse wirken und den Kräften, die von den magnetischen Molecülen dieser, mit Ausschluss der Kugel S', ausgeübt werden. Alle diese Kräfte können innerhalb der Kugel S als constant angesehen werden; man darf daher die Gleichungen (20) auf diese Kugel anwenden, wenn man unter X, Y, Z die Componenten der Resultante der genannten Kräfte versteht. Es seien x, y, z die Coordinaten eines Punktes im Innern der Kugel S, V sei das Potential der äusseren Kräfte in Beziehung auf diesen Punkt, und (X), (Y), (Z) seien die Kräfte, die von der magnetisirten Eisenmasse, mit Ausschluss der Kugel S', auf denselben Punkt ausgeübt werden; dann hat man:

$$X = = \frac{\partial V}{\partial x} + (X)$$

$$Y = = \frac{\partial V}{\partial y} + (Y)$$

$$Z = = \frac{\partial V}{\partial z} + (Z).$$

Setzt man

$$(21) \qquad U = \int dx'\,dy'\,dz' \left(\alpha' \frac{\partial \frac{1}{\varepsilon}}{\partial x'} + \beta' \frac{\partial \frac{1}{\varepsilon}}{\partial y'} + \gamma' \frac{\partial \frac{1}{\varepsilon}}{\partial z'} \right),$$

wo x', y', z' die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Eisenmasse, α', β', γ' die entsprechenden magnetischen Momente bedeuten, ε die Entfernung dieses Punktes von dem Punkte (x, y, z) bezeichnet, und die Integration über die ganze Eisenmasse auszudehnen ist, so ist, wie Poisson gezeigt hat:

$$(X) = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{4\pi}{3}\alpha$$

$$(Y) = -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{4\pi}{3}\beta$$

$$(Z) = -\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{4\pi}{3}\gamma.$$

Es wird daher:

$$X = -\frac{\partial (V+U)}{\partial x} + \frac{4\pi}{3}\alpha$$

$$Y = -\frac{\partial (V+U)}{\partial y} + \frac{4\pi}{3}\beta$$

$$Z = -\frac{\partial (V+U)}{\partial z} + \frac{4\pi}{3}\gamma,$$

oder, wenn man φ durch die Gleichung

$$(22) \qquad V + U + \varphi = 0$$

definirt:

$$X = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{4\pi}{3}\alpha$$

$$Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{4\pi}{3}\beta$$

$$Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{4\pi}{3}\gamma.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (20), nachdem man dieselben auf die Form:

$$X = \alpha f_1(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2})$$
$$Y = \beta f_1(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2})$$
$$Z = \gamma f_1(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2})$$

gebracht hat, so erhält man:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \alpha \left[f_1(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}) - \frac{4\pi}{3} \right]$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \beta \left[f_1(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}) - \frac{4\pi}{3} \right]$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \gamma \left[f_1 (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}) - \frac{4\pi}{3} \right]$$

und hieraus:

$$(23) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x} F\left[\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2} \right] \\ \beta = \frac{\partial \varphi}{\partial y} F\left[\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2} \right] \\ \gamma = \frac{\partial \varphi}{\partial z} F\left[\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2} \right]. \end{cases}$$

Bezeichnet man den dem Punkte (x', y', z') entsprechenden Werth von φ mit φ', und setzt

$$F\left[\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial z'}\right)^2} \right] = F',$$

so erhält man aus (21):

$$(24) \quad U = \int \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{\varepsilon}}{\partial x'} + \frac{\partial \varphi'}{\partial y'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{\varepsilon}}{\partial y'} + \frac{\partial \varphi'}{\partial z'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{\varepsilon}}{\partial z'} \right) F' \, dx' \, dy' \, dz'.$$

Die Gleichungen (22) und (24) sind es, durch welche die Gleichungen (1) und (2) bei der jetzigen Annahme ersetzt werden müssen; sie werden mit denselben identisch, wenn man F als constant betrachtet und $= k$ macht. Ist die Funktion F bekannt, und hat man aus (22) und (24) φ bestimmt, so geben die Gleichungen (23) die magnetischen Momente im Innern des Körpers, und der Ausdruck für U in (24) giebt, wenn der Punkt (x, y, z) ausserhalb der Eisenmasse angenommen wird, das Potential derselben in Beziehung auf diesen Punkt an.

Ist der Eisenkörper ein Ellipsoïd, und ist die Kraft, die auf denselben wirkt, eine constante, so genügt man den Gleichungen (22) und (24) welches auch die Funktion F sei, indem man φ einer linearen Funktion von x, y, z gleich macht; d. h. das Ellipsoïd wird auch bei der jetzt zu Grunde gelegten Annahme gleichmässig magnetisirt. Ist

$$V = -(ax + by + cz),$$

und sind die Haupt-Axen des Ellipsoïds die Coordinaten-Axen, so hat man

$$\varphi = \frac{a}{1 + k A^0} x + \frac{b}{1 + k B^0} y + \frac{c}{1 + k C^0} z$$

zu setzen, wo A^0, B^0, C^0 dieselbe Bedeutung haben wie in den Gleichungen (17) und wo k aus der Gleichung

$$F\left(\sqrt{\frac{a^2}{(1+kA^0)^2}+\frac{b^2}{(1+kB^0)^2}+\frac{c^2}{(1+kC^0)^2}}\right)=k$$

zu bestimmen ist.

Weber hat in seinen elektrodynamischen Massbestimmungen S. 569 Messungen mitgetheilt, die er über das magnetische Moment eines Eisenstäbchens angestellt hat, welches einer, in der Richtung der Axe wirkenden, für alle seine Punkte constanten Kraft unterworfen war. Substituirt man mit Weber für die cylindrische Form des Eisens eine ihr möglichst nahe kommende ellipsoïdische, so kann man aus diesen Messungen und den eben angegebenen Gleichungen die Werthe der Funktion F für gewisse Werthe ihres Arguments berechnen. In der folgenden Tafel sind die Ergebnisse dieser Rechnung zusammengestellt; das Argument der Funktion F ist mit u bezeichnet; die mit No. überschriebenen Columnen enthalten die Nummern der Weber'schen Versuche, aus denen die nebenstehenden Zahlen hergeleitet sind.

№	u	$F(u)$	№	u	$F(u)$
1	301	23,5	8	2484	5,6
2	823	13,5	9	1975	6,7
3	1184	10,2	10	1583	8,1
4	1512	8,4	11	1297	9,5
5	1773	7,4	12	967	12,0
6	2080	6,4	13	612	16,9
7	2397	5,7	14	296	25,0

$F(u)$ ist eine reine Zahl; u aber ist eine Kraft. Als Einheit derselben ist diejenige Kraft vorausgesetzt, die auf die Masse eines Milligramms wirkend, in einer Sekunde eine Geschwindigkeit von einem Millimeter hervorbringt; es ist dies dieselbe Einheit, bei deren Zugrundelegung Gauss in seiner Abhandlung: „*Intensitas vis magneticae etc.*“ die horizontale Componente des Erdmagnetismus zu Göttingen = 1,78 findet.

Weber und Müller sind durch ihre Versuche auf den Schluss geführt, dass das magnetische Moment eines Eisenkörpers sich einer endlichen Grenze nähert, wenn die Intensität

der magnetisirenden Kraft ins Unendliche wächst; hieraus folgt in Bezug auf die Funktion F, dass für ein unendlich grosses u,

$$F(u) = \frac{K}{u} \tag{25}$$

ist, wo K eine Constante bedeutet. Man sieht dieses leicht, wenn man sich den Eisenkörper als ein Ellipsoïd vorstellt, welches durch eine in der Richtung einer Axe wirkenden Kraft magnetisirt wird.

Ist der Eisenkörper ein unbegrenzter und unendlich dünner Cylinder, und sind überdies die Mittelpunkte der magnetisirenden Kräfte symmetrisch um die Axe vertheilt, so dass, nach der Bezeichnung in (19) $V = V^{(0)}$ ist, so genügt man den Gleichungen (22) und (24) durch die Annahme:

$$\varphi = -V\,,\quad U = 0. \tag{26}$$

Dass die Gleichung (24) durch dieselbe erfüllt wird, geht aus folgender Betrachtung hervor: Wenn der Radius des Cylinders unendlich klein ist, so werden zu dem Werthe des Integrals U, in welchen φ durch $-V$, oder φ' durch $-V'$ ersetzt angenommen werden soll, diejenigen Theile des Cylinders, welche in endlicher Entfernung von dem Punkte (x, y, z) liegen, nur etwas verschwindend Kleines beitragen. Man wird daher bei der Integration $\frac{\partial V'}{\partial x'}$, $\frac{\partial V'}{\partial y'}$, $\frac{\partial V'}{\partial z'}$, und folglich F' als constant betrachten dürfen; die zu beweisende Gleichung geht hiernach in

$$0 = \int dx'\,dy'\,dz' \left(\frac{\partial V'}{\partial x'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{s}}{\partial x'} + \frac{\partial V'}{\partial y'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{s}}{\partial y'} + \frac{\partial V'}{\partial z'} \cdot \frac{\partial \frac{1}{s}}{\partial z'} \right)$$

über. Die Richtigkeit hiervon folgt aber daraus, dass bei der Poisson'schen Theorie in dem hier betrachteten Falle durch die Annahme (26) den Bedingungen der Aufgabe genügt wird, wie in § 7 gezeigt worden ist.

Die magnetischen Momente α, β, γ in dem unendlich dünnen Cylinder haben folgende Werthe:

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{\partial V}{\partial x} \cdot F\left(\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2} \right) \\ \beta = -\frac{\partial V}{\partial y} \cdot F\left(\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2} \right) \\ \gamma = -\frac{\partial V}{\partial z} \cdot F\left(\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2} \right). \end{cases} \tag{27}$$

Ich bemerke noch, dass diese Ausdrücke für α, β, γ auch gelten, wenn die Gestalt der Eisenmasse eine ganz beliebige ist, so bald die magnetisirenden Kräfte von unendlich grosser Intensität sind; es ist dann nämlich V unendlich gross, U bleibt endlich in Folge der durch die Gleichung (25) ausgesprochenen Eigenschaft der Funktion F. Aus der Gleichung (22) folgt also, wenn man eine endliche Grösse gegen unendlich grosse vernachlässigt:

$$\varphi = -V,$$

und hieraus ergeben sich unmittelbar die Gleichungen (27). Durch Benutzung von (25) kann man diese hier auf die Form bringen:

$$\alpha = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}} K, \quad \beta = -\frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}} K$$

$$\gamma = -\frac{\frac{\partial V}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}} K.$$

Diese Form zeigt, dass die magnetische Intensität in allen Punkten der Eisenmasse dieselbe ist, nämlich $= K$; die magnetische Axe fällt überall mit der Richtung der magnetisirenden Kraft zusammen.

Zur Theorie des in einem Eisenkörper inducirten Magnetismus. [1])

1.

Ein Fall, in dem die von Poisson aufgestellte Theorie des in weichem Eisen inducirten Magnetismus sich sehr leicht durchführen lässt, der auch in experimenteller Hinsicht Interesse darbietet und, soviel ich weiss, bisher theoretisch nicht behandelt ist, ist der Fall eines Ringes — oder um es bestimmter auszudrücken — eines Rotationskörpers, der von der Rotations-

[1]) Pogg. Ann. Ergänzungsbd. 5. 1870.

axe nicht getroffen wird, von Eisen, der durch einen elektrischen Strom magnetisirt ist, dessen Windungen einen, den Eisenkörper umschliessenden, hohlen Ring bilden, der mit diesem eine gemeinschaftliche Rotationsaxe hat. Die Theorie dieses Falles soll hier entwickelt werden.

Die Poisson'sche Theorie setzt voraus, dass die magnetisirenden Kräfte ein Potential haben: es sei dieses, bezogen auf einen Punkt, der die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z hat, $= V$; es seien ferner α, β, γ die magnetischen Momente in dem Punkte (x, y, z) der Eisenmasse, bezogen auf die Volumeneinheit; die Grössen α, β, γ sind dann eindeutig bestimmt durch die folgenden Gleichungen, die für alle Punkte der Eisenmasse erfüllt werden müssen:

$$\alpha = k\frac{\partial \varphi}{\partial x},\ \beta = k\frac{\partial \varphi}{\partial y},\ \gamma = k\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$0 = V + \varphi + Q$$

$$Q = -k\int \frac{dS}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial N}.$$

Hier bedeutet k die Magnetisirungsconstante des Eisens, dS ein Element der Oberfläche desselben, N die nach dem Innern gerichtete Normale von dS und r die Entfernung dieses Elementes von dem Punkte der Eisenmasse, auf den Q sich bezieht.

In dem hier zu erörternden Falle giebt es ein Potential V; es ist dasselbe aber innerhalb des Eisenkörpers eine vielwerthige Funktion von x, y, z. Um diese zu finden, lege man die z-Axe in die Rotationsaxe des Eisenkörpers und führe ϱ und ϑ statt x und y ein, so dass

$$x = \varrho\cos\vartheta,\ y = \varrho\sin\vartheta$$

ist. Eine jede Windung des elektrischen Stromes soll als ein geschlossener, ebener Strom angesehen werden, dessen Ebene durch die z-Axe geht; der Winkel, den die Ebene einer Windung mit derjenigen Ebene bildet, von der aus der Winkel ϑ gerechnet wird, sei ϑ'; dS sei ein Element der ebenen, von der Windung begrenzten Fläche, N eine Normale dieses Elementes, r die Entfernung desselben von dem Punkte (ϱ, ϑ, z) und i die Intensität des Stromes. Das Potential der betrachteten Windung in Bezug auf den Punkt (ϱ, ϑ, z) kann dann

$$= i \int dS \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial N}$$

gesetzt werden, oder, wenn ϱ' die Entfernung des Elementes dS von der z-Axe genannt wird,

$$= i \int \frac{dS}{\varrho'} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \vartheta'},$$

oder endlich, wenn

$$i \int \frac{1}{r} \frac{dS}{\varrho'} = U$$

gesetzt, d. h. durch U das Potential einer Masse bezeichnet wird, deren Dichtigkeit $= \frac{i}{\varrho'}$ in dem Elemente dS ist,

$$= \frac{\partial U}{\partial \vartheta'}.$$

Das Potential der betrachteten Windung ist aber vielwerthig: aus dem angegebenen Werthe erhält man die übrigen durch Hinzufügung eines Vielfachen von $4\pi i$. Die Differentialquotienten desselben Potentials nach ϱ, ϑ, z sind einwerthige, stetige Funktionen, die überall, ausser in der Fläche, deren Element dS genannt ist, dieselben Werthe haben, wie die entsprechenden Differentialquotienten von $\frac{\partial U}{\partial \vartheta'}$. Hiernach findet man leicht die nach ϱ, ϑ, z genommenen Differentialquotienten von V. Es sei n die Zahl der sämmtlichen Windungen des Stromes; auf das Winkelelement $d\vartheta'$ kommen dann $\frac{n\,d\vartheta'}{2\pi}$ Windungen und daher ist:

$$\frac{\partial V}{\partial \varrho} = \frac{n}{2\pi} \int \frac{\partial^2 U}{\partial \varrho\, \partial \vartheta'} d\vartheta'$$

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \frac{n}{2\pi} \int \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta\, \partial \vartheta'} d\vartheta'$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{n}{2\pi} \int \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial \vartheta'} d\vartheta',$$

wo die Integrationen von $\vartheta' = \vartheta + \varepsilon$ bis $\vartheta' = 2\pi + \vartheta - \varepsilon$ ausgedehnt werden sollen und ε eine unendlich kleine Grösse bedeutet. Für die beiden Grenzwerthe von ϑ haben nun $\frac{\partial U}{\partial \varrho}$ und $\frac{\partial U}{\partial z}$ immer und hat $\frac{\partial U}{\partial \vartheta}$ dann gleiche Werthe, wenn der Punkt (ϱ, ϑ, z) ausserhalb des Ringes liegt, den die Windungen

des Stromes bilden; liegt der Punkt innerhalb dieses Ringes, so unterscheiden sich die beiden Werthe von $\frac{\partial U}{\partial \vartheta}$ um $4\pi i$. Daraus folgt, dass $\frac{\partial V}{\partial \varrho}$ uud $\frac{\partial V}{\partial z}$ immer $= 0$ sind und $\frac{\partial U}{\partial \vartheta}$ im ersten dieser beiden Fälle $= 0$, im zweiten $= 2ni$ ist. Hieraus ergiebt sich, dass, wenn man über die willkürliche additive Constante in V passend verfügt, ausserhalb jenes Ringes

$$V = 0,$$

innerhalb desselben

$$V = 2ni\vartheta$$

ist.

Bei diesem Werthe von V genügt man den beiden Gleichungen, aus denen φ und Q zu bestimmen sind, durch

$$Q = 0, \ \varphi = -V.$$

Hiernach ist die magnetische Axe in jedem Punkte des Eisenkörpers senkrecht auf der durch ihn und die z-Axe gelegten Ebene und die auf die Volumeneinheit bezogene magnetische Intensität, nämlich $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$,

$$= \frac{2nki}{\varrho}.$$

Bildet man das für Q angegebene Integral unter der Annahme, dass der Anfangspunkt von r ausserhalb der Eisenmasse liegt, so giebt es das Potential der Eisenmasse in Bezug auf diesen Punkt an. Bei dem hier gefundenen Werthe von φ ist dieses Potential $= 0$; der Eisenkörper übt ebenso wie der Ring, den der elektrische Strom bildet, auf äussere Magnetpole keine Kräfte aus.

Das Potential des Eisenringes in Bezug auf einen geschlossenen elektrischen Strom ist aber nicht immer $= 0$, nämlich dann nicht, wenn dieser Strom den Eisenring umschlingt. Hierauf beruht es, dass ein elektrischer Strom in einem geschlossenen Drahte, der den Ring umschlingt, inducirt wird, wenn in diesem der Magnetismus entsteht oder verschwindet.

Es sei K das Potential eines Magnetpols, der die Flüssigkeitsmenge 1 enthält und im Punkte (x, y, z) sich befindet, in Bezug auf einen Strom, der mit der Intensität 1 den gedachten Draht durchfliesst. Das Potential des magnetischen Eisenkörpers in Bezug auf denselben Strom ist dann:

$$= \int\int\int dx\ dy\ dz \left(\alpha \frac{\partial K}{\partial x} + \beta \frac{\partial K}{\partial y} + \gamma \frac{\partial K}{\partial z} \right)$$

oder

$$= k \int\int\int dx\ dy\ dz \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial K}{\partial z} \right),$$

wo die Integration über das Volumen des Eisenkörpers auszudehnen ist. Nach dem Green'schen Satze lässt sich dieser Ausdruck auf ein nach der Oberfläche desselben zu nehmendes Integral reduciren; da aber der Raum, den der Eisenkörper einnimmt, ein doppelt zusammenhängender ist und in ihm φ und K im Allgemeinen vielwerthig sind, so müssen zu dieser Oberfläche die beiden Seiten eines Querschnitts hinzugerechnet werden, der den genannten Raum in einen einfach zusammenhängenden verwandelt. Ist dS ein Element der Oberfläche, die man dadurch erhält, und N die nach Innen gerichtete Normale desselben, so ist, da

$$\frac{\partial^2 \varphi}{dx^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

jenes Potential

$$= -k \int dS \frac{\partial \varphi}{\partial N} K.$$

Für alle Punkte der Ringoberfläche ist nach dem für φ gefundenen Ausdrucke $\frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0$; auf den beiden Seiten des Querschnitts hat $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ entgegengesetzte Werthe; sind K' und K'' die im Allgemeinen verschiedenen Werthe von K auf den beiden Seiten des Querschnitts, so ist daher dasselbe Potential

$$= k \int dS \frac{\partial \varphi}{\partial N} (K' - K''),$$

wo die Integration nur über die eine Seite des Querschnitts auszudehnen ist. Umschlingt der Strom, auf den sich K bezieht, den Eisenring nicht, so ist $K' - K'' = 0$, umschlingt er ihn einmal, so ist diese Differenz $= 4\pi$, umschlingt er ihn n'mal, so ist sie $= n' 4\pi$. In dem letzten Falle ist daher das betrachtete Potential

$$= n' 4\pi k \int dS \frac{\partial \varphi}{\partial N}.$$

Der Querschnitt sei so gewählt, dass er einen Theil einer durch die z-Axe gelegten Ebene bildet; dann ist der absolute Werth von $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$

$$= \frac{2\pi i}{\varrho}$$

und daher jenes Potential ohne Rücksicht auf das Vorzeichen

$$= nn' 8\pi ik \int \frac{dS}{\varrho},$$

wo die Integration über den Querschnitt des Eisenringes auszudehnen ist.

Ebenso gross ist die elektromotorische Kraft, die in dem gedachten Drahte inducirt wird, wenn der Magnetismus des Eisenringes entsteht oder verschwindet.

Das Entstehen oder Verschwinden des primären Stromes selbst inducirt in dem secundären Leiter eine elektromotorische Kraft, die gleich dem Potential jenes in Bezug auf einen Strom von der Intensität 1 in diesem ist, d. h.

$$= \int dS' \frac{\partial V}{\partial N},$$

wenn dS' ein Element einer durch den secundären Leiter begrenzten Fläche und N die eine Normale dieses Elementes bedeutet. Bei dem für V gefundenen Werthe sind diejenigen Theile dieses Integrals $= 0$, die sich auf Theile der genannten Fläche beziehn, welche ausserhalb des von den Windungen des primären Stromes gebildeten, hohlen Ringes liegen. Umschlingt der secundäre Leiter diesen Ring in einer Windung so kann die Fläche so gewählt werden, dass der Theil derselben, für den $\frac{\partial V}{\partial N}$ nicht $= 0$ ist, einer durch die z-Axe gelegten Ebene angehört; ist dann noch die Wanddicke des von den Windungen des primären Stromes gebildeten Ringes als verschwindend klein zu betrachten, so ist hier überall $\frac{\partial V}{\partial N} = \frac{2\pi i}{\varrho}$ und also das gesuchte Potential

$$= 2\pi i \int \frac{dS}{\varrho},$$

wo die Integration über den Querschnitt des eben bezeichneten Ringes auszudehnen ist. Ist die Wanddicke dieses Ringes

nicht zu vernachlässigen, so tritt an Stelle des abgeleiteten Ausdrucks die Summe der Werthe, die derselbe für die Ringe von unendlich kleiner Wanddicke annimmt, in welche der wirkliche Ring zerlegt gedacht werden kann. Umschlingt der secundäre Leiter den inducirten Ring n' mal, so ist das betrachtete Potential n' mal so gross, als in dem Falle einer einmaligen Umschlingung.

Wenn der primäre Draht unmittelbar auf den Eisenring gewunden und die Wanddicke des Ringes, den er bildet, zu vernachlässigen ist, so hat man

$$\int \frac{dS}{\varrho} = \int \frac{dS}{\varrho};$$

die ganze elektromotorische Kraft, die in dem secundären Drahte beim Schliessen oder Oeffnen des primären Stromes inducirt wird, ist dann

$$= 2nn'i(4\pi k + 1)\int \frac{dS}{\varrho},$$

oder auch, wenn man durch dt ein Element des Volumens des Eisenringes bezeichnet,

$$= \frac{nn'}{\pi} i(4\pi k + 1)\int \frac{dt}{\varrho^2}.$$

Ist beispielweise der Querschnitt des Eisenringes ein Kreis von dem Radius a und ist R der Radius des Kreises, auf dem die Mittelpunkte der Querschnitte liegen, so ist dieser Ausdruck

$$= 4\pi nn'i(4\pi k + 1)(R - \sqrt{R^2 - a^2}).$$

Der Werth der Grösse k, der in der Poisson'schen Theorie als constant betrachtet wird, ist in der Wirklichkeit bekanntlich von der Intensität der magnetisirenden Kraft abhängig. In dem Anhange zu' meiner Abhandlung „über den inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen“ [1]) habe ich die Gleichungen abgeleitet, die an die Stelle der Poisson'schen treten, wenn man auf diese Abhängigkeit Rücksicht nimmt. Auch diese allgemeinen Gleichungen können in dem hier behandelten Falle mit Leichtigkeit gelöst werden. Man sieht unmittelbar ein, dass die im

[1]) S. oben p. 220.

Vorstehenden abgeleiteten Gleichungen bei Rücksicht auf die Veränderlichkeit von k ihre Gültigkeit behalten, sobald der Eisenring so dünn ist, dass die Aenderungen, die ϱ in demselben erfährt, als unendlich klein betrachtet werden dürfen. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so hat man sich den Ring in unendlich viele Ringe, die ihr genügen, zerlegt zu denken und für jeden dieser den magnetischen Zustand so zu berechnen, als ob die andern nicht vorhanden wären. Die elektromotorische Kraft, die der ganze Ring bei dem Entstehen oder Verschwinden des Magnetismus inducirt, findet man in der Summe der elektromotorischen Kräfte, welche jene Theile dabei induciren.

Auf diese Thatsachen lässt sich eine, wie mir scheint, recht zweckmässige Methode zur Bestimmung von k gründen.

2.

Wenn elektrische Ströme durch eine Eisenmasse hindurchfliessen, so lässt sich auf den in dieser erregten Magnetismus die Poisson'sche Theorie unmittelbar nicht anwenden, weil dann die magnetisirenden Kräfte kein Potential haben. Betrachtungen, die denjenigen gleich sind, durch welche man zu den oben angegebenen Gleichungen der Poisson'schen Theorie gelangt, führen hier zu den folgenden Gleichungen.

Es seien A, B, C die Componenten der magnetisirenden Kraft in einem Punkte der Eisenmasse, dessen rechtwinklige Coordinaten a, b, c sind, Q eine zu bestimmende Funktion von a, b, c, endlich α, β, γ die auf die Volumeneinheit bezogenen magnetischen Momente in dem Pnnkte (a, b, c); dann ist:

$$\alpha = k\left(A - \frac{\partial Q}{\partial a}\right)$$

$$\beta = k\left(B - \frac{\partial Q}{\partial b}\right)$$

$$\gamma = k\left(C - \frac{\partial Q}{\partial c}\right),$$

und ferner

$$Q = \int\int\int dx\,dy\,dz\left(\alpha\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + \beta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right),$$

wo x, y, z die Coordinaten eines zweiten Punktes der Eisen-

masse, r die Entfernung dieses von dem Punkte (a, b, c) und α, β, γ die magnetischen Momente im Punkte x, y, z bezeichnen.

Lässt man in dem für Q angegebenen Ausdrucke (a, b, c) einen Punkt ausserhalb der Eisenmasse bedeuten, so stellt er das Potential derselben in Bezug auf diesen dar.

Den Ausdruck von Q kann man sowohl für den Fall, dass der Punkt (a, b, c) innerhalb, als für den Fall, dass er ausserhalb der Eisenmasse liegt, auf ein über die Oberfläche des Eisens zu nehmendes Integral zurückführen. Um das zu zeigen, bezeichne man mit dS ein Element dieser Oberfläche und mit N die nach Innen gerichtete Normale desselben; durch partielle Integration erhält man dann

$$Q = -\int \frac{dS}{r}[\alpha \cos(Nx) + \beta \cos(Ny) + \gamma \cos(Nz)]$$
$$-\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{r}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right).$$

Um für den Fall, dass der Punkt (a, b, c) innerhalb der Eisenmasse liegt, r also innerhalb der Grenzen der Integration verschwindet, die Richtigkeit dieser Gleichung vollständig einzusehn, muss man zuerst eine unendlich kleine Kugel, deren Mittelpunkt der Punkt (a, b, c) ist, von dem Raume, auf den die Integrationen sich beziehen, ausgeschlossen denken und dann beachten, dass für diese Kugel die 3 Integrale, die in den beiden Ausdrücken von Q vorkommen, unendlich klein sind. Aus dem umgeformten Ausdrucke von Q folgt, dass, wenn der Punkt (a, b, c) innerhalb des Eisenkörpers liegt,

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial c^2} = 4\pi\left(\frac{\partial \alpha}{\partial a} + \frac{\partial \beta}{\partial b} + \frac{\partial \gamma}{\partial c}\right)$$

ist.

Bezeichnet man durch u, v, w die Componenten der Stromdichtigkeit in dem Punkte (x, y, z) des von den Strömen erfüllten Raumes und setzt

$$U = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{r} u$$
$$V = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{r} v$$
$$W = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{r} w,$$

so folgt aus dem Gesetze der Kraft mit der ein Stromelement auf einen Magnetpol wirkt,

$$A = \frac{\partial V}{\partial c} - \frac{\partial W}{\partial b}$$
$$B = \frac{\partial W}{\partial a} - \frac{\partial U}{\partial c}$$
$$C = \frac{\partial U}{\partial b} - \frac{\partial V}{\partial a}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial B}{\partial b} + \frac{\partial C}{\partial c} = 0$$

und also bei Rücksicht auf die für α, β, γ aufgestellten Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial c^2} = -\frac{1}{k}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial a} + \frac{\partial \beta}{\partial b} + \frac{\partial \gamma}{\partial c}\right).$$

Die beiden zwischen

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial c^2} \text{ und } \frac{\partial \alpha}{\partial a} + \frac{\partial \beta}{\partial b} + \frac{\partial \gamma}{\partial c}$$

abgeleiteten Gleichungen zeigen, dass diese beiden Grössen verschwinden und also, wo auch der Punkt (a, b, c) liegt,

$$Q = \int \frac{dS}{r}\left[\alpha \cos(Nx) + \beta \cos(Ny) + \gamma \cos(Nz)\right]$$

oder in Folge der Gleichungen für α, β, γ

$$Q = k\int \frac{dS}{r}\frac{\partial Q}{\partial N} - k\int \frac{dS}{r}\left[A\cos(Nx) + B\cos(Ny) + C\cos(Nz)\right]$$

ist.

Diese Gleichung, bezogen auf die Punkte der Eisenmasse, dient zur Bestimmung von Q; ist Q gefunden, so erhält man α, β, γ aus den für diese Grössen aufgestellten Gleichungen.

Zwischen den magnetischen Momenten α, β, γ und den Stromdichtigkeiten u, v, w bestehen gewisse einfache Relationen, deren Ableitung hier eine Stelle finden möge.

Aus den Gleichungen, durch welche U, V, W definirt sind, folgt:

$$\frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b} + \frac{\partial W}{\partial c}$$
$$= \iiint dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}u + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}v + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}w\right),$$

wo die Integration über die ganze Stromleitung auszudehnen, oder

$$= -\sum\iiint dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}u + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}v + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}w\right),$$

wo das Integral für jeden einzelnen Leiter zu bilden und dann die Summe für alle Leiter zu nehmen ist. Durch partielle Integration verwandelt sich dieser Ausdruck in den folgenden:

$$\sum\left\{\int\frac{dS}{r}\left(u\cos(Nx) + v\cos(Ny) + w\cos(Nz)\right)\right.$$
$$\left. + \iiint\frac{dx\,dy\,dz}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\},$$

wo dS ein Element der Oberfläche eines Leiters bezeichnet. Unter der Voraussetzung, dass die elektrischen Ströme stationäre sind, ist aber

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

und

$$u\cos(Nx) + v\cos(Ny) + w\cos(Nz)$$

ist für die freie Oberfläche eines Leiters $= 0$ und hat für die Grenzfläche zweier Leiter entgegengesetzte Werthe in beiden. Hieraus folgt, dass die ganze Summe verschwindet, mithin

$$\frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b} + \frac{\partial W}{\partial c} = 0$$

ist.

Aus den Gleichungen für A, B, C ergiebt sich aber

$$\frac{\partial B}{\partial c} - \frac{\partial C}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial V}{\partial b} + \frac{\partial W}{\partial c}\right) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial c^2}\right);$$

es ist daher

$$\frac{\partial B}{\partial c} - \frac{\partial C}{\partial b} = -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial c^2}\right)$$

oder wegen des Werthes von U

$$\frac{\partial B}{\partial c} - \frac{\partial C}{\partial b} = 4\pi u.$$

Ebenso ist

$$\frac{\partial C}{\partial a} - \frac{\partial A}{\partial c} = 4\pi v$$
$$\frac{\partial A}{\partial b} - \frac{\partial B}{\partial a} = 4\pi w.$$

Bei Rücksicht auf die Gleichungen für α, β, γ folgt hieraus:

$$\frac{\partial \beta}{\partial c} - \frac{\partial \gamma}{\partial b} = 4\pi k u$$
$$\frac{\partial \gamma}{\partial a} - \frac{\partial \alpha}{\partial c} = 4\pi k v$$
$$\frac{\partial \alpha}{\partial b} - \frac{\partial \beta}{\partial a} = 4\pi k w.$$

Wenn der magnetische Zustand der Eisenmasse durch Aenderung der Intensität der magnetisirenden Ströme geändert wird, so werden dadurch in den vorhandenen Leitern elektrische Ströme inducirt. Es seyen X, Y, Z die Kräfte, die zur Zeit t in Folge der Aenderungen von α, β, γ in dem Punkte (x, y, z) auf die Einheit positiver Elektricität nach den Richtungen der Axen und auf die Einheit negativer Elektricität in den entgegengesetzten Richtungen wirken. Geht man aus von dem Gesetze der Induction, die in einem geschlossenen linearen Leiter durch die Aenderung des magnetischen Zustandes eines magnetischen Moleküls hervorgerufen wird, und setzt man

$$\mathrm{A} = \iiint \frac{da\, db\, dc}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$
$$\mathrm{B} = \iiint \frac{da\, db\, dc}{r} \frac{\partial \beta}{\partial t}$$
$$\Gamma = \iiint \frac{da\, db\, dc}{r} \frac{\partial \gamma}{\partial t},$$

wo (a, b, c) einen Punkt der Eisenmasse bedeutet, so findet man dann

$$X = \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma}{\partial y}$$
$$Y = \frac{\partial \Gamma}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z}$$
$$Z = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}.$$

Gewisse Fragen über die durch das Entstehen oder Verschwinden des Magnetismus des Eisenkörpers inducirten elektrischen Ströme kann man beantworten, sobald man das Potential des magnetischen Eisens in Bezug auf die magnetisirenden Ströme kennt. Dieses Potential ist

$$\iiint da\, db\, dc\, (\alpha A + \beta B + \gamma C),$$

wo (a, b, c) wiederum einen Punkt der Eisenmasse bedeutet.

Es ist von selbst klar, dass dieser Ausdruck das genannte Potential darstellt, sobald von einem solchen im gewöhnlichen Sinne des Wortes die Rede sein kann, sobald nämlich die Ströme nicht durch die Eisenmasse hindurchfliessen und also A, B, C die partiellen Differentialquotienten einer Funktion von a, b, c sind. In Bezug auf die Inductionswirkungen hat der Ausdruck dieselbe Bedeutung und verdient insofern denselben Namen, wenn die Eisenmasse von den Strömen durchflossen wird, wie wenn das nicht der Fall ist.

Die aufgestellten Gleichungen — von denen einen Theil schon Maxwell in seiner Abhandlung *on the electromagnetic field*[1]) angegeben hat — sollen nun auf einen sehr einfachen Fall angewendet werden.

Ein Theil der Stromleitung sei ein unendlich langer Cylinder von kreisförmigem Querschnitt, von dem ein durch zwei Querschnitte begränztes Stück aus Eisen besteht; die beiden Enden des Cylinders seien durch eine, eine Kette enthaltende Rückleitung mit einander verbunden, die überall unendlich weit von dem Eisen entfernt ist. Die Axe des Cylinders sei die z-Axe, sein Radius R, die Intensität des Stromes i.

Diejenigen Theile der für U, V, W aufgestellten Integrale, die sich auf die genannte Rückleitung beziehen, sind, wie man leicht sieht, bis auf unendlich kleine Grössen Constanten gleich; da in der Rechnung nur die Differentialquotienten von U, V, W vorkommen, so kann man sich daher darauf beschränken, jene Integrale über den Cylinder auszudehnen. Für diesen ist

$$u = 0,\ v = 0,\ w = \frac{i}{\pi R^2};$$

man darf also setzen:

$$U = 0$$
$$V = c$$
$$W = \frac{i}{\pi R^2} \iiint \frac{dx\,dg\,dz}{r}.$$

Die letzte von diesen Gleichungen giebt, wenn man

$$a^2 + b^2 = \varrho^2$$

[1]) London philos. transactions 1865.

macht und durch D eine (unendlich grosse) Constante bezeichnet:

$$W = -\frac{i}{R^2}\varrho^2 + D.$$

Hieraus folgt:

$$A = \frac{2i}{R^2}b$$
$$B = -\frac{2i}{R^2}a$$
$$C = 0.$$

Bei diesen Werthen von A, B, C wird für alle Elemente der Oberfläche des Eisenkörpers

$$A\cos(Nx) + B\cos(Ny) + C\cos(Nz) = 0$$

und daher die zur Bestimmung von Q dienende Gleichung

$$Q = k\int\frac{dS}{r}\frac{dQ}{dN}.$$

Hieraus folgt

$$Q = 0$$

und dann weiter

$$\alpha = \frac{2ki}{R^2}b$$
$$\beta = -\frac{2ki}{R^2}a$$
$$\gamma = 0.$$

Die magnetische Axe ist daher überall senkrecht auf ϱ und auf z, und die auf die Volumeneinheit bezogene magnetische Intensität ist

$$\frac{2ki}{R^2}\varrho.$$

Auch für Punkte ausserhalb der Eisenmasse ist $Q = 0$; magnetische Kräfte übt dieselbe nach Aussen hin also nicht aus. Bei Schliessung und Oeffnung der Leitung wird in dieser selbst aber durch das Auftreten und Verschwinden des Magnetismus ein elektrischer Strom inducirt; es erfährt dadurch das Potential der Leitung in Beziehung auf sich selbst scheinbar eine Vergrösserung. Diese Vergrösserung ist das Potential des magnetischen Eisens in Bezug auf den magnetisirenden Strom, dividirt durch i^2, d. h.

$$= \frac{1}{i^2}\iiint da\,da\,dc\,(\alpha A + \beta B + \gamma C)$$

oder, wenn man mit L die Länge des Eisencylinders bezeichnet,

$$= 2\pi k L.$$

Auch in dem hier behandelten Falle kann man mit Leichtigkeit sich von der Voraussetzung, dass k eine Constante ist, unabhängig machen; den Gleichungen nämlich, welche bei Rücksicht auf die Veränderlichkeit von k den magnetischen Zustand des Eisencylinders bestimmen, genügt man ebenfalls durch die Annahme $Q = 0$.

Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe.[1])

Der erste Versuch einer Theorie der Transversalschwingungen elastischer Scheiben ist von Sophie Germain bekannt gemacht. Im Jahre 1811 reichte sie der Pariser Akademie, die einen Preis für eine solche Theorie ausgesetzt hatte, eine Abhandlung ein, in welcher eine Hypothese über die Kräfte auseinandergesetzt war, mit denen eine Scheibe Formveränderungen widerstrebt, und aus dieser Hypothese war eine partielle Differentialgleichung für die Schwingungen abgeleitet. Die Verfasserin hatte bei der Rechnung einen Fehler gemacht; Lagrange, der sich in der zur Begutachtung der Abhandlung niedergesetzten Commission befand, leitete aus ihrer Hypothese die Differentialgleichung ab, welche eine richtige Rechnung geben musste. Es ist dieses dieselbe, welche noch jetzt als die richtige anerkannt wird. Noch fehlten aber die Grenzbedingungen, durch welche die Lösung der partiellen Differentialgleichung erst zu einer bestimmten wird. Diese hat Sophie Germain in einer zweiten Abhandlung, die sie zwei Jahre später der Akademie übergab, aus derselben Hypothese abgeleitet. Sie waren von der Art, dass die Verfasserin die Lösung des Problems für den Fall rechteckiger Scheiben ermitteln konnte. Sie verglich ihre theoretischen Resultate für diesen Fall mit Beobachtungen und fand eine Uebereinstim-

[1]) Crelle's Journal. Bd. 40. 1850.

mung, die ihre Hypothese zu bestätigen schien. In einer dritten Abhandlung, die sie 1815 der Akademie überreichte, erweiterte sie ihre Hypothese so, dass sich aus derselben auch die Theorie der Schwingungen von Platten ableiten liess, die im natürlichen Zustande gekrümmt sind. Sie konnte die Rechnung für cylinderförmig gekrümmte Platten durchführen und fand auch hier ihre theoretischen Resultate im Einklang mit experimentellen.

Diese 3 Abhandlungen sind nicht gedruckt; den Hauptinhalt derselben und die Ergebnisse ihrer fortgesetzten Forschungen hat die Verfasserin in zwei Schriften veröffentlicht, von denen die erste „Recherches sur la théorie des surfaces élastiques" im Jahre 1821, die zweite „Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques, et l'équation générale de ces surfaces" im Jahre 1826 zu Paris erschienen sind.

Ungeachtet der Bestätigungen, welche die Theorie von Sophie Germain durch Versuche erfahren hat, ist sie nicht richtig; denn man kann Folgerungen aus ihr ziehen, welche in offenbarem Widerspruche mit der Wirklichkeit stehen. Ich beschränke mich, um dieses zu zeigen, auf die Betrachtung einer Platte, die im natürlichen Zustande eben ist. Die Schlüsse, durch deren Hülfe Sophie Germain zu ihren Gesetzen für die Formveränderung, die eine solche Platte durch die Wirkung äusserer Kräfte erleidet, und für die Schwingungen, die sie vollführt, gelangt, sind im Wesentlichen folgende.

In jedem Elemente der Platte, welches seine Gestalt verändert hat, ist eine Kraft erzeugt, welche dasselbe in seine ursprüngliche Form zurückzuführen trachtet. Die Bedingung des Gleichgewichts der Platte ist die, dass das Moment aller in derselben erzeugten Kräfte und das Moment der gegebenen äusseren Kräfte eine verschwindende Summe liefern. Es sei ε die Dicke der Platte, df ein Element ihrer Mittelfläche; die in dem Elemente εdf erzeugte Kraft wird um so grösser sein, je grösser der Unterschied der Gestalt von df nach der Formveränderung und der ursprünglichen Gestalt dieses Elements ist. Hätte man ein passendes Maass für diesen Unterschied, so würde man jene Kraft diesem proportional annehmen.

können; es sei u ein solches Maass, dann wird man jene Kraft

$$= N^2 u\, df$$

setzen können; wo N^2 eine von der Dicke und der Natur der Platte abhängige Constante bezeichnet. Das Streben dieser Kraft geht dahin, u zu verkleinern; das Moment derselben wird daher sein:

$$- N^2 u\, \delta u\, df;$$

wo δu die virtuelle Veränderung von u bedeutet.

Stellt man die entsprechende Betrachtung für den Fall eines elastischen Stabes an, so gelangt man zu den richtigen Endgleichungen, wenn man $u =$ dem reciproken Krümmungsradius der Mittellinie des Stabes setzt; Sophie Germain glaubte dem entsprechend in dem Falle einer Scheibe $u =$ der Summe der reciproken Hauptkrümmungsradien der Mittelfläche annehmen zu können. Sind diese Hauptkrümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2, so erhielt sie demnach für das Moment der in dem einen Elemente erzeugten Kraft den Ausdruck

$$- N^2 \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) \delta \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) df,$$

und als Bedingung des Gleichgewichts der Platte die Gleichung:

$$\delta P - N^2 \int \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) \delta \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) df = 0,$$

falls δP das Moment der gegebenen äussern Kräfte bezeichnet.

Um zu zeigen, dass diese Bedingung unmöglich die richtige sein kann, wende ich sie auf den Fall an, dass eine Scheibe unendlich wenig aus ihrer ursprünglichen Gestalt gebracht ist durch Kräfte, die auf ihr Inneres senkrecht zu ihrer Mittelfläche wirken; den Rand der Scheibe nehme ich dabei der Einfachheit wegen als frei an. Die Mittelfläche in ihrer ursprünglichen Gestalt sei die xy-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems, z die auf ihr senkrechte Verrückung, welche der Punkt (x, y) der Mittelfläche erlitten hat, Z die Kraft, die in der Richtung von z auf eine Linie der Platte wirkt, die in derselben Richtung durch den Punkt (x, y) gezogen ist. Setzt man dann

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = u,$$

so liefert jene Gleichgewichtsbedingung für u die partielle Differentialgleichung

$$N^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=Z$$

und die Grenzbedingungen

$$u=0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}=0,$$

wo n die Normale des Umfanges der Mittelfläche bezeichnet. Nun ist aber die Lösung der Differentialgleichung für u schon durch die erste der beiden Grenzbedingungen vollkommen bestimmt; es ist daher im Allgemeinen nicht möglich, ein u zu finden, welches auch noch der zweiten Grenzbedingung genügt; und demnach gäbe es im Allgemeinen gar kein Gleichgewicht für die Platte. Wären die gegebenen Kräfte Z von der Art, dass eine Funktion u gefunden werden könnte, die den beiden Grenzbedingungen genügt, so hätte man, um die Gestalt der Mittelfläche zu ermitteln, diesen Werth von u in die Differentialgleichung für z zu substituiren und aus derselben z zu bestimmen. Dieser Gleichung genügen aber unendlich viele Funktionen, es würde daher in diesem Falle unendlich viele Gleichgewichtslagen der Platte geben. Dieser Fall würde z. B. eintreten, wenn keine Kräfte Z vorhanden sind; wäre die Platte in irgend welche Gestalt gebracht, für die

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

ist, und dann sich selbst überlassen, so müsste sie in dieser Gestalt verharren, ohne das Bestreben zu zeigen, in ihre ursprüngliche Gestalt zurückzukehren. Jener Gleichgewichtsbedingung zufolge müsste die Platte, auch wenn sie endliche Krümmungen erlitten hat, ohne Mitwirkung äusserer Kräfte im Gleichgewichte sich befinden, sobald für alle Punkte ihrer Mittelfläche die Summe der reciproken Hauptkrümmungsradien verschwindet.

Eine zweite Theorie des Gleichgewichts und der Bewegung elastischer Scheiben ist von Poisson aufgestellt und in seiner berühmten Abhandlung „Sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques“[1]) entwickelt. Aber auch diese

[1]) Mém. de l'Ac. d. sc. à Par. 1829, p. 237.

Theorie bedarf einer Berichtigung, und dieselbe zu geben, ist eben meine Absicht. Poisson gelangt, indem er seine allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichts elastischer Körper auf den Fall einer Scheibe anwendet, zu derselben partiellen Differentialgleichung, zu welcher die Hypothese von Sophie Germain geführt hat, aber zu andern Grenzbedingungen, und zwar zu drei Grenzbedingungen. Ich werde beweisen, dass im Allgemeinen diesen nicht gleichzeitig genügt werden kann; woraus dann folgt, dass auch nach der Poisson'schen Theorie eine Platte im Allgemeinen keine Gleichgewichtslage haben müsste. Diesen Beweis werde ich aber erst führen, nachdem ich die zwei Grenzbedingungen abgeleitet haben werde, die an die Stelle der Poisson'schen drei zu setzen sind, weil er sich naturgemäss an die Betrachtungen anschliesst, durch welche ich jene ableiten will.

Poisson hat seine Theorie auf den Fall einer kreisförmigen Platte angewandt, die so schwingt, dass alle Punkte, die gleich weit von ihrem Mittelpunkte abstehen, sich immer in demselben Zustande befinden; er konnte sie auf diesen Fall anwenden, weil in demselben eine seiner drei Grenzbedingungen identisch erfüllt wurde. Aus der modificirten Theorie werde ich allgemein die Gesetze der Schwingungen einer freien kreisförmigen Platte entwickeln; in dem bezeichneten speciellen Falle werde ich zu denselben Formeln gelangen, welche Poisson gefunden hat. Durch die Güte des Herrn Direktor Strehlke, welcher Messungen in Bezug auf die Knotenlinien kreisförmiger Scheiben angestellt hat, bin ich in den Stand gesetzt, einige der numerischen Resultate der Theorie mit den entsprechenden Resultaten der Beobachtung zusammenzustellen.

§ 1.

Poisson legt seinen Betrachtungen über eine elastische Platte die Gleichungen zu Grunde, welche auf die Formveränderungen beliebig gestalteter elastischer Körper sich beziehen. Diese Gleichungen lassen sich in eine zusammenfassen, welche ausspricht, dass das Moment der Kräfte, welche die Formveränderung bewirkt haben, der Variation eines gewissen Integrals gleich ist. Es hat diese vor jenen auch das voraus, dass jene nur gelten, wenn die Verrückungen unendlich klein sind, wäh-

rend diese besteht, sobald die Dilatationen und Contractionen unendlich klein sind; auf den Fall von unendlich dünnen Stäben oder Platten, die endliche Krümmungen erlitten haben, können jene nicht angewandt werden, diese kann es aber. Sie ist die folgende:

$$(1) \qquad 0 = \delta P - \delta K \int dV \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \theta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 \right).$$

Hier bedeuten: δP das Moment der gegebenen Kräfte, dV das Volumen eines Elements des Körpers, λ_1, λ_2, λ_3 die Hauptdilatationen dieses Elements; die Integration ist über den ganzen Körper auszudehnen; K und θ sind zwei Constanten, von denen der Elasticitätscoëfficient q auf die Weise abhängt, dass

$$q = 2K \frac{1+3\theta}{1+2\theta}$$

ist. Man erhält aus (1) die Poisson'schen Gleichungen, wenn man $\theta = \frac{1}{4}$ setzt, und die Gleichungen, zu welchen Herr Wertheim durch seine Versuche geführt worden ist [1]), wenn mann $\theta = 1$ macht. Bezeichnet man die rechtwinkligen Coordinaten des Ortes von dV im ursprünglichen Zustande des Körpers durch x, y, z, die Verrückungen in den Richtungen der Axen, die dasselbe bei der Formveränderung erlitten hat, durch u, v, w, die Kräfte, die auf dasselbe in den Richtungen der Axen wirken, durch $X dV$, $Y dV$, $Z dV$; nennt man ferner $d0$ ein Element der Oberfläche des Körpers und $(X) d0$, $(Y) d0$, $(Z) d0$ die Druckkräfte, die auf dasselbe in den Richtungen der Axen ausgeübt werden, so ist der Werth von δP, der in die Gleichung (1) gesetzt werden muss, folgender:

$$(2) \qquad \delta P = \int dV (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) + \int d0 \left((X) \delta u + (Y) \delta v + (Z) \delta w \right).$$

wo das erste Integral über das ganze Volumen, das zweite über die ganze Oberfläche des Körpers auszudehnen ist.

Dass die Gleichung (1) für den Fall, dass u, v, w unendlich klein sind, wirklich die bekannten Gleichungen für die Formveränderungen elastischer Körper liefert, davon überzeugt man sich leicht durch folgende Rechnung.

Es seien α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche eine

[1]) Ann. de ch. et de ph. 3e sér. XXIII. p. 52.

durch den Punkt (x, y, z) gezogene Linie mit den Coordinaten-Axen bildet: die Dilatation in der Richtung dieser Linie für den Punkt (x, y, z), die durch λ bezeichnet werden möge, ist dann unter der Voraussetzung, dass u, v, w, also auch die Differentialquotienten dieser Grössen nach x, y, z unendlich klein sind, durch die folgende Gleichung bestimmt:

$$\lambda = \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma^2 \frac{\partial w}{\partial z} + \beta\gamma\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \gamma\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \alpha\beta\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Die Hauptdilatationen λ_1, λ_2, λ_3 sind die Werthe von λ für diejenigen Werthe von α, β, γ, für welche die Variation $\delta\lambda$ verschwindet; d. h. sie sind die Wurzeln der Gleichung

$$0 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \lambda\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \lambda\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \lambda\right) - \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \lambda\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 - \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \lambda\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \lambda\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Es folgt daraus:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

und ferner

$$\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 - \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

also auch

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Diese Werthe von $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ und $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$ sind in die Gleichung (1) zu substituiren [1]). Wir schreiben dieselbe wie folgt:

(3) $$\delta P - K\delta\Omega = 0,$$

[1]) Die Gleichung, die durch diese Substitution entsteht, findet sich in wenig veränderter Gestalt schon in einer Abhandlung von G. Green, „Ohn the laws of reflexion and refraction of light, Camb. Phil. Trans. VII."; sie ist dort auf andere Weise, als hier, ohne Betrachtung der Hauptdilatationen abgeleitet.

indem wir

$$\Omega = \int dV\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \theta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2\right) \tag{4}$$

setzen. Die Variation $\delta\Omega$ wird aus drei Theilen bestehen, von denen der erste von δu, der zweite von δv, der dritte von δw abhängt; diese drei Theile wollen wir durch δR, δS, δT bezeichnen; dann ergiebt sich

$$\delta\Omega = \delta R + \delta S + \delta T, \tag{5}$$

und man findet:

$$\delta R = \int dV\left\{\left(2(1+\theta)\frac{\partial u}{\partial x} + 2\theta\frac{\partial v}{\partial y} + 2\theta\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial \delta u}{\partial z}\right\}.$$

Aus dem Ausdrucke von δR ergiebt sich der von δS, und aus diesem der von δT, wenn man u, v, w und gleichzeitig x, y, z cyklisch vertauscht. Den Ausdruck von δR zerlege man in drei Integrale, von denen das erste unter dem Integralzeichen den Factor $\frac{\partial \delta u}{\partial x}$, das zweite den Factor $\frac{\partial \delta u}{\partial y}$, das dritte den Factor $\frac{\partial \delta u}{\partial z}$ hat. Auf das erste von den dreien wende man den Satz an, der durch die Gleichung

$$\int dV F\frac{\partial G}{\partial x} = -\int dV G\frac{\partial F}{\partial x} - \int dO F G\cos(N, x)$$

ausgesprochen wird, in welcher F und G zwei beliebige Funktionen von x, y, z bezeichnen, dV das Element eines begrenzten Raums, dO das Element der Oberfläche desselben und (N, x) den Winkel bedeutet, den die nach dem Innern des begrenzten Raumes gerichtete Normale von dO mit der x-Axe bildet; auf das zweite und dritte der Integrale, deren Summe δR ist, wende man die Sätze an, die aus jenem durch Vertauschung von x mit y oder z entstehen; jedesmal mache man dabei $G = \delta u$. Fassen wir dann die nach dV zu nehmenden Integrale zusammen, und eben so die nach dO zu nehmenden, so ergiebt sich

$$\delta R = -\int dV\left\{2(1+\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (1+2\theta)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + (1+2\theta\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}\right\}\delta u$$

$$-\int dO\left\{\left(2(1+\theta)\frac{\partial u}{\partial x}+2\theta\frac{\partial v}{\partial y}+2\theta\frac{\partial w}{\partial z}\right)\cos(N,x)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(N,y)+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cos(N,z)\right\}\delta u.$$

Bildet man aus diesem Ausdrucke von δR durch die angegebenen Vertauschungen die Ausdrücke von δS und δT, und dann der Gleichung (5) gemäss den Werth von $\delta\Omega$; setzt diesen, so wie den Werth von δP aus (2), in die Gleichung (3), zieht hier die Integrale zusammen, die über das Volumen des Körpers auszudehnen sind, so wie diejenigen, die sich auf die Oberfläche desselben beziehen, und setzt dann, den Principien der Variationsrechnung gemäss, die Faktoren von δu, δv, δw unter den beiden Integralzeichen $=0$; so erhält man folgende Gleichungen:

(6)

Für einen Punkt im Innern des Körpers:

$$K\left\{2(1+\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+(1+2\theta)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right.$$
$$\left.+(1+2\theta)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right\}+X=0,$$

$$K\left\{2(1+\theta)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(1+2\theta)\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\right.$$
$$\left.+(1+2\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right\}+Y=0,$$

$$K\left\{2(1+\theta)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+(1+2\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right.$$
$$\left.+(1+2\theta)\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial y}\right\}+Z=0.$$

Und für einen Punkt der Oberfläche:

$$K\left\{\left(2(1+\theta)\frac{\partial u}{\partial x}+2\theta\frac{\partial v}{\partial y}+2\theta\frac{\partial w}{\partial z}\right)\cos(N,x)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(N,y)+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cos(N,z)\right\}+(X)=0,$$

$$K\left\{\left(2(1+\theta)\frac{\partial v}{\partial y}+2\theta\frac{\partial w}{\partial z}+2\theta\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos(N,y)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos(N,z)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos(N,x)\right\}+(Y)=0,$$

$$K\left\{\left(2(1+\theta)\frac{\partial w}{\partial z}+2\theta\frac{\partial u}{\partial x}+2\theta\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos(N,z)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(N,x)+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\cos(N,y)\right\}+(Z)=0.$$

Diese Gleichungen sind dieselben wie die, welche Cauchy auf einem Wege abgeleitet hat, bei welchem er nicht auf die Betrachtung der Molecularkräfte zurückging; sie gehen in die Poisson'schen über, wenn man $\theta = \frac{1}{2}$ setzt, und in die Wertheim'schen, wenn $\theta = 1$ gesetzt wird.

Ich werde jetzt eine Ableitung der Gleichung (1) geben, aus welcher hervorgehen wird, dass sie eine allgemeinere Gültigkeit hat, als die Gleichungen (6). Betrachtungen, die denen, welche hier folgen, ganz ähnlich sind, hat Lagrange mehrmals in seiner Mechanik, z. B. bei der Herleitung der Gleichgewichtsbedingung eines elastischen Stabes angestellt.

Es sei dV das Volumen eines unendlich kleinen Theils des elastischen Körpers in seinem natürlichen Zustande. Der Zustand, in welchen dieser Theil durch die Formveränderung geräth, kann bekanntlich aus dem natürlichen als auf die Weise hervorgegangen angesehen werden, dass der Theil ohne Veränderung der relativen Lage seiner Molecüle eine andere Lage im Raume erhalten hat und dann in drei auf einander senkrechten Richtungen (gleichmässig in jeder, aber verschieden in den verschiedenen) dilatirt worden ist[1]). Eine unendlich kleine Kugel geht hiernach in ein Ellipsoïd über, dessen Axen die Richtungen haben, in denen die Dilatationen Statt fanden. Diese Dilatationen werden daher die Hauptdilatationen λ_1, λ_2, λ_3 sein. Die Elasticität des Körpers bewirkt, dass der betrachtete Theil sich in den Richtungen, in denen er ausgedehnt ist, zusammenzuziehen strebt; die Kräfte, mit denen er sich in denselben zusammenzuziehen strebt, seien $L_1 dV$, $L_2 dV$, $L_3 dV$; die erste von ihnen sucht λ_1, die zweite λ_2, die dritte λ_3 zu verkleinern. Das Moment der ersten Kraft ist daher $-L_1 dV \delta\lambda_1$, das der zweiten $-L_2 dV \delta\lambda_2$, das der dritten $-L_3 dV \delta\lambda_3$, und das Gesammtmoment der drei Kräfte ist

$$-dV(L_1 \delta\lambda_1 + L_2 \delta\lambda_2 + L_3 \delta\lambda_3).$$

Nun sind L_1, L_2, L_3 Funktionen von λ_1, λ_2, λ_3. Wir wissen von ihnen, dass sie gleichzeitig mit λ_1, λ_2, λ_3 verschwinden;

---

[1]) Eine Compression will ich als negative Dilatation bezeichnen.

ferner, dass L_1 eine symmetrische Funktion von λ_2 und λ_3, und dieselbe Funktion von λ_1, λ_2, λ_3, wie L_2 von λ_2, λ_3, λ_1 und L_3 von λ_3, λ_1, λ_2 sein muss. Nimmt man daher λ_1, λ_2, λ_3 als unendlich klein an, so wird man

$$L_1 = a\lambda_1 + b\lambda_2 + b\lambda_3,$$
$$L_2 = b\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3,$$
$$L_3 = b\lambda_1 + b\lambda_2 + a\lambda_3$$

setzen können; wo a und b zwei von der Natur des Körpers abhängige Grössen bezeichnen. Führt man an Stelle derselben zwei andere K und θ ein, die mit ihnen durch die Gleichungen

$$a = 2K(1+\theta),\ b = 2K\theta$$

verbunden sind, so erhält man für das Moment der in dV erzeugten Kräfte den Ausdruck

$$-dV.\delta K\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\theta(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2\right)$$

und für das Moment aller in dem Körper erzeugten Kräfte den Ausdruck

$$-\delta K\int dV\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\theta(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2\right).$$

Die Summe dieses Moments und des Moments der äusseren Kräfte muss für den Gleichgewichtszustand verschwinden; wie es durch die Gleichung (1) ausgesprochen wird.

§ 2.

Jetzt wollen wir zur Betrachtung einer Platte übergehen. Wir setzen in Bezug auf dieselbe voraus, dass ihre Grundflächen im natürlichen Zustande durch zwei parallele, unendlich nahe Ebenen gebildet werden, ihr Rand durch eine beliebige Cylinder-Oberfläche, die jene senkrecht schneidet. Die Platte hat eine Form-Aenderung erlitten durch Kräfte, die auf ihr Inneres wirken und durch Druckkräfte, die auf ihren Rand ausgeübt werden, während ihre Grundflächen frei sind. Diese Kräfte sind endlich nur so gross, dass die Dilatationen, die sie hervorbringen, als unendlich klein betrachtet werden dürfen. Hierdurch ist jedoch nicht ausgesprochen, dass die Krümmungen, die die Platte erlitten hat, unendlich klein sind; diese wollen wir uns vorläufig als endlich vorstellen.

Um die Anwendung der Gleichung (1) auf den Fall einer

solchen Platte zu vermitteln, machen wir zwei Annahmen, die wir als Ergebnisse des Experiments ansehen und die ganz entsprechend denjenigen sind, welche Jacob Bernoulli in Bezug auf einen elastischen Stab macht; nämlich folgende:

1) Jede gerade Linie der Platte, welche ursprünglich senkrecht auf den Grundflächen war, bleibt bei der Form-Aenderung gerade und senkrecht auf den Flächen, welche ursprünglich den Grundflächen parallele Ebenen waren;

2) Alle Elemente der Mittelfläche (d. h. derjenigen Fläche, welche im natürlichen Zustande der Platte die Ebene ist, die den Grundflächen parallel in der Mitte zwischen diesen liegt) erleiden bei der Form-Aenderung keine Dilatation.

Mit Hülfe dieser beiden Annahmen werden sich die Werthe der Hauptdilatationen λ_1, λ_2, λ_3 für den gegenwärtigen Fall leicht ausdrücken lassen durch die Hauptkrümmungsradien der Mittelfläche. Man stelle zu diesem Ende folgende, noch auf einen elastischen Körper von beliebiger Form bezügliche Betrachtung an. Man denke sich in dem Körper in seinem ursprünglichen Zustande eine unendlich kleine Kugel und in derselben einen Durchmesser a und eine auf diesem senkrechte Diametral-Ebene A; bei der Form-Aenderung geht die Kugel in ein Ellipsoïd über; die Molecüle, die auf a und auf A lagen, liegen dann auf einem Durchmesser a' und auf einer Diametral-Ebene A' des Ellipsoïds, welche conjugirt zu einander sind. Im Allgemeinen wird daher a' nicht senkrecht auf A' sein. Ist a' senkrecht auf A', so wird a' gleich einer Haupt-Axe des Ellipsoïds sein, und das Maximum und das Minimum der auf a' senkrechten Durchmesser werden gleich den beiden andern Haupt-Axen sein; d. h. es wird die Dilatation von a' die eine Hauptdilatation, und die beiden andern Hauptdilatationen werden das Maximum und das Mininum der auf a' senkrechten Dilatationen sein.

Wendet man diesen Satz auf den Fall der Platte an, so folgt daraus bei Berücksichtigung der Annahme (1): dass für irgend einen Punkt im Innern der Platte die Dilatation in der Richtung der durch ihn gezogenen Normale der Mittelfläche eine der Hauptdilatationen ist. Wir wollen z die ursprüngliche Entfernung des betrachteten Punkts von der Mittelfläche,

z' seine Entfernung von derselben nach der Form-Aenderung nennen; gleichzeitig möge durch z' auch die Normale der Mittelfläche nach der Form-Aenderung in Rücksicht auf ihre Lage bezeichnet werden. Setzt man

$$z' - z = q,$$

so wird also $\frac{\partial q}{\partial z}$ der Werth einer Hauptdilatation sein. Da diese unendlich klein sein soll, und da q gleichzeitig mit z verschwindet, so muss q gegen z unendlich klein sein.

Bei Berücksichtigung der Annahme (2) sieht man, dass die Dilatation in irgend einer auf z' senkrechten Richtung $= \frac{z'}{\varrho}$ ist, wenn ϱ den Krümmungsradius der Curve, in welcher die durch z' und die betreffende Richtung gelegte Ebene die Mittelfläche schneidet, für den Fusspunkt von z' bezeichnet. Nennt man daher die Krümmungsradien der Hauptschnitte der Mittelfläche für den Fusspunkt von z', ϱ_1 und ϱ_2, so sind $\frac{z'}{\varrho_1}$ und $\frac{z'}{\varrho_2}$ die Werthe der beiden andern Hauptdilatationen. Da $z' - z$ unendlich klein gegen z ist, so kann man für diese auch $\frac{z}{\varrho_1}$ und $\frac{z}{\varrho_2}$ schreiben.

Die Werthe der Hauptdilatationen λ_1, λ_2, λ_3, die jetzt gefunden sind, substituire man in die Gleichung (1). Drückt man dann noch das Element des Volumens der Platte durch $df.dz$ aus, indem man unter df das Element der Mittelfläche versteht, so erhält man die Gleichung

$$(7) \qquad 0 = \delta P - K\delta \iint df dz \left\{ \left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{z}{\varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{z}{\varrho_2}\right)^2 + \theta\left(\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{z}{\varrho_1} + \frac{z}{\varrho_2}\right)^2 \right\}.$$

Bezeichnet man die Dicke der Platte durch 2ε, so ist die Integration in Bezug auf z von $z = -\varepsilon$ bis $z = \varepsilon$ zu nehmen.

Wir wollen jetzt zeigen, dass sich die eine der Hauptdilatationen $\frac{\partial q}{\partial z}$ durch die beiden andern $\frac{z}{\varrho_1}$ und $\frac{z}{\varrho_2}$ ausdrücken lässt, ohne dass dazu die Kenntniss der Kräfte nöthig wäre, welche die Form-Aenderung der Platte bewirkt haben. Es ist zu dem Zwecke der Werth von δP, der durch die Glei-

chung (2) gegeben ist, näher untersuchen. Das rechtwinklige Coordinatensystem, auf welches sich diese Gleichung bezieht, wähle man so, dass die xy Ebene die Mittelfläche in dem natürlichen Zustande der Platte ist; dann behält z die Bedeutung, die ihm hier gegeben wurde. Man bezeichne die Winkel, welche die Normale der Mittelfläche, z', mit den Coordinaten-Axen bildet, durch (z', x), (z', y), (z', z), die ursprünglichen Coordinaten des Fusspunkts von z' durch x_0, y_0, 0, die Verrückungen, die dieser Punkt in den Richtungen der Axen erlitten hat, durch u_0, v_0, w_0, so ist der Annahme (1) zufolge:

$$\begin{aligned} x + u &= x_0 + u_0 + z' \cos(z', x), \\ y + v &= y_0 + v_0 + z' \cos(z', y), \\ z + w &= \quad w_0 + z' \cos(z', z), \end{aligned}$$

oder, da $z' - z$ unendlich klein gegen z ist:

$$\begin{aligned} x + u &= x_0 + u_0 + z \cos(z', x), \\ y + v &= y_0 + v_0 + z \cos(z', y), \\ z + w &= \quad w_0 + z \cos(z', z). \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich:

$$(8) \qquad \begin{cases} \delta u = \delta u_0 + z\,\delta \cos(z', x), \\ \delta v = \delta v_0 + z\,\delta \cos(z', y), \\ \delta w = \delta w_0 + z\,\delta \cos(z', z). \end{cases}$$

Diese Werthe von δu, δv, δw sind in die Gleichung (2) zu substituiren. Die zweiten Theile derselben sind, da sie den Faktor z enthalten, unendlich klein gegen die ersten und können daher gegen diese im Allgemeinen vernachlässigt werden; wir haben sie beibehalten, um den Fall von den obigen Betrachtungen nicht auszuschliessen, in dem die Integrale

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Xz\,dz, \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Yz\,dz, \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Zz\,dz, \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (X)z\,dz, \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (Y)z\,dz, \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (Z)z\,dz$$

von derselben Ordnung sind wie die Integrale

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} X\,dz, \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Y\,dz, \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Z\,dz, \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (X)\,dz, \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (Y)\,dz, \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (Z)\,dz.$$

Stellt man sich die Werthe von δu, δv, δw aus (8) in (2)

substituirt vor, so sieht man, dass δP unabhängig von δq ist: es folgt daraus, dass das von δq abhängige Glied des zweiten Theils der Gleichung (7) für sich verschwinden muss. Daraus folgt

$$(1+\theta)\frac{\partial q}{\partial z}+\theta\left(\frac{z}{\varrho_1}+\frac{z}{\varrho_2}\right)=0$$

oder

$$\frac{\partial q}{\partial z}=-\frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{z}{\varrho_1}+\frac{z}{\varrho_2}\right).$$

Setzt man diesen Werth von $\frac{\partial q}{\partial z}$ in die Gleichung (7), so giebt sie:

$$0=\delta P-K\delta\int\int df\,dz\,z^2\left\{\frac{1}{\varrho_1^2}+\frac{1}{\varrho_2^2}+\frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)^2\right\},$$

oder, wenn man die Integration nach z ausführt:

$$(9)\qquad 0=\delta P-\tfrac{2}{3}\varepsilon^3 K\delta\int df\left(\frac{1}{\varrho_1^2}+\frac{1}{\varrho_2^2}+\frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right)^2\right).$$

§ 3.

Die gefundene allgemeine Gleichgewichtsbedingung für eine Platte wollen wir nun auf den Fall anwenden, den Poisson behandelt hat: auf den Fall nämlich, dass die Platte sich nur unendlich wenig von ihrer ursprünglichen Gleichgewichtslage entfernt hat. Wir beginnen mit der weiteren Entwickelung des Werths von δP.

Ist w_0 eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung, so werden, da die Mittelfläche keine Dilatationen erlitten haben soll, u_0 und v_0 unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung sein; daher lassen sich δu_0 und δv_0 als unendlich klein gegen δw_0 betrachten und die Gleichungen (8) wie folgt schreiben;

$$\begin{aligned}\delta u &= z\,\delta\cos(z',\,x),\\ \delta v &= z\,\delta\cos(z',\,y),\\ \delta w &= \delta w_0+z\,\delta\cos(z',\,z).\end{aligned}$$

Ferner ist in dem vorliegenden Falle, wenn man wiederum nur unendlich kleine Grössen erster Ordnung berücksichtigt:

$$\cos(z',\,x)=-\frac{\partial w_0}{\partial x_0},\ \cos(z',\,y)=-\frac{\partial w_0}{\partial y_0},\ \cos(z',\,z)=1;$$

und daher wird:

$$\delta u = -z\frac{\partial \delta w_0}{\partial x_0},\quad \delta v = -z\frac{\partial \delta w_0}{\partial y_0},\quad \delta w = \delta w_0.$$

Diese Werthe substituire man in die Gleichung (2). Drückt man dann wieder das Element des Volumens der Platte durch $df\,dz$ aus und das Element der Oberfläche ihres Randes durch $ds\,dz$, indem man unter ds das Element des Umfanges ihrer Mittelfläche versteht, und schreibt der Bequemlichkeit wegen w, x, y statt w_0, x_0, y_0, so ergiebt sich:

$$\delta P = \iint df\,dz\left\{Z\,\delta w - z\left(X\frac{\partial \delta w}{\partial x} + Y\frac{\partial \delta w}{\partial y}\right)\right\}$$
$$+\iint ds\,dx\left\{(Z)\,\delta w - z\left((X)\frac{\partial \delta w}{\partial x} + (Y)\frac{\partial \delta w}{\partial y}\right)\right\}.$$

Die Kräfte X, Y, Z und die Druckkräfte (X), (Y), (Z) lassen sich hier als unabhängig von w betrachten, weil w unendlich klein sein soll. Den Ausdruck von δP wollen wir noch umformen. Er lässt sich zunächst auf folgende Weise schreiben:

$$\delta P = \iiint dx\,dy\,dz\left\{Z + z\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right\}\delta w$$
$$-\iiint z\,dx\,dy\,dz\,\frac{\partial X \delta w}{\partial x} - \iiint z\,dx\,dy\,dz\,\frac{\partial Y \delta w}{\partial y}$$
$$+\iint ds\,dz\left\{(Z)\,\delta w - z\left((X)\frac{\partial \delta w}{\partial x} + (Y)\frac{\partial \delta w}{\partial y}\right)\right\}.$$

Das zweite und dritte dieser vier Integrale lässt sich umgestalten durch Anwendung der Formeln:

$$(10)\qquad \begin{cases} \int dx\,dy\,\dfrac{\partial F}{\partial x} = -\int ds\cos\varphi\,F, \\ \int dx\,dy\,\dfrac{\partial F}{\partial y} = -\int ds\sin\varphi\,F. \end{cases}$$

In denselben bedeutet F eine beliebige Funktion von x und y: die zweifache Integration ist über eine begrenzte Fläche, die einfache über den Umfang derselben auszudehnen; φ bezeichnet denjenigen Winkel, den die nach dem Innern der begrenzten Fläche gerichtete Normale des Umfangs mit der positiven x-Axe bildet, und den diese Axe beschreibt, wenn sie in derjenigen Richtung gedreht wird (bis sie jener Normale parallel ist), in der sie gedreht werden muss, damit sie nach einer Drehung um 90^0 die Lage der positiven y-Axe einnimmt.

Durch Benutzung dieser Formeln erhält man für δP folgenden Werth:

$$\delta P = \iiint dx\,dy\,dz\left\{Z + z\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right\}\delta w$$
$$+ \iint ds\,dz\left\{(Z) + z\,(X\cos\varphi + Y\sin\varphi)\right\}\delta w$$
$$- \iint z\,ds\,dz\left\{(X)\frac{\partial \delta w}{\partial x} + (X)\frac{\partial \delta w}{\partial y}\right\}.$$

In den letzten dieser drei Theile von δP führe man an die Stelle von $\frac{\partial \delta w}{\partial x}$ und $\frac{\partial \delta w}{\partial y}$ den Differentialquotienten von δw nach der nach Innen gerichteten Normale des Umfangs, $\frac{\partial \delta w}{\partial N}$, und den Differentialquotienten von δw nach dem Bogen des Umfangs, $\frac{\partial \delta w}{\partial s}$, ein. Man nehme den Bogen s in der Richtung als wachsend an, dass der Winkel, den die in der Richtung des wachsenden Bogens gezogene Tangente mit der positiven x-Axe bildet, und den diese Axe beschreibt, wenn sie in der Weise gedreht wird, die bei der Definition von φ bezeichnet worden ist, bis sie der Tangente parallel wird, $= \varphi - 90^0$ ist. Dann ergeben sich folgende Gleichungen:

$$(11)\qquad \begin{cases} \frac{\partial \delta w}{\partial x} = \frac{\partial \delta w}{\partial N}\cos\varphi + \frac{\partial \delta w}{\partial s}\sin\varphi, \\ \frac{\partial \delta w}{\partial y} = \frac{\partial \delta w}{\partial N}\sin\varphi - \frac{\partial \delta w}{\partial s}\cos\varphi. \end{cases}$$

Es wird daher:

$$\iint z\,ds\,dz\left\{(X)\frac{\partial \delta w}{\partial x} + (Y)\frac{\partial \delta w}{\partial y}\right\}$$
$$= \iint z\,ds\,dz\left\{(X)\cos\varphi + (Y)\sin\varphi\right\}\frac{\partial \delta w}{\partial N}$$
$$+ \iint z\,ds\,dz\left\{(X)\sin - (Y)\cos\varphi\right\}\frac{\partial \delta w}{\partial s}.$$

Das zweite der Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichung stellen wir uns partiell nach s integrirt vor; dabei verschwindet das aus dem Integralzeichen hervortretende Glied, indem die Integration sich auf eine geschlossene Curve bezieht; dann substituire man für die linke Seite der Gleichung die rechte in den Ausdruck von δP. Dies giebt

$$(12)\qquad \delta P = \iiint dx\,dy\,dz\left\{Z + z\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right\}\delta w$$
$$+\iint ds\,dx\left\{(Z) + z\frac{\partial\left((X)\sin\varphi - (Y)\cos\varphi\right)}{\partial s} + z\,(X\cos\varphi + Y\sin\varphi)\right\}\delta w$$
$$-\iint ds\,dz\,z\left\{(X)\cos\varphi + (Y)\sin\varphi\right\}\frac{\partial\,\delta w}{\partial N}.$$

Nun bilde man den zweiten Theil der rechten Seite der Gleichung (9). Wir stellen uns durch einen Punkt der Mittelfläche, der die Coordinaten x, y, w hat, eine Ebene gelegt vor, die der z-Axe parallel ist und mit der xz-Ebene den Winkel ϑ bildet; ϱ sei der Krümmungsradius des Schnittes dieser Ebene und der Mittelfläche für den Punkt (x, y, w); dann ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\vartheta + 2\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\cos\vartheta\sin\vartheta + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\vartheta.$$

Die Werthe von $\frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{1}{\varrho_2}$ sind das Maximum und das Minimum von $\frac{1}{\varrho}$; sie sind daher die Wurzeln der Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - A\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - A\right) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$
$$\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2.$$

Diese Werthe sind in die Gleichung (9) zu substituiren. Man setze

$$(13)\qquad \begin{cases} Q = \iint dx\,dy\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right), \\ R = \iint dx\,dy\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2, \end{cases}$$

so giebt die Gleichung (9)

$$(14)\qquad \delta P - \tfrac{1}{3}s^3 K\left(\delta Q + \frac{\theta}{1+\theta}\,\delta R\right) = 0.$$

Nun ist die Bildung von δQ und δR nöthig. Es findet sich

$$(15)\quad \delta Q = 2\iint dx\,dy\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + 2\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}\right\}.$$

Es ist aber:

$$\iint dx\,dy\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}$$

$$= \iint dx\,dy\,\frac{\partial\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial \delta w}{\partial x}}{\partial x} - \iint dx\,dy\,\frac{\partial\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\delta w}{\partial x} + \iint dx\,dy\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\delta w,$$

$$\iint dx\,dy\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\,\partial y}$$

$$= \iint dx\,dy\,\frac{\partial\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial \delta w}{\partial y}}{\partial x} - \iint dx\,dy\,\frac{\partial\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}\delta w}{\partial y} + \iint dx\,dy\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}\delta w,$$

und auch

$$\iint dx\,dy\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x\,\partial y}$$

$$= \iint dx\,dy\,\frac{\partial\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial \delta w}{\partial x}}{\partial y} - \iint dx\,dy\,\frac{\partial\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\delta w}{\partial x} + \iint dx\,dy\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}\delta w,$$

$$\iint dx\,dy\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}$$

$$= \iint dx\,dy\,\frac{\partial\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial \delta w}{\partial y}}{\partial y} - \iint dx\,dy\,\frac{\partial\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\delta w}{\partial y} + \iint dx\,dy\,\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\delta w.$$

Diese vier Gleichungen addire man. Auf der linken Seite der resultirenden Gleichung erhält man dann $\frac{1}{2}\delta Q$; auf der rechten Seite derselben verwandele man diejenigen Integrale, welche unter den Integralzeichen das Element der Fläche mit einem nach x oder nach y genommenen Differentialquotienten multiplicirt enthalten, mit Hülfe der Formeln (10) in Integrale, die sich auf den Umfang der Mittelfläche beziehen. In einem Theile dieser Integrale kommen die Differentialquotienten $\frac{\partial \delta w}{\partial x}$ und $\frac{\partial \delta w}{\partial y}$ vor; diese drücke man mit Hülfe der Gleichungen (11) durch $\frac{\partial \delta w}{\partial N}$ und $\frac{\partial \delta w}{\partial s}$ aus und integrire die Glieder, welche $\frac{\partial \delta w}{\partial s}$ enthalten, partiell nach s. Die Glieder, welche hierbei vor die Integralzeichen treten, verschwinden, weil die Integration sich auf eine geschlossene Curve bezieht und es ergiebt sich:

$$(16)\quad \delta Q = 2\iint dx\,dy\left\{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right\}\delta w$$
$$+ 2\int ds\left\{\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right)\cos\varphi + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)\sin\varphi\right.$$
$$\left. - \frac{\delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\cos\varphi\sin\varphi\right)}{\partial s}\right\}\delta w$$
$$- 2\int ds\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\varphi\right\}\frac{\partial\,\delta w}{\partial N}.$$

Ferner ist

$$(17)\qquad \delta R = 2\iint dx\,dy\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\delta w}{\partial y^2}\right).$$

Es ist aber, wenn F und G zwei beliebige Funktionen von x und y bezeichnen:

$$\iint dx\,dy\,F\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right)$$
$$= \iint dx\,dy\,G\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + \int ds\frac{\partial F}{\partial N}G - \int ds\,F\frac{\partial G}{\partial N};$$

setzt man also

$$F = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\quad G = \delta w$$

und berücksichtigt, dass

$$\frac{\partial F}{\partial N} = \frac{\partial F}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial F}{\partial y}\sin\varphi$$

ist, was aus den Gleichungen (11) folgt; so ergiebt sich

$$(18)\quad \delta R = 2\iint dx\,dy\left\{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right\}\delta w$$
$$+ 2\int ds\left\{\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right)\cos\varphi + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)\sin\varphi\right\}\delta w$$
$$- 2\int ds\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\}\frac{\partial\,\delta w}{\partial N}.$$

Mit Hülfe der Gleichungen (12), (16) und (18) bilde man nun die Gleichung (14); die linke Seite derselben lässt sich darstellen als die Summe von drei Integralen, von denen das erste über die Mittelfläche selbst, die beiden andern über den Umfang derselben auszudehnen sind, und von denen die beiden ersten unter den Integralzeichen den Faktor δw haben, das letzte den Faktor $\frac{\partial\,\delta w}{\partial N}$ hat. Den Principien der Variations-

rechnung gemäss müssen die Grössen, mit denen δw und $\frac{\partial \delta w}{\partial N}$ multiplicirt vorkommen, verschwinden. Man erhält demnach die partielle Differentialgleichung

$$(19)\quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Z\,dz + \frac{\partial}{\partial x}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Xz\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Yz\,dz = \tfrac{1}{3}\varepsilon^3 K \frac{1+2\theta}{1+\theta}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)$$

und die beiden Grenzbedingungen

$$(20)\quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(Z)\,dz + \frac{\partial}{\partial s}\Big(\sin\varphi\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(X)\,z\,dz - \cos\varphi\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(Y)\,z\,dz\Big) + \cos\varphi\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Xz\,dz + \sin\varphi\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Yz\,dz$$

$$= \tfrac{1}{3}\varepsilon^3 K\Big\{\frac{1+2\theta}{1+\theta}\Big(\Big(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\Big)\cos\varphi + \Big(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\Big)\sin\varphi\Big) - \frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)\cos\varphi\sin\varphi\Big)\Big\},$$

$$(21)\quad \cos\varphi\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(X)z\,dz + \sin\varphi\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(Y)\,z\,dz$$

$$= \tfrac{1}{3}\varepsilon^3 K\Big\{\frac{\theta}{1+\theta}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\varphi\Big\}.$$

Die Gleichung (19) stimmt mit der partiellen Differentialgleichung, welche Poisson abgeleitet hat, überein; abgesehen davon, dass Poisson $\theta = \frac{1}{4}$ gesetzt hat, während hier θ unbestimmt gelassen ist. Die drei Grenzbedingungen von Poisson lassen sich darstellen durch die Gleichungen (20), (21) und die Gleichung

$$(22)\quad \sin\varphi\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(X)\,z\,dz - \cos\varphi\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(Y)\,z\,dz = -\tfrac{1}{3}\varepsilon^3 K\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)\cos\varphi\,\sin\varphi\Big).$$

Ich werde jetzt nachweisen, dass w bis auf eine additive lineare

Funktion von x und y, die willkürlich bleibt, durch die Gleichungen (19), (20), (21) bestimmt ist. Daraus folgt dann, dass den Poisson'schen Gleichungen nur in den speciellen Fällen genügt werden kann, in welchen die gegebenen Kräfte von der Art sind, dass die Gleichung (22) von selbst erfüllt wird, sobald die Gleichungen (19), (20), (21) erfüllt sind.

Es seien w_1 und w_2 zwei Funktionen, die, statt w gesetzt, den Gleichungen (19), (20) (21) genügen; dann erfüllt $w_1 - w_2 = w$ die Gleichungen, die aus den ebengenannten entstehen, wenn an die Stelle der linken Theile derselben 0 gesetzt wird. Ich werde beweisen, dass diesen Gleichungen nur durch eine lineare Funktion von x und y genügt werden kann.

Man stelle sich den Werth von

$$\delta Q + \frac{\theta}{1+\theta}\delta R$$

gebildet vor: einmal mit Hülfe der Gleichungen (15) und (17), dann mit Hülfe der Gleichungen (16) und (18), und die beiden Ausdrücke, die man dadurch erhält, einander gleich gesetzt. In der identischen Gleichung, die man dann hat, mache man $\delta w = iw$, wobei unter i eine unendlich kleine Constante verstanden wird. Lässt man darauf den Faktor $2i$, der sich in derselben findet, weg, so wird sie:

$$\begin{aligned}
&\iint dx\,dy\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right\} \\
&= \iint dx\,dy\,\frac{1+2\theta}{1+\theta}\left\{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right\} w \\
&+ \int ds\left\{\frac{1+2\theta}{1+\theta}\left(\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right)\cos\varphi + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)\sin\varphi\right)\right. \\
&\left. - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\cos\varphi\sin\varphi\right)\right\} w \\
&- \int ds\left\{\frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\varphi\right\}\frac{\partial w}{\partial N}.
\end{aligned}$$

Genügt nun w den Gleichungen, in welche die Gleichungen (19), (20), (21) übergehen, wenn man an Stelle ihrer linken Theile 0 setzt, so verschwindet die rechte Seite dieser Gleichung; es

verschwindet also auch die linke. Diese besteht aber, da θ positiv ist, aus einer Summe von lauter positiven Grössen: es müssen daher alle diese Grössen für sich verschwinden, und also für alle Punkte der Mittelfläche der Scheibe die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

erfüllt werden. Diesen Gleichungen aber kann nur durch eine lineare Funktion von x und y genügt werden.

§ 4.

Die Gleichungen (19), (20), (21) des vorigen Paragraphen will ich nun anwenden, um die Gesetze der Schwingungen einer freien, kreisförmigen Scheibe herzuleiten. Aus denselben ergiebt sich für die Schwingungen einer beliebig gestalteten Scheibe die partielle Differentialgleichung

$$(1) \qquad 0 = \varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \tfrac{1}{3} \frac{1+2\theta}{1+\theta} \varepsilon^2 K \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right),$$

in welcher ϱ die Dichtigkeit der Scheibe bezeichnet, nebst den Grenzbedingungen

$$(2) \begin{cases} 0 = \dfrac{1+2\theta}{1+\theta} \left(\left(\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \cos\varphi + \left(\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \dfrac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \sin\varphi \right) \\ \quad - \dfrac{\partial}{\partial s} \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \cos\varphi \sin\varphi \right), \\ 0 = \dfrac{\theta}{1+\theta} \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2\varphi + 2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos\varphi \sin\varphi + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2\varphi. \end{cases}$$

Man erhält diese Gleichungen, indem man in jenen $(X) = (Y) = (Z) = 0, X = -\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $Y = -\varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $Z = -\varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ setzt und berücksichtigt, dass den beiden in (§ 2) gemachten Annahmen zufolge $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ und $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ nicht unendlich gross gegen $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ sein können. Zu den Bedingungen (1) und (2) sind noch die hinzuzufügen, dass w und $\frac{\partial w}{\partial t}$ für $t = 0$ in zwei gegebene Funktionen von x und y übergehen; dann wird w vollkommen bestimmt sein.

Wir suchen zuerst eine partikuläre Lösung der Differential-

gleichung (1), die die Gleichungen (2) erfüllt. Diese wird sich dann so verallgemeinern lassen, dass auch den Bedingungen, die für $t = 0$ gelten, genügt wird.

Man setze der Kürze wegen

$$\frac{1 + 2\theta}{1 + \theta} g^2 \frac{K}{\varrho} = a^2$$

und

$$w = u \sin(4\lambda^2 a t), \tag{3}$$

wo u eine Funktion von x und y, λ eine Constante bezeichnet, über die zu verfügen wir uns vorbehalten. Durch 3. wird der Gleichung (1) genügt werden, wenn u folgende Gleichung erfüllt:

$$16\lambda^4 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}. \tag{4}$$

Diese kann ersetzt werden durch die zwei Gleichungen

$$\begin{cases} 4\lambda^2 v = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ 4\lambda^2 u = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \end{cases} \tag{5}$$

Macht man

$$u = S + D, \quad v = S - D, \tag{6}$$

so folgen für S und D die Differentialgleichungen

$$4\lambda^2 S = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2},$$

$$-4\lambda^2 D = \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}.$$

Nun führe man an die Stelle der rechtwinkligen Coordinaten Polarcoordinaten r, ψ ein; dann werden die letzten Gleichungen

$$4\lambda^2 S = \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 S}{\partial \psi^2},$$

$$-4\lambda^2 D = \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial D}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 D}{\partial \psi^2}.$$

Diesen wird genügt, wenn man

$$\begin{cases} S = A \cdot \cos n\psi \cdot X, \\ D = B \cdot \cos n\psi \cdot Y \end{cases} \tag{7}$$

setzt, wo A und B willkürliche Constanten, n eine ganze Zahl und X und Y zwei Funktionen von r bezeichnen, die die Gleichungen

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2X}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dX}{dr}-\left(\dfrac{n^2}{r^2}+4\lambda^2\right)X=0, \\ \dfrac{d^2Y}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dY}{dr}-\left(\dfrac{n^2}{r^2}-4\lambda^2\right)Y=0 \end{cases}$$

erfüllen. Führt man

$$x=\lambda r$$

ein, so werden diese Gleichungen

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2X}{dx^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{dX}{dx}-\left(\dfrac{n^2}{x^2}+4\right)X=0, \\ \dfrac{d^2Y}{dx^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{dY}{dx}-\left(\dfrac{n^2}{x^2}-4\right)Y=0. \end{cases}$$

Particuläre Integrale derselben sind:

$$(10)\qquad \begin{cases} X^{(n)}=\dfrac{x^n}{1.2.3...n}\left(1+\dfrac{x^2}{1.n+1}+\dfrac{x^4}{1.2.n+1.n+2}+\dfrac{x^6}{1.2.3.n+1.n+2.n+3}+\text{etc.}\right), \\ Y^{(n)}=\dfrac{x^n}{1.2.3...n}\left(1-\dfrac{x^2}{1.n+1}+\dfrac{x^4}{1.2.n+1.n+2}-\dfrac{x^6}{1.2.3.n+1.n+2.n+3}+\text{etc.}\right) \end{cases}$$

und andere particuläre Integrale:

$$(11)\qquad \begin{cases} X^{(n)'}=X^{(n)}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x\,X^{(n)}\,X^{(n)}}, \\ Y^{(n)'}=Y^{(n)}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x\,Y^{(n)}\,Y^{(n)}}, \end{cases}$$

wo x_0 eine beliebige, endliche Grösse bezeichnet. Die allgemeinen Integrale der Gleichungen (9) sind also

$$X=\alpha X^{(n)}+\alpha' X^{(n)'},$$
$$Y=\beta Y^{(n)}+\beta' Y^{(n)'}.$$

Aus den Gleichungen (11) geht hervor, dass $X^{(n)'}$ und $Y^{(n)'}$ für $x=0$ unendlich werden; wir nehmen an, dass die Scheibe eine volle, keine ringförmige ist; dann müssen für $r=0$, d. h. für $x=0$, u und v, also auch X und Y endlich bleiben, und daher müssen α' und β' verschwinden. Die Constanten α und β lassen sich, ohne der Allgemeinheit zu schaden, $=1$ setzen, da wir in die Gleichungen (7) die Constanten A und B eingeführt haben, und daher kann man statt der Gleichungen (7) schreiben:

$$(12)\qquad \begin{cases} S = A\cos n\psi \,.\, X^{(n)}, \\ D = B\cos n\psi \,.\, Y^{(n)}, \end{cases}$$

wo $X^{(n)}$ und $Y^{(n)}$ die durch die Gleichungen (10) bestimmten Funktionen bedeuten. Ich bemerke, dass $Y^{(n)}$ die Funktion ist, für welche Bessel die Bezeichnung

$$I^n_{2x}$$

eingeführt hat.

Wir werden jetzt über die Constanten A, B, λ so zu verfügen suchen, dass den Gleichungen (2) genügt wird. In diesen Gleichungen ist der Bogen s in derjenigen Richtung als wachsend anzusehen, die bei den Gleichungen (11) (§ 3) bezeichnet ist. Aus der dort gemachten Bestimmung geht hervor, dass, wenn man ψ in derjenigen Richtung wachsen lässt und den Anfangspunkt von s so wählt, dass

$$s = l\psi$$

wird, wo l den Radius der Scheibe bezeichnet,

$$\varphi = \psi + 180^0$$

ist. Benützt man dies, so nehmen die Gleichungen (2) durch Einführung der Polarcoordinaten r, ψ, statt der rechtwinkligen, folgende Gestalt an:

$$(13)\qquad \begin{cases} \frac{1+2\theta}{1+\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial \psi}-\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \psi}\right)=0, \\ \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}=0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen müssen für $r = l$, für alle Werthe von ψ erfüllt werden, und für alle Werthe von t. Nach (3) müssen daher auch die Gleichungen bestehen, welche man aus (13) findet, wenn man man u statt w schreibt. Diese Gleichungen geben, wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}=4\lambda^2 v$$

ist, was die erste der Gleichungen (5) aussagt:

$$4\lambda^2\frac{1+2\theta}{1+\theta}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial \psi^2}-\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}=0,$$

$$4\lambda^2\frac{\theta}{1+\theta}v \quad +\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=0.$$

Führt man hier für u und v ihre Werthe ein, die sich aus (6)

und (12) ergeben, ersetzt r durch $\frac{x}{\lambda}$, drückt die zweiten Differentialquotienten von $X^{(n)}$ und $Y^{(n)}$ mit Hülfe von (9) durch diese Funktionen selbst und ihre ersten Differentialquotienten aus und macht endlich

$$\frac{1+2\theta}{1+\theta} = \gamma,$$

so ergiebt sich

$$(14)\quad \begin{cases} 0 = A\left\{n^2 X^{(n)} - x(n^2 - 4\gamma x^2)\frac{dX^{(n)}}{dx}\right\} \\ \qquad\qquad + B\left\{n^2 Y^{(n)} - x(n^2 + 4\gamma x^2)\frac{dY^{(n)}}{dx}\right\}, \\ 0 = A\left\{n^2 + 4\gamma x^2)X^{(n)} - x\frac{dX^{(n)}}{dx}\right\} \\ \qquad\qquad + B\left\{(n^2 - 4\gamma x^2)Y^{(n)} - x\frac{dY^{(n)}}{dx}\right\}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind zu erfüllen für $r = l$, d. h. für $x = \lambda l$. Hierzu ist nöthig, dass ihre Determinante verschwinde, da A und B nicht $= 0$ sein sollen. Es muss also für $x = \lambda l$:

$$(15)\quad \begin{aligned} 0 = \quad & 8\gamma n^2 x^2 X^{(n)} \\ & - 8\gamma n^2 x^3 \left(X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx} + Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx}\right) \\ & - \left(n^2(n^2-1)x + 16\gamma^2 x^5\right)\left(X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx} - Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx}\right) \\ & + 8\gamma x^4 \frac{dX^{(n)}}{dx}\frac{dY^{(n)}}{dx} \end{aligned}$$

sein. Bestimmt man aus dieser Gleichung λ und aus einer der beiden Gleichungen (14) das Verhältniss von A und B, so ist den Bedingungen (2) genügt. Wir wollen eine Wurzel der Gleichung (15) durch $\lambda_{n\mu}$ bezeichnen und

$$(16)\quad \begin{aligned} U_{n\mu} = {} & X^{(n)}\left\{(n^2 - 4\gamma x^2)Y^{(n)} - x\frac{dY^{(n)}}{dx}\right\}x = \lambda_{n\mu} l \\ & - Y^{(n)}\left\{(n^2 + 4\gamma x^2)X^{(n)} - x\frac{dX^{(n)}}{dx}\right\}x = \lambda_{n\mu} l \end{aligned}$$

setzen; dann wird den Gleichungen (1) und (2) durch

$$w = C_{n\mu} \sin(4\lambda_{n\mu}^2 a t)\cos n\psi\, U_{n\mu},$$

oder auch durch

$$(17) \qquad w = \{\cos(4\lambda_{n\mu}^{2} at)(A_{n\mu}\cos n\psi + B_{n\mu}\sin n\psi) + \sin(4\lambda_{n\mu}^{2} at)(C_{n\mu}\cos n\psi + D_{n\mu}\sin n\psi)\} U_{n\mu}$$

genügt; wo $A_{n\mu}$, $B_{n\mu}$, $C_{n\mu}$, $D_{n\mu}$ willkürliche Constanten bezeichnen.

Wir wollen nun die Gleichung (15) näher untersuchen und zuerst die rechte Seite derselben in eine Reihe entwickeln, die nach positiven Potenzen von x fortschreitet. Wir müssen zunächst das Produkt von $X^{(n)}$ $Y^{(n)}$ bilden. Hierbei lässt sich aber die direkte Multiplikation der unendlichen Reihen leicht umgehen. Man kann nämlich durch Benutzung der Differentialgleichungen (9), denen $X^{(n)}$ und $Y^{(n)}$ genügen, eine lineare Differentialgleichung vierter Ordnung für $X^{(n)}$ $Y^{(n)}$ finden und aus dieser das Produkt bestimmen, indem man auf die Form Rücksicht nimmt, die dasselbe augenscheinlich haben muss. Man setze

$$H = X^{(n)}\ Y^{(n)}$$

und bilde durch wiederholte Differentiation dieser Gleichung die Werthe der vier ersten Differentialquotienten von H nach x. Dann drücke man die zweiten und höheren Differentialquotienten von $X^{(n)}$ und $Y^{(n)}$ mit Hülfe von (9, durch diese Funktionen selbst und ihre ersten Differentialquotienten aus. Dadurch erhält man fünf Gleichungen, welche H und dessen vier erste Differentialquotienten angeben als lineare homogene Funktionen der vier Grössen

$$X^{(n)}\ Y^{(n)},\ X^{(n)}\frac{d\,Y^{(n)}}{dx},\ Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx},\ \frac{dX^{(n)}}{dx}\frac{d\,Y^{(n)}}{dx}.$$

Die erste dieser fünf Gleichungen multiplizire man mit 1, die andern der Reihe nach mit den unbestimmten Coëfficienten A_1, A_2, A_3, A_4, addire alle und bestimme diese Coëfficienten so, dass in der Summe die Faktoren jener vier Grössen verschwinden; dann ergiebt sich identisch:

$$(18) \qquad 0 = H + A_1\frac{dH}{dx} + A_2\frac{d^2H}{dx^2} + A_3\frac{d^3H}{dx^3} + A_4\frac{d^4H}{dx^4}.$$

Schreibt man die Gleichungen, durch welche die zweiten und höhern Differentialquotienten von $X^{(n)}$ und $Y^{(n)}$ durch

diese Grössen selbst und deren erste Differentialquotienten ausgedrückt werden, folgendermassen:

$$\frac{d^2X^{(n)}}{dx^2} = a_2 X^{(n)} + a_2' \frac{dX^{(n)}}{dx}, \quad \frac{d^2Y^{(n)}}{dx^2} = b_2 Y^{(n)} + b_2' \frac{dY^{(n)}}{dx},$$

$$\frac{d^3X^{(n)}}{dx^3} = a_3 X^{(n)} + a_3' \frac{dX^{(n)}}{dx}, \quad \frac{d^3Y^{(n)}}{dx^3} = b_3 Y^{(n)} + b_3' \frac{dY^{(n)}}{dx},$$

$$\frac{d^4X^{(n)}}{dx^4} = a_4 X^{(n)} + a_4' \frac{dX^{(n)}}{dx}, \quad \frac{d^4Y^{(n)}}{dx^4} = b_4 Y^{(n)} + b_4' \frac{dY^{(n)}}{dx},$$

so ergeben sich für die Coëfficienten A die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1 + (a_2 + b_2) A_2 + (a_3 + b_3) A_3 + (a_4 + b_4 + 6 a_2 b_2) A_4 &= 0 \\ A_1 + a_2' A_2 + (a_3' + 3 b_2) A_3 + (a_4' + 4 b_3 + 6 a_2' b_2) A_4 &= 0, \\ A_1 + b_2' A_2 + (b_3' + 3 a_2) A_3 + (b_4' + 4 a_3 + 6 a_2 b_2') A_4 &= 0, \\ 2 A_2 + 3 (a_2' + b_2') A_3 + (4 a_3' + 4 b_3' + 6 a_2' b_2') A_4 &= 0. \end{aligned}$$

Substituirt man in diese Gleichungen für die Grössen a, b ihre Werthe, die sich aus (9) ergeben, löst dieselben auf und setzt die Werthe von A_1, A_2, A_3, A_4, die man findet, in die Gleichung (18), so wird diese:

$$0 = 64 H + \frac{4n^2 - 1}{x^2} \frac{dH}{dx} - \frac{4n^2 - 1}{x^2} \frac{d^2H}{dx^2} + \frac{4}{x} \frac{d^3H}{dx^3} + \frac{d^4H}{dx^4}.$$

Aus (10) folgt aber, dass

$$(19) \quad H = X^{(n)} Y^{(n)} = \frac{x^{2n}}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n)^2} (1 + B_1 x^4 + B_2 x^8 + B_3 x^{12} + B_4 x^{16} + \ldots)$$

sein muss; substituirt man diese Reihe in die eben gefundene Differentialgleichung, so findet sich

$$B_k = - \frac{B_{k-1}}{k \cdot n + k \cdot n + 2k - 1 \cdot n + 2k},$$

also

$$(20) \quad B_k = \frac{(-1)^k}{1 \cdot 2 \ldots k \cdot n + 1 \cdot n + 2 \ldots n + k \cdot n + 1 \cdot n + 2 \ldots n + 2k}.$$

Um die Gleichung (15) zu bilden, sind ferner die Ausdrücke:

$$X^{(n)} \frac{dY^{(n)}}{dx} + Y^{(n)} \frac{dX^{(n)}}{dx}, \quad X^{(n)} \frac{dY^{(n)}}{dx} - Y^{(n)} \frac{dX^{(n)}}{dx}, \quad \frac{dX^{(n)}}{dx} \frac{dY^{(n)}}{dx}$$

zu entwickeln. Wir benutzen hierzu die folgenden Gleichungen, die identisch sind in Rücksicht auf die Gleichungen (9):

$$H = X^{(n)} Y^{(n)},$$

$$\frac{dH}{dx} = X^{(n)} \frac{dY^{(n)}}{dx} + Y^{(n)} \frac{dX^{(n)}}{dx},$$

$$\frac{d^2H}{dx^2} = \frac{2n^2}{x^2} X^{(n)} Y^{(n)} - \frac{1}{x}\left(X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx} + Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx}\right) + 2\frac{dX^{(n)}}{dx}\frac{dY^{(n)}}{dx}.$$

$$\frac{d^3H}{dx^3} = -\frac{6n^2}{x^3} X^{(n)} Y^{(n)} + \frac{4n^2+2}{x^2}\left(X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx} + Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx}\right) + 8\left(X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx} - Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx}\right) - \frac{6}{x}\frac{dX^{(n)}}{dx}\frac{dY^{(n)}}{dx}.$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen erhält man

$$X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx} + Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx} = \frac{dH}{dx},$$

$$8\left(X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx} - Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx}\right) = \frac{d^3H}{dx^3} + \frac{3}{x}\frac{d^2H}{dx^2} - \frac{4n^2-1}{x^2}\frac{dH}{dx},$$

$$2\frac{dX^{(n)}}{dx}\frac{dY^{(n)}}{dx} = \frac{d^2H}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dH}{dx} - \frac{2n^2}{x^2}H.$$

Durch Berücksichtigung der Gleichungen (19) und (20) werden diese drei Grössen der Reihe nach:

$$\frac{2x^{2n-1}}{(1.2\ldots n)^2}\left(n + \sum_1^\infty k\,(n+2k)\,B_k x^{4k}\right).$$

$$\frac{4x^{2n-3}}{(1.2\ldots n)^2}\sum_1^\infty k\,k\,(n+k)\,(n+2k)\,B_k x^{4k},$$

$$\frac{x^{2n-2}}{(1.2\ldots n)^2}\left(n^2 + \sum_1^\infty k\left(2\,(n+2k)^2 - n^2\right)B_k x^{4k}\right).$$

Hiernach wird die Gleichung (15), wenn man den Faktor x^{2n-3} weglässt,

$$(21)\qquad 0 = (4\gamma - 1)\,n^2(n-1) + \sum_1^\infty k\,(-1)^k \frac{E_k}{M_k} x^{4k},$$

wo

$$E_k = -n^2(n^2-1) + 4\gamma\,(n+2k)\,(n+2k+1)\left(n(n-1) - 2k\right) + 4\gamma k\,(n+k\ldots$$

$$M_k = 1.2\ldots k.\,n+1.\,n+2\ldots n+k.\,n+1.\,n+2\ldots n+2k+1.$$

Man sieht, dass die Gleichung (21), deren Wurzeln, durch l dividirt, die Werthe sind, die für $\lambda_{n,\mu}$ gesetzt werden können, nur die Potenzen von x enthält, deren Exponenten Vielfache von 4 sind. Es folgt daraus, dass, wenn $l\lambda$ eine ihrer Wurzeln ist, auch $-l\lambda$, $l\lambda - 1$ und $-l\lambda - 1$ ihre Wurzeln

sind. Ich will jetzt nachweisen, dass die vierten Potenzen aller Wurzeln der Gleichung (21) reell und positiv sind; daraus wird dann hervorgehen, dass unter jeder Gruppe von vier Wurzeln, wie die angegebene deren eine ist, sich eine reelle positive Wurzel befinden muss. Wie schon früher bemerkt, ist θ eine positive Grösse; es ist also γ, welches $= \frac{1+2\theta}{1+\theta}$ gesetzt wurde, grösser als 1. Hieraus folgt, dass E_k immer positiv ist, dass also die Glieder der rechten Seite der Gleichung 21, abwechselnde Zeichen haben. Hiernach ist es unmöglich, dass die vierte Potenz einer Wurzel dieser Gleichung negativ sei. Dass sie auch nicht imaginär sein kann, lässt sich auf folgende, indirekte Weise darthun.

Es seien $l\lambda$ und $l\lambda'$ zwei Wurzeln der Gleichung 21. Für die erste derselben sei die durch (16) bestimmte Funktion $C_{n,k} = C$, für die zweite $= C'$: dann lässt sich zeigen, dass

$$\lambda^4 - \lambda'^4 \int C C' r dr = 0 \tag{22}$$

ist. Wir wollen es als bewiesen annehmen und wollen zeigen, dass dann λ^4 nicht imaginär sein kann. Es sei

$$\lambda = p - q\sqrt{-1}$$
$$C = P - Q\sqrt{-1}$$

Eine andere Wurzel der Gleichung 21 muss dann $p + q\sqrt{-1}$ sein. Wir setzen

$$\lambda' = p + q\sqrt{-1}$$

dann wird

$$C' = P + Q\sqrt{-1}$$

Die Gleichung 22 wird nun

$$pq \int P^2 - Q^2 \, r dr = 0$$

Das hier vorkommende Integral kann nicht verschwinden, da es eine Summe von lauter positiven Grössen ist, und muss

$$pq = 0$$

sein; und dieses ist nur dann möglich, wenn $q = 0$ ist.

Wir wollen nun die Gleichung 22 so

weisen. Daraus, dass der in (17) gegebene Ausdruck für w der Gleichung (1) genügt, folgt, dass, wenn man

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} - \frac{n^2}{r^2}U = 4\lambda^2 V$$

setzt, gleichzeitig

$$(23)\qquad \begin{cases} \frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} - \frac{n^2}{r^2}U = 4\lambda^2 V, \\ \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} - \frac{n^2}{r^2}V = 4\lambda^2 U \end{cases}$$

ist. Daraus, dass derselbe Ausdruck für w die Gleichungen (2) oder die Gleichungen (13), welche dieselben sind, erfüllt, folgt, dass für $r = l$,

$$(24)\qquad \begin{cases} \frac{1+2\theta}{1+\theta}\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} - \frac{n^2}{r^2}U\right) - \frac{n^2}{r^2}\left(\frac{dU}{dr} - \frac{1}{r}U\right) = 0, \\ \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} - \frac{n^2}{r^2}U\right) + \frac{d^2U}{dr^2} = 0 \end{cases}$$

sein wird. Die Gleichungen (23) lassen sich schreiben:

$$4\lambda^2 V = r^{n-1}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n-1}}\frac{d}{dr}r^n U,$$

$$4\lambda^2 U = r^{n-1}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n-1}}\frac{d}{dr}r^n V.$$

Durch Substitution des Werths von V aus der ersten dieser beiden Gleichungen in die zweite erhält man

$$(25)\qquad 16\lambda^4 U = r^{n-1}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n-1}}\frac{d}{dr}r^{2n-1}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n-1}}\frac{d}{dr}r^n U.$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich eine Gleichung, die man aus dieser erhält, wenn man U' und λ' statt U und λ setzt. Substituirt man den Werth von $16\lambda^4 U'$ aus (25) in das Integral

$$16\lambda^4 \int U'U''r\,dr$$

und integrirt viermal partiell, so kommt man auf das Integral

$$\int r\,dr\,U'.r^{n-1}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n-1}}\frac{d}{dr}r^{2n-1}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n-1}}\frac{d}{dr}r^n U'',$$

und dieses ist

$$= 16\lambda'^4 \int U'U''r\,dr.$$

Man erhält auf dem angedeuteten Wege die Gleichung

$$(26)\quad 16(\lambda^4-\lambda'^4)\int U U' r\,dr = \frac{1}{r^{n-1}} U' \left(\frac{d}{dr} r^{2n-1} \frac{d}{dr} \frac{1}{r^{2n-1}} \frac{d}{dr} r^n U\right)$$
$$- \left(\frac{d}{dr} r^n U'\right)\left(\frac{d}{dr} \frac{1}{r^{2n-1}} \frac{d}{dr} r^n U\right)$$
$$+ \left(\frac{d}{dr} \frac{1}{r^{2n-1}} \frac{d}{dr} r^n U'\right)\left(\frac{d}{dr} r^n U\right)$$
$$- \left(\frac{d}{dr} r^{2n-1} \frac{d}{dr} \frac{1}{r^{2n-1}} \frac{d}{dr} r^n U'\right) \frac{1}{r^{n-1}} U.$$

Nun lässt sich zeigen, dass der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung sowohl für $r = 0$, als für $r = l$ verschwindet. Dass er für $r = 0$ verschwindet, ist einzusehen, wenn man erwägt, dass U und U' von der Form

$$c r^n + c_1 r^{n+2} + c_2 r^{n+4} + \ldots$$

sind. Um zu beweisen, dass er für $r = l$ verschwindet, wenden wir die Gleichungen (24) an. Diese lassen sich folgendermassen schreiben:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} = \frac{\theta}{1+2\theta}\left(\frac{n^2}{r^2} U - \frac{1}{r}\frac{dU}{dr}\right).$$
$$\frac{d^3 U}{dr^3} = -\frac{3n^2}{r^3} U + \frac{n^2 + (n^2+1)(1+3\theta)}{(1+2\theta) r^2} \frac{dU}{dr}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen und derer, welche aus ihnen entstehen, wenn man U' statt U setzt, drücke man die zweiten und dritten Differentialquotienten von U und U', auf welche man kommt, wenn man die in (26) angegebenen Differentiationen ausführt, durch U und U' selbst und ihre ersten Differentialquotienten aus; man findet dann, dass die Glieder auf der rechten Seite von (26) sich gegenseitig aufheben. Es folgt daraus die Richtigkeit der Gleichung (22).

Es ist bis jetzt auf die Bedingungen nicht Rücksicht genommen worden, welche die Lösung unserer partiellen Differentialgleichung für $t = 0$ erfüllen soll. Wir werden nun die gefundene Lösung (17) so zu verallgemeinern suchen, dass auch diesen Bedingungen genügt werden kann. Von dem Ausdrucke, der in (17) $= w$ gesetzt ist, kann man die Summe in Beziehung auf μ und in Beziehung auf n nehmen, und diese Doppelsumme $= w$ setzen. Bei der ersten der beiden Summationen kann man sich darauf beschränken, die reellen positiven Werthe $\lambda_{n\mu}$ zu berücksichtigen; durch die Berücksichtigung der negativen

und imaginären Werthe $\lambda_{n\mu}$ gewinnt man nichts an Allgemeinheit des Ausdrucks von w; denn: ist wiederum

$$U_{n\mu} = U \text{ für } \lambda_{n\mu} = \lambda$$

und

$$U_{n\mu} = U' \text{ für } \lambda_{n\mu} = \lambda',$$

so ist für denselben Werth von r:

$$U = U', \qquad \text{falls } \lambda = -\lambda'$$

und

$$U' = (-1)^{n+1} U', \text{ falls } \lambda = \lambda' \sqrt{-1}.$$

Wir wollen jetzt unter

$$l\lambda_{n_0}, l\lambda_{n_1}, l\lambda_{n_2}, \ldots l\lambda_{n_\mu}, \ldots$$

die positiven reellen Wurzeln der Gleichung (21) verstehen, dieselben ihrer Grösse nach so geordnet, dass $l\lambda_{n_0}$ die kleinste ist, und wollen

$$w = \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} \{\cos(4\lambda_{n\mu}^2 a t)(A_{n\mu}\cos n\psi + B_{n\mu}\sin n\psi) + \sin(4\lambda_{n\mu}^2 a t)(C_{n\mu}\cos n\psi + D_{n\mu}\sin n\psi)\} U_{n\mu}$$

setzen. Die Constanten A, B, C, D müssen nun so bestimmt werden, dass

$$\text{für } t = 0, \quad w = F(r, \psi), \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = \Phi(r, \psi)$$

wird, wo F und Φ zwei gegebene Funktionen von r und ψ bedeuten. Aus der ersten Bedingung werden sich die Werthe der Grössen A, B ergeben, aus der zweiten die Werthe der Grössen C, D; und zwar diese auf ganz ähnliche Weise, wie jene; es ist also hinreichend, zu zeigen, wie jene gefunden werden können. Die erste Bedingung erfordert, dass

$$F(r, \psi) = \sum_0^{\infty} \sum_0^{\infty} (A_{n\mu}\cos n\psi + B_{n\mu}\sin n\psi) U_{n\mu}$$

werde. Wir stellen uns $F(r, \psi)$ nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen von ψ entwickelt vor, so dass

$$F(r, \psi) = F_0(r) + F_1(r)\cos\psi + F_2(r)\cos 2\psi + \ldots + F_1'(r)\sin\psi + F_2'(r)\sin 2\psi + \ldots$$

ist, und dann diese Entwickelung für $F(r, \psi)$ substituirt. Dann zeigt sich, dass

$$(27)\qquad \begin{cases} F_n(r) = \sum_0^\infty{}_\mu A_{n\mu}\, U_{n\mu}, \\ F'_n(r) = \sum_0^\infty{}_\mu B_{n\mu}\, U_{n\mu} \end{cases}$$

sein muss. Die Funktionen $F_n(r)$ und $F'_n(r)$ lassen sich als gegeben betrachten; die Bestimmung der Grössen A und B ist also auf die Aufgabe reducirt, eine gegebene Funktion von r nach den Funktionen U_{n_0}, U_{n_1}, U_{n_2}, ... zu entwickeln. Vorausgesetzt, dass diese Entwickelung möglich ist, kann man die Coëfficienten derselben mit Hülfe des Satzes finden, der durch die Gleichung (22) ausgesprochen wird. Diese Gleichung zeigt, dass, wenn μ und μ' zwei verschiedene Zahlen sind,

$$\int_0^l U_{n\mu}\, U_{n\mu'}\, r\, dr = 0$$

ist; es folgt daher aus den Gleichungen (27):

$$A_{n\mu}\int_0^l U_{n\mu}\, U_{n\mu}\, r\, dr = \int_0^l F_n(r)\, U_{n\mu}\, r\, dr,$$

$$B_{n\mu}\int_0^l U_{n\mu}\, U_{n\mu}\, r\, dr = \int_0^l F'_n(r)\, U_{n\mu}\, r\, dr.$$

§ 5.

Für die Vergleichung der Theorie mit der Erfahrung ist die Untersuchung des Falles wichtig, in welchem die Schwingungen der Scheibe von der Art sind, dass sie einen reinen Ton erzeugen. Die Verhältnisse der Schwingungszahlen der verschiedenen Töne, welche eine Scheibe geben kann, und die Knotenlinien, die bei jedem einzelnen vorhanden sind, bieten sich hier als die hauptsächlichsten Vergleichungspunkte dar. Mit diesem Falle wollen wir uns jetzt beschäftigen. In demselben muss w durch folgenden Ausdruck dargestellt sein:

$$(28)\qquad \begin{aligned} w = \{ &\cos(4\lambda_{n\mu}^2 a t)(A\cos n\psi + B\sin n\psi) \\ &+ \sin 4\lambda_{n\mu}^2 a t (C\cos n\psi + D\sin n\psi)\}\, U_{n\mu}. \end{aligned}$$

Der Ton ist durch $\lambda_{n\mu}$ in der Art bestimmt, dass seine Schwin-

gungszahl, d. h. die Anzahl der einfachen Schwingungen, die in der Einheit der Zeit vollführt werden,

$$= \frac{4\lambda_{n\mu}^2 a}{\pi}$$

ist. Die Knotenlinien sind diejenigen Linien, für welche, für alle Werthe von t, $w = 0$ ist; sie werden daher die Punkte enthalten, für welche entweder die Gleichung

$$U_{n\mu} = 0 \tag{29}$$

erfüllt wird, oder die beiden Gleichungen

$$\begin{cases} A\cos n\psi + B\sin n\psi = 0, \\ C\cos n\psi + D\sin n\psi = 0 \end{cases} \tag{30}$$

bestehen. Die Gleichung (29) liefert gewisse Werthe von r als Wurzeln. So viele reelle Wurzeln sie hat, die kleiner als l sind, so viele, mit der Peripherie der Scheibe concentrische Kreise werden in der Klangfigur vorkommen; die Anzahl und Grösse derselben wird allein von dem Tone abhängen und unabhängig sein von den Werthen der Coëfficienten A, B, C, D. Die Gleichungen (30) werden für keinen Punkt erfüllt, wenn nicht

$$A : B = C : D$$

ist; in diesem Falle sind jene Kreise die einzigen Knotenlinien. Besteht diese Proportion, so geben die Gleichungen (30) n Werthe von ψ, von denen je zwei aufeinanderfolgende um $\frac{\pi}{n}$ unterschieden sind; dann kommen also zu jenen Kreisen noch n Durchmesser als Knotenlinien hinzu, welche die Peripherie der Scheibe in gleiche Theile theilen.

Diese allgemeinen Resultate der Theorie sind im Wesentlichen mit der Erfahrung in Uebereinstimmung. Der Versuch zeigt, dass die Knotenlinien aus Kreisen bestehen, die mit der Peripherie der Scheibe concentrisch sind, und aus Durchmessern, die diese in gleiche Theile theilen, wenn man von gewissen Verzerrungen absieht, die diese Linien erleiden und die, wie mir scheint, hauptsächlich darin ihren Grund haben, dass die Scheibe nicht vollkommen frei ist, wie die Theorie sie voraussetzt. Der Versuch zeigt aber auch, dass bei einem Tone, bei dem zuweilen Durchmesser als Knotenlinien vor-

kommen. die Durchmesser zuweilen fehlen. Fehlen sie, so ordnet sich der auf die Scheibe gestreute Sand zwar auch in Durchmessern an: diese bleiben aber nicht fest während der Bewegung der Scheibe, sondern oscilliren. Wollte man diese interessante Erscheinung zu erklären versuchen, so müsste man die Bewegung eines Sandkornes verfolgen, welches, von einer Stelle der Scheibe fortgeschnellt, auf eine andere fällt, und so von einer Stelle zur andern geschleudert wird, während die Scheibe selbst die durch die Gleichung (28) ausgedrückte Bewegung vollführt. Auf diese Betrachtung will ich indessen hier nicht näher eingehen.

Chladni hat durch Versuche gefunden, dass die Schwingungszahlen der Töne, die in ihren Klangfiguren dieselbe Anzahl von Durchmessern haben, (d. h. der Töne, die demselben Werthe von n entsprechen) mit Ausnahme der tiefsten, sich nahe wie die Quadrate aufeinanderfolgender, gerader oder ungerader Zahlen verhalten, je nachdem die Zahl der Durchmesser gerade oder ungerade ist. Ich will jetzt nachweisen, dass die Theorie dasselbe Gesetz liefert. Es geht dies aus einer Umformung der Gleichung (21) hervor.

Für die Funktion $Y^{(0)}$, die durch die zweite der Gleichungen (10) bestimmt ist, hat Poisson [1]) folgende semiconvergente Reihe entwickelt:

$$Y^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}\left\{(\cos 2x + \sin 2x)\left(1 - \frac{(1.3)^2}{1.2}\frac{1}{(16x)^2} + \frac{(1.3.5.7)^2}{1.2.3.4}\frac{1}{(16x)^4}\right)\right.$$
$$\left. + (\sin 2x - \cos 2x)\left(\frac{1^2}{1}\frac{1}{16x} - \frac{(1.3.5)^2}{1.2.3}\frac{1}{(16x)^3} + \frac{(1.3.5.7.9)^2}{1.2.3.4.5}\frac{1}{(16x)^5} - \ldots\right)\right\}.$$

Auf eine ähnliche Weise findet man

$$X^{(0)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}\left\{1 + \frac{1^2}{1}\frac{1}{16x} + \frac{(1.3)^2}{1.2}\frac{1}{(16x)^2} + \frac{(1.3.5)^2}{1.2.3}\frac{1}{(16x)^3} + \ldots\right\}.$$

Nun folgt aus den Gleichungen (10)

$$Y^{(n+1)} = -\tfrac{1}{2}x^n\frac{d}{dx}\left(\frac{Y^{(n)}}{x^n}\right),$$

$$X^{(n+1)} = \tfrac{1}{2}x^n\frac{d}{dx}\left(\frac{X^{(n)}}{x^n}\right).$$

[1]) Journal de l'Ecole Polytechn. cap. 19 pag. 349.

Setzt man hier $n = 0$ und substituirt für $Y^{(0)}$, $Y^{(0)}$ die eben angegebenen Reihen, so erhält man ähnliche Reihen für $Y^{(1)}$, $X^{(1)}$; aus diesen findet man wiederum ähnliche Reihen für $Y^{(2)}$, $X^{(2)}$, u. s. f. So ergiebt sich:

$$Y^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}\Big\{\big(\cos(2x-\tfrac{1}{2}n\pi)+\sin(2x-\tfrac{1}{2}n\pi)\big)\Big(1-\frac{(1-4n^2)(9-4n^2)}{1.2}\frac{1}{(16x)^2}$$
$$+\frac{(1-4n^2)(9-4n^2)(25-4n^2)(49-4n^2)}{1.2.3.4}\frac{1}{(16x)^4}+\cdots\Big)$$
$$+\big(\sin(2x-\tfrac{1}{2}n\pi)-\cos(2x-\tfrac{1}{2}n\pi)\big)\Big(\frac{(1-4n^2)}{1}\frac{1}{16x}$$
$$-\frac{(1-4n^2)(9-4n^2)(25-4n^2)}{1.2.3}\frac{1}{(16x)^3}+\cdots\Big)\Big\},$$

$$X^{(n)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}\Big\{1+\frac{(1-4n^2)}{1}\frac{1}{16x}+\frac{(1-4n^2)(9-4n^2)}{1.2}\frac{1}{(16x)^2}$$
$$+\frac{(1-4n^2)(9-4n^2)(25-4n^2)}{1.2.3}\frac{1}{(16x)^3}+\cdots\Big\}.$$

Die erste dieser beiden Reihen ist in einer ein wenig andern Form schon von Herrn Jacobi in Schuhmachers astronomischen Nachrichten Bd. 28, S. 94 angegeben. Substituirt man diese Werthe von $Y^{(n)}$ und $X^{(n)}$ in die Gleichung (15), welche identisch mit der Gleichung (21) ist, so kann man aus der resultirenden Gleichung $\operatorname{tang}(2x-\frac{1}{2}n\pi)$ ausdrücken als den Quotienten zweier Reihen, die nach den Potenzen von $\frac{1}{16x}$ fortschreiten. Es ergiebt sich

$$(31)\qquad \operatorname{tang}(2x-\tfrac{1}{2}n\pi) = \frac{\frac{\mathfrak{B}}{16x}+\frac{\mathfrak{C}}{(16x)^2}-\frac{\mathfrak{D}}{(16x)^3}+\cdots}{\mathfrak{A}+\frac{\mathfrak{B}}{16x}+\frac{\mathfrak{D}}{(16x)^3}+\cdots},$$

wo

$\mathfrak{A} = \gamma$,

$\mathfrak{B} = \gamma(1-4n^2)-8$,

$\mathfrak{C} = \gamma(1-4n^2)(9-4n^2)+48(1+4n^2)$;

$\mathfrak{D} = -\gamma\tfrac{1}{3}\big((1-4n^2)(9-4n^2)(13-4n^2)\big)+8(9+136n^2+80n^4)$.

Ist x gross, so kann man die rechte Seite der Gleichung (31) $= 0$ setzen; dadurch erhält man, als Näherungswerthe der Wurzeln derselben, die Werthe, welche der Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}\pi(n+2h)$$

annimmt, wenn für h ganze Zahlen gesetzt werden. Es folgt hieraus das oben ausgesprochene, von Chladni gefundene Gesetz, da die Schwingungszahlen der Töne den Quadraten der Wurzeln der Gleichung (31) proportional sind. Diese Gleichung zeigt ferner, dass die Proportionalität der Schwingungszahlen mit den Quadraten aufeinanderfolgender gerader oder ungerader Zahlen um so näher Statt finden wird, je höher die Töne sind; und sie liefert ein Mittel, auf eine bequeme Weise alle Töne, die zu einem Werthe von n gehören, mit Ausnahme der tiefsten, mit grosser Genauigkeit zu bestimmen. Was die Zahl h in dem Näherungswerthe von $l\lambda_{n\mu}$ anbetrifft, so zeigt die numerische Rechnung, dass sie $= \mu$ ist; so dass also $l\lambda_{n\mu}$ für grosse Werthe von μ nahezu $= \frac{1}{4}\pi(n+2\mu)$ ist: ein Resultat, welches in vollkommner Uebereinstimmung mit den Beobachtungen von Chladni ist.

Um die tiefsten Töne für einen Werth von n zu ermitteln, muss man die kleinsten Wurzeln der Gleichung (21) berechnen. Diese Gleichung kann man auf die Form

$$0 = 1 - \frac{x^4}{A_1} + \frac{x^8}{A_2} - \frac{x^{12}}{A_3} + \text{etc.}$$

bringen, indem man sie für $n = 0$ und $n = 1$ durch x^4 dividirt. Die Rechnung giebt folgende Werthe von $\log A_1$, $\log A_2, \ldots$:

für $\theta = \frac{1}{2}$, also $\gamma = \frac{1}{3}$ (nach Poisson):

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$\log A_1$	0,664 2079	1,348 0266	0,265 0703	0,973 3073
$\log A_2$	2,535 1132	3,588 0591	2,061 5798	3,105 2465
$\log A_3$	5,097 3650	6,406 5347	4,588 9514	5,868 2055
$\log A_4$	8,149 924	9,655 978	7,620 8431	9,083 199
$\log A_5$	11,583 4	13,249 6	11,040 582	12,653 148
$\log A_6$	15,33	17,130	14,776 04	16,516 13
$\log A_7$		21,3	18,778 0	20,629 0
$\log A_8$			23,01	24,96
$\log A_9$				29,48

für $\theta = 1$, also $\gamma = \frac{8}{3}$ (nach Wertheim):

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$\log A_1$	0,681 2413	1,352 1826	0,224 2682	0,939 3022
$\log A_2$	2,556 3026	3,594 0911	2,018 9332	3,066 4444
$\log A_3$	5,120 4304	6,413 6351	4,546 2236	5,827 9058
$\log A_4$	8,174 058	9,663 768	7,578 3037	9,042 324
$\log A_5$	11,608 3	13,257 8	10,998 263	12,612 037
$\log A_6$	15,35	17,138	14,733 92	16,474 93
$\log A_7$		21,3	18,736	20,587 7
$\log A_8$			22,97	24,92
$\log A_9$				29,44

Hieraus gehen folgende Werthe von

$$\log (\lambda_{n\mu} l)^4$$

hervor:

für $\theta = \frac{1}{3}$:

μ	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
0	—	—	0,278 37	1,006 51
1	0,693 67	1,415 53	1,891 17	2,246 93
2	1,963 08	2,348 29		

für $\theta = 1$:

0	—	—	0,236 38	0,970 14
1	0,711 68	1,420 12	1,889 97	2,242 98
2	1,967 12	2,350 22		

In der folgenden Tafel sind die Tonverhältnisse, welche Chladni gefunden hat, zusammengestellt mit denen, welche die Rechnung giebt. Es sind die Töne angegeben, welche eine Scheibe geben kann, deren tiefster Ton *C* ist. In den mit *Ch.* überschriebenen Columnen finden sich die Töne, welche Chladni beobachtet hat, in den mit *P.* überschriebenen die, welche die Rechnung unter der Voraussetzung $\theta = \frac{1}{3}$, in den mit *W.* überschriebenen die, welche die Rechnung unter der Voraussetzung $\theta = 1$ geliefert hat. Die Angaben beziehen sich alle auf die

gleichschwebende Temperatur.[1]) Jeder berechnete Ton ist durch den ihm zunächst liegenden Ton der Scale bezeichnet, dem ein + oder − beigefügt ist, je nachdem jener etwas höher oder tiefer als dieser war.

μ	$n = 0$			$n = 1$			$n = 2$			$n = 3$		
	Ch.	*P.*	*W.*	*Ch.*	*P.*	*W.*	*Ch.*	*P.*	*W.*	*Ch.*	*P.*	*W.*
0	—	—	—	—	—	—	$\overline{C}$	$\overline{C}$	$\overline{C}$	$\overline{d}$	$\overline{dis}$ −	$\overline{dis}$ −
1	$\overline{Gis}$	$\overline{Gis}$ +	$\overline{A}$ +	$\overline{b}$	$\overline{h}$ −	$\overline{c}$ −	$\overline{g}$	$\overline{gis}$ +	$\overline{a}$ −	$\overline{\overline{d}}$. $\overline{\overline{dis}}$	$\overline{\overline{dis}}$ +	$\overline{\overline{e}}$ −
2	$\overline{\overline{gis}}$ +	$\overline{\overline{b}}$ −	$\overline{\overline{b}}$ +	$\overline{\overline{e}}$ +	$\overline{\overline{f}}$ +	$\overline{\overline{fis}}$ +						

Es zeigen sich hier nicht unerhebliche Abweichungen der beobachteten Töne von den durch die beiden Rechnungen ermittelten. Die beobachteten Töne stimmen mit den aus der Poisson'schen Annahme ($\theta = \frac{1}{4}$) ermittelten etwas besser überein, als mit den aus der Wertheim'schen Annahme ($\theta = 1$) berechneten; doch ist die Abweichung bei jenen zu gross, als dass hieraus ein Schluss gegen diese Annahme gezogen werden könnte.

Ich wende mich jetzt zur Vergleichung einiger numerischer Resultate, welche die Theorie in Bezug auf die Knotenlinien giebt, mit den entsprechenden Resultaten der Beobachtung. Hr. Professor Strehlke hat die Güte gehabt, mir die Ergebnisse einiger Messungen von ausgezeichneter Genauigkeit mitzutheilen, die er an zwei kreisförmigen Glasscheiben angestellt hat. Diese Scheiben waren mit derselben Sorgfalt gearbeitet, wie die quadratischen Scheiben, an denen er die Messungen angestellt hat, die von ihm in Dove's Repertorium Bd. III. S. 113 bekannt gemacht sind; die eine von ihnen hatte ungefähr 6 Zoll Durchmesser und 1 Linie Dicke, die andere 7 Zoll Durchmesser und 1,1 Linie Dicke. Zum Beweise der Vollkommenheit der Scheiben und der Genauigkeit der Messungsmethode kann die Kleinheit der Unterschiede der folgenden Zahlen dienen, die durch Messung verschiedener Durchmesser

1) Chladni sagt zwar nicht ausdrücklich in seiner Akustik, aus welcher seine Angaben genommen sind, dass dieselben sich auf die gleichschwebende Temperatur beziehen; doch scheint es unzweifelhaft, dass dem so ist.

des Knotenkreises ohne Knotendurchmesser auf einer Scheibe gefunden wurden.

Erste Seite.	Kehrseite derselben Scheibe.
$24^{L},415$	$24^{L},42$
43	44
44	425
425	43
405	415
Mittel $24^{L},423$	$24^{L},426$

Eben so regelmässig als diese Scheibe, welche mit I bezeichnet werden mag, zeigte sich die andere 7zöllige, welche II genannt werden soll. Ich will die Werthe der Radien der Knotenkreise, welche diese beiden Scheiben ergeben haben, zusammenstellen mit den Werthen, welche die Rechnung bei der Poisson'schen oder der Wertheim'schen Annahme von θ giebt.

	Beobachtung		Rechnung	
	I	II	*P.*	*W.*
$n = 0,\ \mu = 1$	$l.0{,}6792$	$l.0{,}6782$	$l.0{,}68062$	$l.0{,}67941$
$n = 1,\ \mu = 1$	$l.0{,}7811$	$l.0{,}7802$	$l.0{,}78136$	$l.0{,}78088$

Den Radius des Knotenkreises, der dem Tone ($n = 0,\ \mu = 1$) entspricht, hat auch Savart gemessen; er fand bei drei verschiedenen Scheiben die folgenden Werthe:

$$l.0{,}6819,\quad l.0{,}6798,\quad l.0{,}6812.$$

Diese Angaben theilt Poisson bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über die Schwingungen einer kreisförmigen Platte in der oben citirten Abhandlung mit. Poisson hat dort für den Fall $n = 0$ und unter der Annahme $\theta = \frac{1}{4}$ die tiefsten Töne und die zu diesen gehörigen Knotenkreise berechnet.

Die aus der Wertheim'schen Annahme abgeleiteten Resultate weichen von den aus der Poisson'schen abgeleiteten nur wenig ab; mit den Strehlke'schen Beobachtungen stimmen jene noch besser überein, als diese. Wie mir scheint, spricht dieses aber nicht gegen die Poisson'sche Annahme,

denn eine vollkommene Uebereinstimmung zwischen der Theorie und dem Versuche darf man nicht erwarten, weil die dem Versuche unterworfenen Scheiben nicht die Eigenschaften in aller Strenge besitzen, welche in der Theorie ihnen beigelegt werden.

Herr Strehlke hat, ausser den angeführten, mir noch die Resultate einiger anderer Messungen mitgetheilt, die von ihm an weniger vollkommenen Scheiben angestellt sind. Ich lasse dieselben folgen, zugleich mit den entsprechenden Zahlen, welche die Rechnung unter der Annahme $\theta = \frac{1}{2}$ und unter der Annahme $\theta = 1$ gegeben hat.

Radien der Knotenkreise.

	Beobachtung				Rechnung	
					$\theta = \frac{1}{2}$	$\theta = 1$
$n=1,\ \mu=1$	0,781	0,783	0,781	0,783	0,78136	0,78088
$n=2,\ \mu=1$	0,79	0,81	0,82		0,82194	0,82274
$n=3,\ \mu=1$	0,838	0,842			0,84523	0,84681
$n=1,\ \mu=2$	0,488	0,492			0,49774	0,49715
	0,869	0,869			0,87057	0,87015

Der Radius der Scheibe ist hierbei = 1 gesetzt.

Ueber die Schwingungen einer kreisförmigen elastischen Scheibe. [1]

Die Entdeckung Chladni's, die Ruhelinien einer schwingenden Scheibe durch aufgestreuten Sand sichtbar zu machen, leitete auch die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf das Problem der schwingenden Scheiben. Frl. Sophie Germain hat das Verdienst, zuerst einen Versuch zur Lösung des Problems gemacht zu haben; aus einer Hypothese, die sie über die Kräfte ersonnen hatte, mit der eine elastische Platte Formveränderungen widerstrebt, entwickelte sie, unterstützt von

1) Pogg. Ann. Bd. 81. 1850.

Lagrange, die Differentialgleichungen für die Schwingungen einer solchen. Sie war im Stande diese Gleichungen für den Fall einer rechteckigen Scheibe zu integriren, und erhielt in Beziehung auf die Höhe der Töne und die Knotenlien, die diese begleiten, Resultate, die mit ihren Beobachtungen in Uebereinstimmung waren. Diese Uebereinstimmung kann indessen nur als eine zufällige angesehen werden; jene Differentialgleichungen sind nicht die richtigen; denn es lässt sich nachweisen, dass sie einen Widerspruch gegen sich selbst in sich tragen. Die Schuld hiervon fällt auf die Hypothese, von der Frl. Germain ausgegangen ist.

Auf einer festeren Grundlage hat Poisson eine zweite Theorie der Schwingungen einer Scheibe aufgebaut. Die allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung eines beliebig gestalteten elastischen Körpers waren durch Navier und durch ihn aufgestellt; aus diesen leitete er die entsprechenden Gleichungen für den Fall ab, dass der Körper eine sehr dünne Platte ist. Diese Gleichungen hat er integrirt unter der Annahme, dass die Platte eine kreisförmige ist, und so schwingt, dass alle Punkte, die gleich weit vom Mittelpunkte abstehen, sich immer in demselben Schwingungszustande befinden. Er fand, dass eine solche Platte unendlich viele Töne geben kann, von denen der tiefste Ton von 1, der zweite von 2, der dritte von 3 Knotenkreisen etc. begleitet wird; er berechnete die Radien der Knotenkreise, die zu den beiden tiefsten Tönen gehören, und fand eine gute Uebereinstimmung mit den Werthen, die Savart durch Messung dieser Radien erhalten hatte.

Aber auch die Poisson'sche Theorie der Schwingungen einer Platte bedurfte einer Berichtigung. Ich habe nachgewiesen, dass den drei Grenzbedingungen, die Poisson entwickelt hat, im Allgemeinen nicht gleichzeitig genügt werden kann, und habe zwei Grenzbedingungen entwickelt, die an die Stelle jener zu setzen sind. Hiernach hatte es keine Schwierigkeit die Schwingungen einer kreisförmigen Platte im allgemeinen Falle durch die Rechnung zu verfolgen. Nach der Theorie Poisson's war dieses nicht möglich, da hier sich schon der Widerspruch seiner drei Grenzbedingungen zeigt, während in

dem von ihm behandelten speciellen Falle diesen gleichzeitig genügt werden kann, und dieselben gleichbedeutend sind mit den beiden von mir aufgestellten.

Bevor ich die Resultate meiner Rechnung angebe, muss ich folgende Bemerkung voranschicken. In den Gleichungen, die sich auf das Gleichgewicht und die Bewegung eines beliebig gestalteten elastischen Körpers beziehen, kommt eine Grösse vor, die ich θ nennen will, für die bisher, den theoretischen Betrachtungen Poisson's und den Beobachtungen von Cagniard-Latour gemäss, der Werth $\frac{1}{4}$ angenommen worden ist, Hr. Wertheim hat aus seinen Versuchen auf einen andern Werth von θ schliessen zu müssen geglaubt, nämlich auf den Werth $\theta = 1$. Da die Grösse θ auch in den Gleichungen vorkommt, die sich auf die Schwingungen einer Platte beziehen, so habe ich die Rechnung in Beziehung auf die Töne und die Knotenlinien einer Kreisscheibe für beide Werthe von θ angestellt. Es zeigte sich, dass der Unterschied beider Rechnungen immer nicht erheblich und desto kleiner ausfällt, je höher der Ton ist. Ich begnügte mich daher für die höheren Töne die Rechnung allein unter der älteren Annahme für θ durchzuführen.

Die Knotenlinien, die zu irgend einem Tone der Kreisscheibe gehören, bestehen der Theorie gemäss, welches auch der Werth von θ sei, aus Kreisen, die concentrisch sind mit der Peripherie der Scheibe, und Durchmessern, die dieselbe in gleiche Theile theilen. Einen jeden Ton kann man charakterisiren durch die Zahl der Durchmesser und die der Kreise, die in der zugehörigen Knotenfigur sich finden. Es bezeichne n die Anzahl der Durchmesser, μ die der Kreise; dann werden sich die Schwingungszahlen der Töne, welche eine und dieselbe Scheibe geben kann, ordnen lassen in eine Tafel mit doppeltem Eingange, mit einem in Beziehung auf n und einem in Beziehung auf μ. Die Höhe der Töne, die eine Scheibe liefert, ist abhängig von ihrer Grösse, Dicke und ihrem Stoffe; jedoch sind die Intervalle zwischen zwei entsprechenden Tönen von diesen Bedingungen unabhängig und bei allen Kreisscheiben die nämlichen. Die beiden folgenden Tafeln enthalten diese Intervalle; die erste ist unter der Annahme $\theta = \frac{1}{4}$, die zweite unter der

Annahme $\theta = 1$ berechnet; in jeder ist die Anzahl der Schwingungen angegeben, die bei den einzelnen Tönen in der Zeit vollführt werden, in der bei dem Grundton der Scheibe eine Schwingung geschieht. Der Grundton ist derjenige Ton, dessen Knotenfigur aus zwei auf einander senkrechten Durchmessern besteht.

$\theta = \frac{1}{4}$.

μ	$n=0$.	$n=1$.	$n=2$.	$n=3$.	$n=4$.	$n=5$.
0			1,0000	2,3124	4,0485	6,1982
1	1,6131	3,7032	6,4033	9,6445	13,3937	17,6304
2	6,9559	10,8383	15,3052	20,3249		
3	15,9031.					

$\theta = 1$.

μ	$n=0$.	$n=1$.	$n=2$.	$n=3$.
0			1,0000	2,3274
1	1,7284	3,9072	6,7111	10,0762
2	7,3344	11,4003.		

Chladni hat in seiner Akustik Beobachtungen über die Töne einer kreisförmigen Scheibe mitgetheilt; aus diesen ergaben sich die folgenden Schwingungszahlen:

μ	$n=0$.	$n=1$.	$n=2$.	$n=3$.	$n=4$.	$n=5$.
0			1,0	2,2	4,0	6,0...6,4
1	1,6	3,6	6,0	9,0...9,5	12,7	17,0
2	6,4 +	10,1	14,3	19,0		
3	14,3...15,1.					

Das hinzugefügte Zeichen + deutet hier an, dass der beobachtete Ton etwas höher war. Die beobachteten Tonverhältnisse stimmen etwas besser mit denjenigen überein, die unter der Annahme $\theta = \frac{1}{4}$ berechnet sind, als mit denjenigen, die sich bei der Annahme $\theta = 1$ ergeben haben; indessen steht zu hoffen, dass genauere Beobachtungen der Töne auf entschiedenere Weise für die eine oder die andere dieser Annahmen sprechen werden.

In Beziehung auf die Tonverhältnisse bemerke ich hier noch Folgendes. Wie die Schwingungszahlen der Töne, die ein frei schwingender Stab geben kann, sich immer mehr und

mehr den Quadraten der ungeraden Zahlen nähern, je höher die Töne werden; so nähern sich auch die Schwingungszahlen der höheren Töne der kreisförmigen Scheibe den Quadraten gewisser Zahlen, nämlich den Quadraten von $m + 2\mu$. Diese Thatsache hat schon Chladni durch Beobachtungen festgestellt; und die Theorie bestätigt sie, welchen Werth man auch für θ annehme.

Um mit Hülfe der bisherigen Angaben die absolute Höhe der Töne einer Kreisscheibe berechnen zu können, ist es noch nöthig die Bestimmung für die Höhe des Grundtones hier herzusetzen. Dieser ist von den Dimensionen und dem Stoffe der Scheibe abhängig; bezeichnet l ihren Radius, ε ihre halbe Dicke, q den Elasticitätscoëfficienten und ϱ die Dichtigkeit ihres Stoffes, so ergiebt sich die Anzahl der Schwingungen, die in der Zeiteinheit bei dem Grundton vollführt werden:

$$\text{bei der Annahme } \theta = \tfrac{1}{2}\text{: } \frac{\varepsilon}{l^2}\sqrt{\frac{q}{\varrho}}\,1{,}04604,$$

$$\text{und bei der Annahme } \theta = 1\text{: } \frac{\varepsilon}{l^2}\sqrt{\frac{q}{\varrho}}\,1{,}02357.$$

Durch Beobachtung ist diese Grösse, soviel mir bekannt, bisher nicht ermittelt worden.

Ich komme jetzt zur Angabe der Werthe der Radien der Knotenkreise, die zu den verschiedenen Tönen gehören, wie sie die Rechnung unter den beiden Annahmen für θ und wie die Beobachtung sie geliefert hat. Die Anordnung der folgenden Tafeln, in denen diese Werthe enthalten sind, ist entsprechend der Anordnung in den Tafeln für die Höhe der Töne; der Radius der Scheibe ist $= 1$ gesetzt.

$\theta = \frac{1}{2}$.

μ	$n=0$.	$n=1$.	$n=2$.	$n=3$.	$n=4$.	$n=5$.
1	0,68062	0,78136	0,82194	0,84523	0,86095	0,87256
2	0,39151	0,49774	0,56043	0,60365		
	0,84200	0,87057	0,88747	0,89894		
2	0,25679					
	0,59147					
	0,89381.					

$\theta = 1.$

μ	$n=0.$	$n=1.$	$n=2.$	$n=3.$
1	0,67941	0,78088	0,82274	0,84681
2		0,49715		
		0,87015.		

Die Beobachtungen, deren Resultate nun folgen, sind von Hrn. Strehlke angestellt, der die Güte gehabt hat, sie mir mitzutheilen. Hr. Strehlke hat seine Messungen an sechs sehr sorgfältig gearbeiteten Scheiben ausgeführt, die durch I, II, III, IV, V, VI bezeichnet werden sollen; die vier ersten waren von Glas, die beiden letzten von Metall; Dicke und Durchmesser der Scheiben waren, nach Pariser Maas, ungefähr die folgenden:

	Dicke.	Durchmesser.
Scheibe I	1 Linie	6 Zoll
„ II	1,1 „	7 „
„ III	$\frac{2}{3}$ „	7 „
„ IV	$\frac{2}{3}$ „	7 „
„ V	$\frac{2}{3}$ „	5 „
„ VI	$\frac{2}{3}$ „	6 „

Die an diesen Scheiben gemessenen Radien der Knotenkreise waren in Theilen des Radius der Scheibe ausgedrückt:

Scheibe I.

μ	$n=0.$	$n=1.$
1	0,6792	0,7811.

Scheibe II.

μ	$n=0.$	$n=1.$
1	0,6782	0,7802.

Scheibe III.

μ	$n=0.$	$n=1.$	$n=2.$	$n=3.$	$n=4.$	$n=5.$
1	0,6780	0,7800	0,8210	0,8447	0,8601	0,8717.
2	0,3915	0,4977	0,5605	0,6038		
	0,8414	0,8697	0,8867	0,8981.		

Scheibe IV.

μ	$n=0.$	$n=1.$	$n=2.$	$n=3.$	$n=4.$
1	0,6770	0,7792	0,8205	0,8445	0,8601
2	0,3911	0,4971	0,5608	0,6043	
	0,8411	0,8698	0,8870	0,8983	
3	0,2575				
	0,5921				
	0,8954				

Scheibe V.

μ	$n=0.$	$n=1.$
1	0,6781	0,7796

Scheibe VI.

μ	$n=0.$	$n=1.$	$n=2.$
1	0,6783	0,7802	0,8213.

Die an den verschiedenen Scheiben erhaltenen Resultate stimmen auf eine ausgezeichnete Weise unter einander überein und mit den Resultaten der Rechnung, sowohl derjenigen, die unter der Annahme $\theta = \frac{1}{2}$, als derjenigen, die unter der Annahme $\theta = 1$ angestellt ist. Für die eine oder die andere dieser Annahmen entscheiden die Messungen der Radien der Knotenkreise nicht, da der Unterschied der Werthe, die die Rechnung bei beiden ergiebt, ein zu geringer ist.

Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes. [1]

Poisson hat in seinem Traité de mécanique eine Theorie der endlichen Formänderungen entwickelt, die ein unendlich dünner, ursprünglich gerader oder krummer, elastischer Stab durch Kräfte, die theils auf sein Inneres, theils auf seine Enden wirken, erfährt. De Saint-Venant hat jedoch nachgewiesen, dass die Voraussetzungen, von denen Poisson dort ausgegangen ist, theilweise unrichtig sind, und hat zum ersten Male die Torsion und Biegung eines unendlich dünnen Stabes von beliebigem Querschnitt, von den Grundgleichungen der Theorie der Elasticität ausgehend, mit Strenge untersucht. De Saint-Venant hat dabei aber nur den Fall behandelt, dass der Stab ursprünglich cylindrisch ist, dass die Formänderungen unendlich klein sind, und dass die Axe des Stabes eine Axe der Elasticität ist. In der vorliegenden Abhandlung untersuche ich, von den Gleichungen der Theorie der Elasti-

1) Borchardt's Journal Bd. 56. 1858.

cität ausgehend, die Formänderungen eines unendlich dünnen Stabes von überall gleichem Querschnitt ohne diese beschränkenden Annahmen.

In dem ersten Paragraphen stelle ich über die Grundgleichungen der Theorie der Elasticität gewisse Betrachtungen an, welche die Anwendung derselben auf den Fall eines unendlich dünnen Stabes vorbereiten; im §. 2 wird diese Anwendung in ihrer Allgemeinheit, in Beziehung auf das Gleichgewicht und die Bewegung, gemacht; §. 3 behandelt das Gleichgewicht eines ursprünglich cylindrischen Stabes, der durch Kräfte, die auf die Enden wirken, eine endliche Formänderung erlitten hat; es ergiebt sich hier, dass die Aufgabe, die Gestalt des Stabes zu bestimmen, auf dieselben Differentialgleichungen führt, wie das Problem der Rotation eines schweren Körpers um einen festen Punkt; im §. 4 endlich entwickle ich ein Beispiel für das Gleichgewicht eines ursprünglich krummen Stabes unter dem Einfluss von Kräften, die auf die Enden wirken, indem ich die Formänderung untersuche, die eine aus einem Drahte von kreisförmigem Querschnitt gebildete Schraubenlinie durch eine Kraft erfährt, die auf einen mit dem Ende derselben fest verbundenen Punkt der Axe in der Richtung dieser wirkt.

§ 1.

Es seien x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes eines homogenen elastischen Körpers in seinem natürlichen Zustande; mit diesem Namen will ich den Zustand eines Körpers bezeichnen, bei dem an keinem Orte Dilatationen (oder Contractionen) stattfinden. Durch unendlich kleine Kräfte, die theils auf das Innere, theils auf die Oberfläche wirken, und die ich äussere nennen will, um sie von den elastischen zu unterscheiden, möge der Körper eine Formänderung erleiden; nach derselben seien $x + u$, $y + v$, $z + w$ die Coordinaten des vorher betrachteten Punktes, den ich als den Punkt (x, y, z) bezeichnen will. Durch diesen Punkt denke man sich nach dem Eintreten der Formänderung eine Ebene senkrecht zur x-Axe gelegt; diese theilt den Körper in zwei

Theile; die Componenten nach den Coordinatenaxen der auf die Flächeneinheit bezogenen elastischen Kraft, welche der Theil, dem die grösseren Werthe von x entsprechen, auf den andern im Punkte (x, y, z) ausübt, seien:

$$X_x, \quad Y_x, \quad Z_x,$$

und die analoge Bedeutung sollen die Zeichen

$$X_y, \quad Y_y, \quad Z_y,$$
$$X_z, \quad Y_z, \quad Z_z$$

haben. Dabei ist dann:

$$Y_x = X_y, \quad Z_y = Y_z, \quad X_z = Z_x.$$

Ich setze ferner:

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad y_z = z_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},$$
$$y_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad z_x = x_z = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},$$
$$z_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad x_y = y_x = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y},$$

bezeichne durch

$$iX, \; iY, \; iZ$$

die Componenten der äusseren, auf die Einheit des Volumens bezogenen Kraft, die nach der Formänderung im Punkte (x, y, z) im Innern des Körpers wirksam ist, ferner durch

$$i(X), \; i(Y), \; i(Z)$$

die Componenten der auf die Flächeneinheit bezogenen äusseren Kraft, die auf die Oberfläche im Punkte (x, y, z) ausgeübt wird, wobei ich unter i eine unendlich kleine Constante, unter $X, Y, Z, (X), (Y), (Z)$ endliche Grössen verstehe, und schreibe endlich die Gleichung der Oberfläche des Körpers in seinem natürlichen Zustande:

$$g = 0.$$

Unter der Voraussetzung, dass die 9 Differentialquotienten von u, v, w nach x, y, z unendlich klein sind, sind dann die 6 Grössen $X_x, X_y, \ldots$ lineare homogene Funktionen der 6 Grössen $x_x, x_y, \ldots$, deren Coefficienten die Constanten der Elasticität des Körpers sind, und für den Fall des Gleichgewichts ist für jeden Punkt im Innern des Körpers:

$$(1)\qquad \begin{cases} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = iX, \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = -iY, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = -iZ, \end{cases}$$

und für jeden Punkt der Oberfläche:

$$2)\qquad \begin{cases} X_x \frac{\partial g}{\partial x} + X_y \frac{\partial g}{\partial y} + X_z \frac{\partial g}{\partial z} = i(X)\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2}, \\ Y_x \frac{\partial g}{\partial x} + Y_y \frac{\partial g}{\partial y} + Y_z \frac{\partial g}{\partial z} = i(Y)\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2}, \\ Z_x \frac{\partial g}{\partial x} + Z_y \frac{\partial g}{\partial y} + Z_z \frac{\partial g}{\partial z} = i(Z)\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2}, \end{cases}$$

wo die Wurzelgrösse positiv zu nehmen ist, wenn für die Punkte im Innern des Körpers g negativ ist.

In den allgemeinen Lösungen dieser Differentialgleichungen für u, v, w kommen 6 willkürliche Constanten vor; die Ausdrücke von u, v, w enthalten nämlich die additiven Glieder

$$a_0 + cy - bz,\ b_0 + az - cx,\ c_0 + bx - ay,$$

in denen a_0, b_0, c_0, a, b, c willkürliche Constanten sind. Es folgt das daraus, dass die Grössen u, v, w nur in so fern in den Gleichungen (1) und (2) vorkommen, als sie die Werthe von $x_x, x_y, \ldots$ bedingen, und diese Werthe ungeändert bleiben, wenn man zu u, v, w die angegebenen Glieder hinzufügt. Die 6 Constanten a_0, b_0, c_0, a, b, c sollen durch die Festsetzung ihre Bestimmung erhalten, dass für den Punkt ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$), der in dem Körper liegen möge,

$$(3)\qquad u = 0,\ v = 0,\ w = 0,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

ist. Da von den 9 Grössen:

$$\begin{matrix} 1, & \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y}, & 1, & \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial z}, & \frac{\partial v}{\partial z}, & 1, \end{matrix}$$

die 3 der obersten Horizontalreihe die Cosinus der Winkel sind, die ein ursprünglich der x-Axe paralleles Linienelement nach der Formänderung mit den Axen bildet, und die übrigen die entsprechende Bedeutung haben, so sagen die drei letzten der Gleichungen (3) aus, dass ein durch den Punkt ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) der x-Axe ursprünglich parallel gelegtes Linienelement seine Richtung nicht ändert, und ein durch denselben Punkt der y-Axe ursprünglich parallel gelegtes Linienelement senkrecht auf der z-Axe bleibt.

Die Gleichungen (1), (2) und (3) bestimmen die Funktionen u, v, w eindeutig, wie später, nach der Gleichung (9), nachgewiesen werden soll. Die Ausdrücke von u, v, w und ihre Differentialquotienten nach x, y, z müssen hiernach den Faktor i enthalten; sie werden daher von der Ordnung von i sein, wenn alle Dimensionen des Körpers endlich sind, oder, um mich präciser auszudrücken, wenn in der Funktion g nur endliche Constanten vorkommen. In diesem Falle ist also die Voraussetzung, dass die 9 Differentialquotienten von u, v, w nach x, y, z unendlich klein sind, unter welcher die Gleichungen (1) und (2) nur richtig sind, erfüllt. Enthält g eine unendlich kleine Constante, so wird diese Voraussetzung im Allgemeinen nicht erfüllt; ihr wird aber auch genügt in dem Falle, der jetzt betrachtet werden soll.

Es seien alle Dimensionen des Körpers unendlich klein und von derselben Ordnung; oder, um bestimmter zu sprechen, es sei die Gleichung $g = 0$ der Art, dass, wenn man in ihr setzt:

$$x = i\xi, \quad y = i\eta, \quad z = i\zeta, \tag{4}$$

wo i eine unendlich kleine Constante bedeutet, sie übergeht in eine Gleichung

$$\mathfrak{g} = 0,$$

deren linker Theil eine Funktion von ξ, η, ζ ist, die nur endliche Constanten enthält. Die Grössen X, Y, Z, (X), (Y), (Z) sollen Funktionen von x, y, z und i sein, aber solche, die endlich bleiben für alle Werthe, die x, y, z in dem Körper erhalten.

Die Substitutionen (4) denke man sich auch in den Gleichungen (1), (2) und (3) ausgeführt. Macht man

$$\mathfrak{x}_x = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \mathfrak{y}_z = \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \zeta},$$
$$\mathfrak{y}_y = \frac{\partial v}{\partial \eta}, \quad \mathfrak{z}_x = \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \xi},$$
$$\mathfrak{z}_z = \frac{\partial w}{\partial \zeta}, \quad \mathfrak{x}_y = \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

und bezeichnet durch $\mathfrak{X}_x$, $\mathfrak{Y}_x$, $\mathfrak{Z}_x$, ... die Ausdrücke, die man erhält, wenn man x_x, y_x, z_x, ... ersetzt durch $\mathfrak{x}_x$, $\mathfrak{y}_x$, $\mathfrak{z}_x$, ... in den Ausdrücken, die X_x, Y_x, Z_x, ... als Funktionen von x_x, y_x, z_x, ... darstellen, so erhält man dadurch:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{X}_x}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathfrak{X}_y}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathfrak{X}_z}{\partial \zeta} = -ii^2 X, \\ \frac{\partial \mathfrak{Y}_x}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathfrak{Y}_y}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathfrak{Y}_z}{\partial \zeta} = -ii^2 Y, \\ \frac{\partial \mathfrak{Z}_x}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathfrak{Z}_y}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathfrak{Z}_z}{\partial \zeta} = -ii^2 Z, \end{cases}$$

für $\mathfrak{g} = 0$:

$$(6) \quad \begin{cases} \mathfrak{X}_x \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \xi} + \mathfrak{X}_y \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \eta} + \mathfrak{X}_z \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \zeta} = ii(X) \sqrt{\left(\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \zeta}\right)^2}, \\ \mathfrak{Y}_x \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \xi} + \mathfrak{Y}_y \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \eta} + \mathfrak{Y}_z \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \zeta} = ii(Y) \sqrt{\left(\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \zeta}\right)^2}, \\ \mathfrak{Z}_x \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \xi} + \mathfrak{Z}_y \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \eta} + \mathfrak{Z}_z \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \zeta} = ii(Z) \sqrt{\left(\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \zeta}\right)^2}, \end{cases}$$

und für $\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = 0$, $\mathfrak{z} = 0$:

$$(7) \qquad u = 0, \; v = 0, \; w = 0, \; \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0, \; \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \; \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0.$$

Wenn durch die Ausführung der Substitutionen (4) in den Ausdrücken von X, Y, Z, (X), (Y), (Z) die Grösse i nicht verschwunden ist, so kann man doch für diese 6 Grössen die endlichen Grenzwerthe setzen, denen sie sich der gemachten Annahme zufolge nähern müssen, wenn i sich der Null nähert; d. h. man kann X, Y, Z, (X), (Y), (Z) als endliche und von i unabhängige Funktionen von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ betrachten. Aus diesem Grunde müssen die Werthe, die für u, v, w aus den Gleichungen (5), (6), (7) sich ergeben, von der Ordnung des Produkts ii sein; von derselben Ordnung sind die Differentialquotienten von u, v, w nach $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, und daher sind die Differentialquotienten von u, v, w nach x, y, z von der Ordnung von i.

Die Gleichungen (1) und (2) gelten deshalb auch für den jetzt betrachteten Fall; sie vereinfachen sich in demselben aber wesentlich. Erwägt man nämlich, dass die rechten Theile der Gleichungen (5) unendlich klein sind gegen die rechten Theile der Gleichungen (6), so sieht man, dass die Grössen X, Y, Z nur einen verschwindend kleinen Einfluss auf die Werthe von u, v, w ausüben, dass man sie daher vernachlässigen und die Gleichungen (1) ersetzen kann durch die folgenden:

$$(8) \qquad \begin{cases} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind unter der Voraussetzung abgeleitet, dass iX, iY, iZ von derselben Ordnung wie $i(X)$, $i(Y)$, $i(Z)$ sind; sie gelten offenbar auch in dem Falle, dass jene 3 Kräfte unendlich klein gegen diese sind, sie gelten aber nicht in dem umgekehrten Falle. Die Schlüsse, welche weiter unten aus den Gleichungen (8) gezogen werden sollen, gelten also auch nur unter der Voraussetzung, dass der letzte Fall nicht stattfindet.

Die Gleichungen (1) und (2) lassen sich in eine Gleichung zusammenfassen. Von den 36 Constanten, welche die Gleichungen enthalten, die X_x, Y_x, ... als Funktionen von x_x, y_x, ... darstellen, müssen 15 anderen 15 gleich sein, so dass der Ausdruck

$$X_x dx_x + Y_y dy_y + Z_z dz_z + Y_z dy_z + Z_x dz_x + X_y dx_y$$

das vollständige Differential einer homogenen Funktion 2ten Grades der 6 Variabeln x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y ist.[1]) Ist F diese

1) Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt leicht aus den Prinzipien der mechanischen Wärmetheorie. Wäre nämlich der angegebene Ausdruck kein vollständiges Differential, so könnte man mit Hülfe des elastischen Körpers Arbeit gewinnen, indem man Druckkräfte auf die Oberfläche desselben wirken lässt, die man so variirt, dass der Körper wieder in seinen ursprünglichen Zustand zurückgeführt wird; es könnte das nach jenen Prinzipien nicht der Fall sein ohne einen entsprechenden Verlust

Funktion, so sind die Gleichungen (1) und (2) gleichbedeutend mit der einen:

$$\delta\Omega - \delta\int F\,dx\,dy\,dz = 0, \tag{9}$$

in der das erste Glied der linken Seite das Moment der äusseren Kräfte für unendlich kleine Aenderungen von u, v, w, und das zweite die entsprechende Variation des in ihm vorkommenden, über das Volumen des Körpers ausgedehnten Integrals bedeutet.

Aus einer gewissen Eigenschaft der Funktion F lässt sich die oben ausgesprochene Behauptung, dass die Gleichungen (1), (2), (3) die Funktionen u, v, w eindeutig bestimmen, beweisen.

Wäre dieses nicht der Fall, so müsste es von Null verschiedene Werthe von u, v, w geben, die den Gleichungen (1), (2), (3) genügen, wenn die rechten Seiten der Gleichungen (1) und (2) gleich Null gesetzt sind. Es soll gezeigt werden, dass es solche Werthe nicht giebt. Multiplicirt man die Gleichungen (1) mit $u\,dx\,dy\,dz$, $v\,dx\,dy\,dz$, $w\,dx\,dy\,dz$ und integrirt sie über das Volumen des Körpers, dividirt man die Gleichungen (2) durch

$$\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2},$$

multiplicirt sie mit $u\,d0$, $v\,d0$, $w\,d0$, wo $d0$ ein Element der Oberfläche des Körpers bedeutet, und integrirt sie über diese Oberfläche, so erhält man für den Fall, dass X, Y, Z, (X), (Y), $(Z) = 0$ sind, durch Addition:

$$0 = \int F\,dx\,dy\,dz.$$

Für einen Körper, dessen Elasticität in allen Richtungen die-

---

an Wärme; fände ein solcher statt, so wäre aber dennoch die Uebereinstimmung mit den genannten Prinzipien nicht hergestellt, denn man könnte mit Hülfe des elastischen Körpers Wärme in Arbeit verwandeln, ohne dazu Körper von verschiedener Temperatur nöthig zu haben. Diese Betrachtung ist, wie ich glaube, schon von W. Thomson in Quarterly Mathematical Journal (April 1855) angestellt; ich habe die citirte Stelle nicht einsehen können.

selbe ist, ist die Funktion F weiter unten, in der Gleichung (29), aufgestellt; es hat hier F die Eigenschaft, nie negativ zu werden und nur zu verschwinden, wenn die 6 Argumente x_x, $x_y, \ldots = 0$ sind; da bei denjenigen Körpern, welche in verschiedenen Richtungen eine verschiedene Elasticität besitzen, die Unterschiede der Elasticität nur klein sind, so wird man annehmen dürfen, dass bei allen in der Natur vorkommenden Körpern F dieselbe Eigenschaft hat. Es folgt dann aus der abgeleiteten Gleichung, dass die 6 Grössen x_x, $x_y, \ldots$ in dem ganzen Körper gleich Null sind. Um zu beweisen, dass hieraus und aus den Gleichungen (3) für den ganzen Körper $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ sich ergiebt, entwickle ich, wie man u finden kann, wenn x_x, $x_y, \ldots$ gegeben sind. Es ist

$$u = (u)_0 + \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right),$$

wo $(u)_0$ den Werth von u für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ bedeutet, und wo die Integration auf einem beliebigen Wege von dem Punkte ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$) bis zu dem Punkte (x, y, z) auszudehnen ist. Bei ähnlicher Bezeichnung hat man:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 + \int \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dz \right),$$

und es ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial x_x}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial y_z}{\partial y} - \frac{\partial y_y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \tfrac{1}{2} \left(- \frac{\partial y_z}{\partial x} + \frac{\partial z_x}{\partial y} + \frac{\partial x_y}{\partial z} \right).$$

Diese Werthe denke man sich in die Gleichung für $\frac{\partial u}{\partial y}$ substituirt; einen ähnlichen Ausdruck, wie man ihn dann für $\frac{\partial u}{\partial y}$ erhält, kann man für $\frac{\partial u}{\partial z}$ ableiten; $\frac{\partial u}{\partial x}$ hat den einfacheren Ausdruck x_x. Wenn nun die 6 Grössen x_x, x_y, . . . $= 0$ sind und die Gleichungen (3) bestehen, so folgt hieraus zunächst, dass $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ sind, und dann weiter, dass $u = 0$ ist.

Auf dieselbe Weise lässt sich offenbar ableiten, dass auch v und w verschwinden.

Die Gleichung (9) gilt — wie die Gleichungen (1) und (2) — nur, wenn alle Dimensionen des Körpers von gleicher Ordnung sind; eine Gleichung von ähnlicher Form lässt sich aber auch für den Fall aufstellen, dass diese Bedingung nicht erfüllt ist. In diesem Falle denke man sich den Körper in Theile zerlegt, von denen ein jeder Dimensionen von gleicher Ordnung hat. Einen von diesen Theilen stelle man sich vor in seinen natürlichen Zustand und in eine Lage gebracht, die sogleich charakterisirt werden soll; x, y, z seien dann die Coordinaten eines Punktes des Theiles in Beziehung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt in dem Theile selbst liegen möge; $x + u$, $y + v$, $z + w$ seien die Coordinaten desselben Punktes in Beziehung auf dasselbe Coordinatensystem, wenn der Theil in seine veränderte Form und Lage zurückgebracht ist; jene noch unbestimmt gelassene Lage des Theiles bei seinem natürlichen Zustande soll so gewählt sein, dass für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ die Gleichungen (3) bestehen. Es gilt dann für den betrachteten Theil die Gleichung (9), wenn man bei der Bildung von $\delta\Omega$ die elastischen Kräfte berücksichtigt, die auf seine Oberfläche von den benachbarten Theilen ausgeübt werden. Stellt man die Gleichung (9) für alle Theile auf, in die der Körper zerlegt gedacht ist, und nimmt die Summe, so erhält man:

$$\delta\Omega - \delta\Sigma\int F\,dx\,dy\,dz = 0, \tag{10}$$

wo $\delta\Omega$ das Moment der äusseren Kräfte bedeutet, die theils auf das Innere, theils auf die Oberfläche des Körpers wirken, da das Moment der auf die Grenzflächen der einzelnen Theile wirkenden elastischen Kräfte verschwindet.

Die Gleichung (10), die die Gleichung (9) als speciellen Fall enthält, lässt noch eine weitere nützliche Verallgemeinerung zu; sie lässt sich nämlich von der Voraussetzung unabhängig machen, dass x, y, z, u, v, w sich auf den natürlichen Zustand des entsprechenden Theiles des Körpers beziehen, beziehen sich x, y, z, u, v, w auf einen Zustand, in dem belie-

bige, nur unendlich kleine Dilatationen stattfinden, und sind u', v', w' die Werthe, welche u, v, w annehmen, wenn man den betrachteten Theil in seinen natürlichen Zustand und in eine beliebige Lage übergehen lässt, so sind die Gleichungen (1), (2), (3) richtig, wenn man in ihnen für u, v, w setzt $u - u'$, $v - v'$, $w - w'$. Dieselbe Substitution muss daher auch die Gleichungen (9) und (10) für diesen Fall gültig machen.

Von der Gleichung (10), die sich auf das Gleichgewicht des elastischen Körpers bezieht, kann man durch ein bekanntes Prinzip der Mechanik leicht übergehen auf den Fall der Bewegung desselben; ist t die Zeit und T die lebendige Kraft, so gilt für die Bewegung die Gleichung:

$$(11) \qquad \int dt \left\{ \delta T + \delta \Omega - \delta \Sigma \int F dx\, dy\, dz \right\} = 0.$$

§ 2.

Es sollen jetzt die Gleichungen (10) und (11) auf einen unendlich dünnen Stab von überall gleichem Querschnitte, auf dessen Mantelfläche keine äusseren Kräfte wirken, angewandt werden.

Zunächst möge vorausgesetzt werden, dass der Stab in seinem natürlichen Zustande cylindrisch ist. Bei diesem Zustande denke man sich in dem Stabe ein rechtwinkliges Axensystem; die erste Axe soll die Linie sein, in der die Schwerpunkte der Querschnitte liegen, die beiden andern sollen parallel den Hauptaxen eines Querschnitts sein, die durch den Schwerpunkt desselben gehen. Auf der ersten Axe wähle man einen Punkt P und fasse drei Linienelemente ins Auge, welche von P aus in den Richtungen der drei Axen gezogen sind; ich nenne sie 0, 1, 2; dabei soll 0 dasjenige sein, welches die Richtung der Länge der Cylinders hat. Diese drei Linienelemente werden, wenn der Stab eine Aenderung der Gestalt erlitten hat, im Allgemeinen nicht mehr senkrecht aufeinander stehen, sondern Winkel bilden, die von rechten um Grössen abweichen, die von der Ordnung der Dilatationen sind, die stattgefunden haben. Es soll die Lage der Punkte des Stabes in der Nähe von P

auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen werden, dessen Anfangspunkt P ist, dessen x-Axe die Richtung des Linienelementes 0 hat, und dessen z-Axe senkrecht auf dem Linienelemente 1 steht. In Bezug auf dieses Coordinatensystem seien die Coordinaten eines Punktes des Stabes:

$x + u$, $y + v$, $z + w$, wenn der Stab seine veränderte Form und Lage hat, und

x, y, z wenn der Stab in seinem ursprünglichen Zustande und in der Lage sich befindet, bei der die Linienelemente 0, 1, 2 in die Axen der x, y, z fallen.

Setzt man noch fest, dass x nur Werthe erhalten soll, die von der Ordnung der Querdimensionen des Stabes sind, so haben dann die Zeichen x, y, z, u, v, w dieselbe Bedeutung, die ihnen bei der Ableitung der Gleichung (10) untergelegt ist. Es seien weiter ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes P nach der Formänderung des Stabes in Beziehung auf ein anderes, beliebig im Raume gewähltes, rechtwinkliges Coordinatensystem; ich bezeichne durch

$$\begin{matrix} \alpha_0, & \beta_0, & \gamma_0, \\ \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \end{matrix}$$

die Cosinus der Winkel, welche die Axen der x, y, z bilden mit den Axen der ξ, η, ζ, so dass der Index 0 auf die x-Axe, der Index 1 auf die y-Axe, der Index 2 auf die z-Axe sich bezieht. Es soll angenommen werden, dass die beiden in Rede stehenden Coordinatensysteme die Eigenschaft haben, dass durch Drehung des einen die x-Axe der ξ-Axe, die y-Axe der η-Axe, die z-Axe der ζ-Axe parallel gemacht werden kann.

Mit Hülfe der eingeführten Zeichen lassen sich die Coordinaten in Beziehung auf die Axen der ξ, η, ζ des Punktes ausdrücken, dessen Coordinaten in Beziehung auf die Axen der x, y, z sind: $x + u$, $y + v$, $z + w$; es sind die genannten Coordinaten

$$(12) \quad \begin{cases} \xi + \alpha_0 (x + u) + \alpha_1 (y + v) + \alpha_2 (z + w), \\ \eta + \beta_0 (x + u) + \beta_1 (y + v) + \beta_2 (z + w), \\ \zeta + \gamma_0 (x + u) + \gamma_1 (y + v) + \gamma_2 (z + w). \end{cases}$$

Bedeutet s die Entfernung des Punktes P von dem Anfangs-

des Stabes in dem ursprünglichen Zustande desselben, so müssen diese drei Grössen Funktionen von $s + x$ sein, d. h. ihre partiellen Differentialquotienten nach x sind gleich ihren partiellen Differentialquotienten nach s. Erwägt man, dass ξ, η, ζ und die Grössen α, β, γ nicht x enthalten, so folgt hieraus:

$$\alpha_0\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\alpha_1\frac{\partial v}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{d\xi}{ds}+\frac{d\alpha_0}{ds}(x+u)$$
$$+\frac{d\alpha_1}{as}(y+v)+\frac{d\alpha_2}{ds}(z+w)+\alpha_0\frac{\partial u}{\partial s}+\alpha_1\frac{\partial v}{\partial s}+\alpha_2\frac{\partial w}{\partial s},$$
$$\beta_0\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\beta_1\frac{\partial v}{\partial x}+\beta_2\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{d\eta}{ds}+\frac{d\beta_0}{ds}(x+u)$$
$$+\frac{d\beta_1}{ds}(y+v)+\frac{d\beta_2}{ds}(z+w)+\beta_0\frac{\partial u}{\partial s}+\beta_1\frac{\partial v}{\partial s}+\beta_2\frac{\partial w}{\partial s},$$
$$\gamma_0\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\gamma_1\frac{\partial v}{\partial x}+\gamma_2\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{d\zeta}{ds}+\frac{d\gamma_0}{ds}(x+u)$$
$$+\frac{d\gamma_1}{ds}(y+v)+\frac{d\gamma_2}{ds}(z+w)+\gamma_0\frac{\partial u}{\partial s}+\gamma_1\frac{\partial v}{\partial s}+\gamma_2\frac{\partial w}{\partial s}.$$

Diese Gleichungen sollen einmal mit α_0, β_0, γ_0, dann mit α_1, β_1, γ_1, endlich mit α_2, β_2, γ_2 multiplicirt und jedesmal addirt werden. Setzt man:

$$(13)\quad \begin{cases} \varepsilon=\sqrt{\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2}-1, \\ \text{woraus folgt:} \\ \frac{d\xi}{ds}=\alpha_0(1+\varepsilon),\ \frac{d\eta}{ds}=\beta_0(1+\varepsilon),\ \frac{d\zeta}{ds}=\gamma_0(1+\varepsilon), \end{cases}$$

und setzt man weiter:

$$p=\alpha_1\frac{d\alpha_2}{ds}+\beta_1\frac{d\beta_2}{ds}+\gamma_1\frac{d\gamma_2}{ds},$$
$$q=\alpha_2\frac{d\alpha_0}{ds}+\beta_2\frac{d\beta_0}{ds}+\gamma_2\frac{d\gamma_0}{ds},$$
$$r=\alpha_0\frac{d\alpha_1}{ds}+\beta_0\frac{d\beta_1}{ds}+\gamma_0\frac{d\gamma_1}{ds},$$

so findet man auf die angegebene Weise bei Rücksicht auf die bekannten Relationen zwischen den Grössen α, β, γ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial s}+r(y+v)-q(z+w)+\varepsilon,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial s}+p(z+w)-r(x+u),$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial s} + q(x+u) - p(y+v).$$

Aus Betrachtungen, die im § 1 angestellt sind, geht aber hervor, dass u, v, w unendlich klein gegen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ sind; vorausgesetzt, dass $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial v}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$ nicht unendlich gross sind gegen u, v, w, sind also jene Differentialquotienten nach s unendlich klein gegen die nach x; bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung hat man daher:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ry - qz + \varepsilon,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = pz - rx,$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} = qx - py.$$

Durch Integration findet man hieraus:

$$(14)\quad \begin{cases} u = u_0 + (ry - qz + \varepsilon)x, \\ v = v_0 + pzx - \frac{r}{2}x^2, \\ w = w_0 + \frac{q}{2}x^2 - pxy, \end{cases}$$

wo u_0, v_0, w_0 von x unabhängige Grössen bezeichnen.

Bildet man mit Hülfe dieser Ausdrücke von u, v, w die Werthe von x_x, y_x, ..., so ergiebt sich:

$$(15)\quad \begin{cases} x_x = ry - qz + \varepsilon, & y_z = \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ y_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} & z_x = \frac{\partial u_0}{\partial z} - py, \\ z_z = \frac{\partial w_0}{\partial z}, & x_y = \frac{\partial u_0}{\partial y} + pz. \end{cases}$$

Alle diese Werthe sind von x unabhängig; in Folge dessen nehmen die Gleichungen (8), die für die Gleichungen (1) gesetzt werden dürfen, die folgende Form an:

$$(16)\quad \begin{cases} \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Versteht man unter $g = 0$ die Gleichung des Umfanges des Querschnitts des Stabes, berücksichtigt, dass g unabhängig von x ist, und dass für die Mantelfläche des Stabes (X), (Y), $(Z) = 0$ sind, so geben die Gleichungen (2) für $g = 0$:

$$(17) \qquad \begin{cases} X_y \frac{\partial g}{\partial y} + X_z \frac{\partial g}{\partial z} = 0, \\ Y_y \frac{\partial g}{\partial y} + Y_z \frac{\partial g}{\partial z} = 0, \\ Z_y \frac{\partial g}{\partial y} + Z_z \frac{\partial g}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (3) endlich sagen aus, dass für $y = 0$, $z = 0$:

$$(18) \qquad u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0$$

ist.

Substituirt man in den Gleichungen (16) und (17) für X_y, X_z, ... ihre Ausdrücke durch x_x, x_y, ... und für diese Grössen die in (15) angegebenen Werthe, so bestimmen die Gleichungen (16), (17), (18) die Grössen u_0, v_0, w_0 eindeutig, und zwar als lineare homogene Funktionen von p, q, r, ε. Dass u_0, v_0, w_0 durch die genannten Gleichungen eindeutig bestimmt sind, folgt daraus, dass, wenn man $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$, $\varepsilon = 0$ setzt, die Gleichungen (16), (17), (18) nicht anders erfüllt werden können, als wenn $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, $w_0 = 0$ ist. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergiebt sich durch ganz ähnliche Betrachtungen, wie sie oben p. 292 u. 293 angestellt sind. Substituirt man die Werthe von u_0, v_0, w_0, die sich aus (16), (17), (18) ergeben, in die Gleichungen (14), so findet man auch u, v, w als lineare homogene Funktionen von p, q, r, ε; die Coefficienten derselben sind unabhängig von s; wenn daher $\frac{dp}{ds}$, $\frac{dq}{ds}$, $\frac{dr}{ds}$, $\frac{d\varepsilon}{ds}$ nicht unendlich gross sind gegen p, q, r, ε respective, so werden die Gleichungen (14) die über $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial v}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$ gemachte Voraussetzung erfüllen. Substituirt man die Werthe von u_0, v_0, w_0 in die Gleichungen (15), so ergeben sich auch x_x, x_y, ... als lineare homogene Funktionen von p, q, r, ε, und setzt man diese in den Ausdruck von F ein, so erhält man für F eine homogene Funktion zweiten Grades derselben vier Grössen. Diese Funk-

tion ist unabhängig von x, da x_x, x_y, ... von x unabhängig sind. Setzt man

$$\int F dy\, dz = f,$$

wo die Integration über den Querschnitt des Stabes ausgedehnt gedacht ist, so ist f eine homogene Funktion zweiten Grades von p, q, r, ε, deren Coefficienten allein von den Constanten des Querschnitts und der Elasticität des Stabes abhängen. Durch Einführung dieser Grösse f werden die Gleichungen (10. und (11):

$$\delta\Omega - \delta\int f\, ds = 0 \tag{19}$$

und

$$\int dt \left\{ \delta T + \delta\Omega - \delta\int f\, ds \right\} = 0. \tag{20}$$

Die Bestimmung der Coefficienten der Function f erfordert nach den angestellten Betrachtungen im Allgemeinen die Lösung dreier simultanen partiellen Differentialgleichungen. Diese Bestimmung wird bedeutend erleichtert, wenn man annimmt, dass die Axe des cylindrischen Stabes einer Elasticitätsaxe parallel ist. In diesem Falle sind die Ausdrücke von X_x, X_y, ... durch x_x, x_y, ... die folgenden:[1])

$$\begin{aligned}
X_x &= A_{00}x_x + A_{01}y_y + A_{02}z_z + A_{03}y_z,\\
Y_y &= A_{10}x_x + A_{11}y_y + A_{12}z_z + A_{13}y_z,\\
Z_z &= A_{20}x_x + A_{21}y_y + A_{22}z_z + A_{23}y_z,\\
Y_z &= A_{30}x_x + A_{31}y_y + A_{32}z_z + A_{33}y_z,\\
Z_x &= A_{44}z_x + A_{45}x_y,\\
X_y &= A_{54}z_x + A_{55}x_y,
\end{aligned}$$

wo

$$A_{01} = A_{10},\ A_{02} = A_{20},\ \ldots.$$

Die erste der Gleichungen (16) wird hiernach bei Rücksicht auf die Gleichungen (15):

$$A_{44}\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + 2A_{45}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y\,\partial z} + A_{55}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0, \tag{21}$$

und die erste der Gleichungen (17):

[1]) Berl. Ber. „über die Fortschritte der Physik in den Jahren 1850 und 1851", p. 245.

$$(22)\quad \left(A_{44}\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}-py\right)+A_{45}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+pz\right)\right)\frac{\partial g}{\partial z}$$
$$+\left(A_{54}\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}-py\right)+A_{55}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+pz\right)\right)\frac{\partial g}{\partial y}=0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen und der ersten der Gleichungen (18) ist u_0 zu bestimmen. Die übrigen der Gleichungen (16), (17), (18) dienen zur Bestimmung von v_0 und w_0; man genügt ihnen, wie zuerst de Saint-Venant bei seinen Untersuchungen über die Torsion von Prismen bemerkt hat, indem man

$$(23)\qquad Y_y=0,\ Z_z=0,\ Y_z=0$$

setzt. Löst man nämlich diese Gleichungen nach y_y, z_z, y_z auf, so erhält man für diese 3 Grössen, wenn man für x_x seinen Werth aus (15) setzt, lineare Ausdrücke von y und z, also Ausdrücke, welche die Gleichung erfüllen:

$$\frac{\partial^2 y_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 z_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 y_z}{\partial y\,\partial z},$$

welche die Bedingung dafür ist, dass die beiden Grössen v_0 w_0 den drei Gleichungen

$$y_y=\frac{\partial v_0}{\partial y},\ z_z=\frac{\partial w_0}{\partial z},\ y_z=\frac{\partial w_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial z}$$

gemäss bestimmt werden können; die Integration dieser drei Gleichungen führt drei willkürliche Constanten ein, durch deren passende Wahl den drei letzten der Gleichungen (18) genügt werden kann.

Es soll jetzt noch der Werth von T in der Gleichung (20) entwickelt werden. Zu diesem Zwecke hat man die Ausdrücke (12) nach t zu differenziren und die Summe der Quadrate der Differentialquotienten zu bilden. Es ist

$$u=a_0p+a_1q+a_2r+a_3\varepsilon,$$

wo a_0, a_1, a_2, a_3 von t unabhängig sind, und wo, wenn die Dimensionen des Querschnitts des Stabes als unendlich kleine Grössen erster Ordnung bezeichnet werden, a_3 von der ersten Ordnung ist, a_0, a_1, a_2 von der zweiten Ordnung sind. Aehnliche Ausdrücke gelten für v und w. Dass die Ordnungen der Coefficienten a richtig angegeben sind, sieht man am leichtesten aus den Gleichungen (14). Aus dem Ausdrucke von u folgt

$$\frac{du}{dt} = a_0 \frac{dp}{dt} + a_1 \frac{dq}{dt} + a_2 \frac{dr}{dt} + a_3 \frac{ds}{dt};$$

ähnliche Gleichungen werden für $\frac{dv}{dt}$ und $\frac{dw}{dt}$ gelten. Aus dem Werthe von ε, der in (13) angegeben ist, kann man schliessen, dass $\frac{d\varepsilon}{dt}$ nicht unendlich gross ist gegen die drei Grössen $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, vorausgesetzt, dass die Differentialquotienten dieser Grössen nach s nicht unendlich gross gegen sie selbst sind; aus den Werthen von p, q, r folgt bei einer ähnlichen Voraussetzung, dass keine von den Grössen $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$ unendlich gross ist gegen die neun Grössen

$$\frac{d\alpha_0}{dt}, \frac{d\beta_0}{dt}, \frac{d\gamma_0}{dt}, \frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\beta_1}{dt}, \frac{d\gamma_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \frac{d\beta_2}{dt}, \frac{d\gamma_2}{dt}.$$

Daraus ergiebt sich, dass man bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung die Differentialquotienten der Ausdrücke (12) zunächst schreiben kann:

$$\frac{d\xi}{dt} + x\frac{d\alpha_0}{dt} + y\frac{d\alpha_1}{dt} + z\frac{d\alpha_2}{dt},$$
$$\frac{d\eta}{dt} + x\frac{d\beta_0}{dt} + y\frac{d\beta_1}{dt} + z\frac{d\beta_2}{dt},$$
$$\frac{d\zeta}{dt} + x\frac{d\gamma_0}{dt} + y\frac{d\gamma_1}{dt} + z\frac{d\gamma_2}{dt}.$$

Aus den Gleichungen (13) folgt nun weiter, dass keine von den Grössen $\frac{d\alpha_0}{dt}$, $\frac{d\beta_0}{dt}$, $\frac{d\gamma_0}{dt}$ unendlich gross ist gegen die drei Grössen $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$; aus diesem Grunde können in den eben angegebenen Ausdrücken die mit x behafteten Glieder vernachlässigt werden; die Glieder, welche y und z enthalten, dürfen dagegen im Allgemeinen nicht fortgelassen werden, weil ihre Coefficienten unendlich gross gegen $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ sein können.

Bildet man mit Rücksicht hierauf die Summe der Quadrate der angegebenen Ausdrücke, multiplicirt dieselbe mit $dy\,dz$ und integrirt über den Querschnitt des Stabes, so erhält man, da nach den im Anfange dieses Paragraphen gemachten Festsetzungen

$$\int y\,dy\,dz = 0,\ \int z\,dy\,dz = 0,\ \int yz\,dy\,dz = 0$$

ist:

$$\left(\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right)\int dy\,dz$$
$$+\left(\left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\beta_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\gamma_1}{dt}\right)^2\right)\int y^2\,dy\,dz$$
$$+\left(\left(\frac{d\alpha_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\beta_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\gamma_2}{dt}\right)^2\right)\int z^2\,dy\,dz.$$

Man setze nun

$$\alpha_1\frac{d\alpha_2}{dt}+\beta_1\frac{d\beta_2}{dt}+\gamma_1\frac{d\gamma_2}{dt}=P,$$
$$\alpha_2\frac{d\alpha_0}{dt}+\beta_2\frac{d\beta_0}{dt}+\gamma_2\frac{d\gamma_0}{dt}=Q,$$
$$\alpha_1\frac{d\alpha_0}{dt}+\beta_1\frac{d\beta_0}{dt}+\gamma_1\frac{d\gamma_0}{dt}=-R;$$

dann ist:

$$\left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\beta_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\gamma_1}{dt}\right)^2=P^2+R^2,$$
$$\left(\frac{d\alpha_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\beta_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\gamma_2}{dt}\right)^2=P^2+Q^2.$$

Substituirt man diese Werthe in den letzten Ausdruck und berücksichtigt, dass von den Grössen P, Q, R nur die erste unendlich gross gegen $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ sein kann, so wird derselbe, wenn man der Kürze wegen

$$\int dy\,dz=\lambda,\ \int(y^2+z^2)\,dy\,dz=\mu$$

setzt:

$$\lambda\left(\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right)+\mu P^2.$$

Multiplizirt man diesen Ausdruck mit $\frac{1}{2}\varrho\,ds$, indem man unter ϱ die Dichtigkeit des Stabes versteht, und integrirt ihn über die Länge des Stabes, so erhält man den Werth von T, der in die Gleichung (20) zu setzen ist. Wirken auf den Stab keine äusseren Kräfte, so wird diese Gleichung:

$$(24)\quad 0=\delta\iint dt\,ds\left\{\tfrac{1}{2}\varrho\left[\lambda\left(\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right)+\mu P^2\right]-f\right\}.$$

Die Gleichungen (19), (20) und (24) sind unter der Voraus-

setzung abgeleitet, dass der Stab in seinem natürlichen Zustande cylindrisch ist; mit einer gewissen Modification gelten sie aber auch, wenn der Stab in seinem natürlichen Zustande nicht cylindrisch und beliebig gekrümmt ist, falls nur der Querschnitt überall derselbe ist. Unter dieser Bedingung wird der Stab durch passende, auf sein Inneres wirkende Kräfte cylindrisch gemacht werden können; dabei werden seine Theile unendlich kleine Dilatationen erleiden; bezieht man die Grössen x, y, z und u, v, w auf den Zustand, in dem der Stab sich dann befindet, statt auf seinen natürlichen Zustand, und bezeichnet durch u', v', w' die Werthe, die u, v, w annehmen, wenn man den Stab in seinen natürlichen Zustand und in eine beliebige Lage übergehen lässt, so werden die Gleichungen (10) und (11) richtig, wenn man in F statt u, v, w setzt: $u - u'$, $v - v'$, $w - w'$. Daher werden die Gleichungen (19), (20) und (24) auch jetzt gelten, wenn man in f für p, q, r, ε gesetzt hat: $p - p'$, $q - q'$, $r - r'$, $\varepsilon - \varepsilon'$, wo p', q', r', ε' die Werthe bedeuten, die p, q, r, ε annehmen, wenn man den Stab in seinen natürlichen Zustand und in eine beliebige Lage übergehen lässt. Es sind nämlich in diesem Falle $u - u'$, $v - v'$, $w - w'$ dieselben linearen Funktionen von $p - p'$, $q - q'$, $r - r'$, $\varepsilon - \varepsilon'$, wie in dem früheren u, v, w von p, q, r, ε. Um die Wahrheit dieser Behauptung einzusehen, muss man nur erwägen, dass die Gleichungen (14) auch hier gelten, dass auf demselben Wege, wie diese, sich die Gleichungen ableiten lassen, die aus (14) entstehen, wenn man den Zeichen u, v, w, u_0, v_0, w_0, p, q, r, ε einen Strich beifügt (in denen dann u'_0, v'_0, w'_0 die Werthe von u', v', w' für $x = 0$ bedeuten), und dass die Gleichungen (16), (17), (18) richtig sind, wenn man in ihnen u, v, w ersetzt hat durch $u - u'$, $v - v'$, $w - w'$.

§ 3.

Es soll jetzt die Gleichung (19) weiter entwickelt werden unter der Voraussetzung, dass auf den Stab keine anderen äusseren Kräfte wirken als solche, die in den Enden desselben ihre Angriffspunkte haben.

In dem Ausdrucke von f kommen nur vier gesuchte Funk-

tionen von s vor, nämlich p, q, r, ε; diese sind aber definirt durch die Differentialquotienten von ξ, η, ζ, α_0, β_0, γ_0, α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, zwischen denen gewisse Bedingungsgleichungen bestehen. Die 16 genannten unbekannten Funktionen von s will ich für den Augenblick durch y_1, y_2, ... bezeichnen und die Bedingungsgleichungen, die zwischen ihnen bestehen, durch $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, ... Setzt man

$$U = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots,$$

wo λ_1, λ_2, ... neue unbekannte Funktionen von s bedeuten, so ist die Gleichung (19) gleichbedeutend mit der folgenden:

$$0 = \delta\Omega - \delta \int U ds, \tag{25}$$

in welcher δy_1, δy_2, ... $\delta\lambda_1$, $\delta\lambda_2$, ... als unabhängig von einander zu betrachten sind. Da nach der gemachten Annahme $\delta\Omega$ nur von Variationen, die sich auf die Enden des Stabes beziehen, abhängen soll, so muss hiernach für jedes y

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{d}{ds} \frac{\partial U}{\partial \frac{dy}{ds}} \tag{26}$$

sein.

Ich stelle nun die Bedingungsgleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, ... zusammen und füge die Bezeichnungen der Faktoren λ_1, λ_2, ..., die ich einführen will, hinzu.

Bedingungsgleichungen.	Faktoren.
$\frac{d\xi}{ds} - \alpha_0(1+\varepsilon) = 0,$	$A,$
$\frac{d\eta}{ds} - \beta_0(1+\varepsilon) = 0,$	$B,$
$\frac{d\zeta}{ds} - \gamma_0(1+\varepsilon) = 0,$	$C.$
$\alpha_1 \frac{d\alpha_2}{ds} + \beta_1 \frac{d\beta_2}{ds} + \gamma_1 \frac{d\gamma_2}{ds} - p = 0,$	$M_0,$
$\alpha_2 \frac{d\alpha_0}{ds} + \beta_2 \frac{d\beta_0}{ds} + \gamma_2 \frac{d\gamma_0}{ds} - q = 0,$	$M_1,$
$\alpha_0 \frac{d\alpha_1}{ds} + \beta_0 \frac{d\beta_1}{ds} + \gamma_0 \frac{d\gamma_1}{ds} - r = 0,$	$M_2.$

Bedingungsgleichungen.	Faktoren
$\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 - 1 = 0,$	$\frac{1}{2}\lambda_{00},$
$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 - 1 = 0,$	$\frac{1}{2}\lambda_{11},$
$\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 - 1 = 0,$	$\frac{1}{2}\lambda_{22},$
$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0,$	$\lambda_{12},$
$\alpha_2\alpha_0 + \beta_2\beta_0 + \gamma_2\gamma_0 = 0,$	$\lambda_{20},$
$\alpha_0\alpha_1 + \beta_0\beta_1 + \gamma_0\gamma_1 = 0,$	$\lambda_{01}.$

Setzt man in der Gleichung (26) für y der Reihe nach: p, q, r, ε, ξ, η, ζ, α_0, β_0, γ_0, α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, so erhält man hiernach:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = M_0, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = M_1, \quad \frac{\partial f}{\partial r} = M_2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = A\alpha_0 + B\beta_0 + C\gamma_0,$$

$$\frac{dA}{ds} = 0, \quad \frac{dB}{ds} = 0, \quad \frac{dC}{ds} = 0,$$

$$\frac{d(\alpha_2 M_1)}{ds} = M_2\frac{d\alpha_1}{ds} + \lambda_{00}\alpha_0 + \lambda_{01}\alpha_1 + \lambda_{02}\alpha_2 - A(1+\varepsilon),$$

$$\frac{d(\beta_2 M_1)}{ds} = M_2\frac{d\beta_1}{ds} + \lambda_{00}\beta_0 + \lambda_{01}\beta_1 + \lambda_{02}\beta_2 - B(1+\varepsilon),$$

$$\frac{d(\gamma_2 M_1)}{ds} = M_2\frac{d\gamma_1}{ds} + \lambda_{00}\gamma_0 + \lambda_{01}\gamma_1 + \lambda_{02}\gamma_2 - C(1+\varepsilon),$$

$$\frac{d(\alpha_0 M_2)}{ds} = M_0\frac{d\alpha_2}{ds} + \lambda_{10}\alpha_0 + \lambda_{11}\alpha_1 + \lambda_{12}\alpha_2,$$

$$\frac{d(\beta_0 M_2)}{ds} = M_0\frac{d\beta_2}{ds} + \lambda_{10}\beta_0 + \lambda_{11}\beta_1 + \lambda_{12}\beta_2,$$

$$\frac{d(\gamma_0 M_2)}{ds} = M_0\frac{d\gamma_2}{ds} + \lambda_{10}\gamma_0 + \lambda_{11}\gamma_1 + \lambda_{12}\gamma_2,$$

$$\frac{d(\alpha_1 M_0)}{ds} = M_1\frac{d\alpha_0}{ds} + \lambda_{20}\alpha_0 + \lambda_{21}\alpha_1 + \lambda_{22}\alpha_2,$$

$$\frac{d(\beta_1 M_0)}{ds} = M_1\frac{d\beta_0}{ds} + \lambda_{20}\beta_0 + \lambda_{21}\beta_1 + \lambda_{22}\beta_2,$$

$$\frac{d(\gamma_1 M_0)}{ds} = M_1\frac{d\gamma_0}{ds} + \lambda_{20}\gamma_0 + \lambda_{21}\gamma_1 + \lambda_{22}\gamma_2,$$

wo

$$\lambda_{21} = \lambda_{12}, \quad \lambda_{02} = \lambda_{20}, \quad \lambda_{10} = \lambda_{01}.$$

Aus den drei letzten Gruppen dieser Gleichungen zu je dreien findet man durch Multiplication mit α_0, β_0, γ_0, mit α_1, β_1, γ_1, mit α_2, β_2, γ_2 und Addition die folgenden:

$$
\begin{aligned}
-M_1 q &= \lambda_{00} + M_2 r - (1+\varepsilon)(A\alpha_0 + B\beta_0 + C\gamma_0),\\
M_1 p &= \lambda_{01} \qquad\quad - (1+\varepsilon)(A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1),\\
\frac{dM_1}{ds} &= \lambda_{02} - M_2 p - (1+\varepsilon)(A\alpha_2 + B\beta_2 + C\gamma_2),\\
\frac{dM_2}{ds} &= \lambda_{10} - M_0 q,\\
-M_2 r &= \lambda_{11} + M_0 p,\\
M_2 q &= \lambda_{12},\\
M_0 r &= \lambda_{20},\\
\frac{dM_0}{ds} &= \lambda_{21} - M_1 r,\\
-M_0 p &= \lambda_{22} + M_1 q.
\end{aligned}
$$

Da nun $\lambda_{21} = \lambda_{12}$, $\lambda_{02} = \lambda_{20}$, $\lambda_{10} = \lambda_{01}$ ist, so ergiebt sich hieraus, wenn man benutzt, dass ε unendlich klein ist:

$$
(27)\qquad \begin{cases} \frac{dM_0}{ds} = M_2 q - M_1 r,\\ \frac{dM_1}{ds} = M_0 r - M_2 p - (A\alpha_2 + B\beta_2 + C\gamma_2),\\ \frac{dM_2}{ds} = M_1 p - M_0 q + A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1. \end{cases}
$$

Die Grössen M_0, M_1, M_2, A, B, C, die in diesen Gleichungen vorkommen, haben eine einfache Bedeutung, die ich ableiten will.

Es soll der Anfang des Stabes als befestigt angenommen und die Gleichung (25) auf den Theil des Stabes von seinem Anfange bis zu einem, durch einen gewissen Werth von s bestimmten Querschnitt angewendet werden; es ist das erlaubt, wenn man unter $\delta\Omega$ das Moment der elastischen Kräfte versteht, welche auf diesen Querschnitt von den Theilen des Stabes, denen grössere Werthe von s entsprechen, ausgeübt werden. Die Gleichung (25) wird dann:

$$0 = \delta\Omega - \sum \frac{\partial U}{\partial \frac{dy}{ds}} \delta y,$$

oder entwickelt:

$$
\begin{aligned}
\delta\Omega = {} & A\delta\xi + B\delta\eta + C\delta\zeta\\
& + M_0(\alpha_1\delta\alpha_2 + \beta_1\delta\beta_2 + \gamma_1\delta\gamma_2)\\
& + M_1(\alpha_2\delta\alpha_0 + \beta_2\delta\beta_0 + \gamma_2\delta\gamma_0)\\
& + M_2(\alpha_0\delta\alpha_1 + \beta_0\delta\beta_1 + \gamma_0\delta\gamma_1).
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt, dass A, B, C die Summen der Componenten

nach den ξ-, η-, ζ-Axen der elastischen Kräfte sind, die auf den durch den angenommenen Werth von s bestimmten Querschnitt von denjenigen Theilen des Stabes, denen grössere Werthe von s entsprechen, ausgeübt werden, und dass M_0, M_1, M_2 die Drehungsmomente derselben Kräfte in Bezug auf die x-, y-, z-Axen sind. Der Sinn, in welchem diese Drehungsmomente als positiv gerechnet sind, lässt sich folgendermassen angeben:

Setzt man die Reihenfolge der Axen fest, dass auf die x-Axe die y-Axe, auf diese die z-Axe und auf diese wieder die x-Axe folgt, so ist das Drehungsmoment in Bezug auf eine der Axen positiv, wenn es — diese Axe als die erste gerechnet — die Punkte der dritten Axe nach der Richtung der zweiten zu bewegen sucht.

Es möge bemerkt werden, dass aus dieser Bedeutung von A, B, C, M_0, M_1, M_2 die Gleichungen, welche aussprechen, dass A, B, C von s unabhängig sind, und die Gleichungen (27) sich leicht herleiten lassen, indem man die sechs Gleichgewichtsbedingungen eines starren Körpers anwendet auf ein durch zwei beliebige Querschnitte begrenztes Stück des Stabes. Setzt man nämlich:

$$\begin{aligned} M_\xi &= M_0\alpha_0 + M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2, \\ M_\eta &= M_0\beta_0 + M_1\beta_1 + M_2\beta_2, \\ M_\zeta &= M_0\gamma_0 + M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2, \end{aligned}$$

so geben diese Bedingungen:

$$A = \text{const.}, \qquad B = \text{const.}, \qquad C = \text{const.},$$

$$\begin{aligned} M_\xi + (B\zeta - C\eta) &= \text{const.}, \\ M_\eta + (C\xi - A\zeta) &= \text{const.}, \\ M_\zeta + (A\eta - B\xi) &= \text{const.} \end{aligned}$$

Differenzirt man die drei letzten Gleichungen, multiplizirt sie darauf einmal mit α_0, β_0, γ_0, dann mit α_1, β_1, γ_1, endlich mit α_2, β_2, γ_2 und addirt sie jedesmal, so erhält man die Gleichungen (27).

In diesen Gleichungen hat man nun zu setzen:

$$M_0 = \frac{\partial f}{\partial p} = a_{00}(p - p') + a_{01}(q - q') + a_{02}(r - r') + a_{03}(\varepsilon - \varepsilon'),$$

$$M_1 = \frac{\partial f}{\partial q} = a_{10}(p-p') + a_{11}(q-q') + a_{12}(r-r') + a_{13}(\varepsilon-\varepsilon'),$$

$$M_2 = \frac{\partial f}{\partial r} = a_{20}(p-p') + a_{21}(q-q') + a_{22}(r-r') + a_{23}(\varepsilon-\varepsilon');$$

dabei hat man, wenn man der Kürze wegen

$$A\alpha_0 + B\beta_0 + C\gamma_0 = S$$

setzt:

$$S = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = a_{30}(p-p') + a_{31}(q-q') + a_{32}(r-r') + a_{33}(\varepsilon-\varepsilon').$$

Die Grössen a sind hier von den Constanten des Querschnitts und der Elasticität des Stabes abhängig, und zwischen ihnen bestehen die Relationen $a_{01} = a_{10}$, $a_{02} = a_{20}$, ... Die Grössen a sind nicht alle von derselben Ordnung. Da $\varepsilon - \varepsilon'$ eine Zahl ist, und $p-p'$, $q-q'$, $r-r'$ reciproke Längen sind, so müssen die Grössen a, welche einmal den Index 3 haben, eine Dimension weniger enthalten als diejenigen Grössen a, bei welchen der Index 3 nicht vorkommt, und eine Dimension mehr als a_{33}; die Längen, welche in den Ausdrücken der Grössen a vorkommen, sind aber von der Ordnung der Dimensionen des Querschnitts des Stabes, also unendlich klein; es müssen daher a_{03}, a_{13}, a_{23} unendlich klein gegen a_{33} und unendlich gross gegen die anderen Grössen a sein; aus diesem Grunde dürfen die mit $\varepsilon - \varepsilon'$ behafteten Glieder in den eben angegebenen Gleichungen nicht vernachlässigt werden, wenn auch $p-p'$, $q-q'$, $r-r'$ endlich sind. Aus der letzten dieser Gleichungen folgt:

$$\varepsilon - \varepsilon' = -\frac{a_{30}(p-p') + a_{31}(q-q') + a_{32}(r-r') - S}{a_{33}};$$

diesen Werth denke man sich in die Ausdrücke von M_0, M_1, M_2 substituirt; die Terme derselben, die S enthalten, werden dann wegen der eben angeführten Verhältnisse zwischen den Grössen a unendlich klein gegen M_0, M_1, M_2, falls S nicht unendlich gross gegen M_0, M_1, M_2 ist. Wird dieser Fall ausgeschlossen, so hat man daher:

$$(28)\quad \begin{cases} M_0 = b_{00}(p-p') + b_{01}(q-q') + b_{02}(r-r'), \\ M_1 = b_{10}(p-p') + b_{11}(q-q') + b_{12}(r-r'), \\ M_2 = b_{20}(p-p') + b_{21}(q-q') + b_{22}(r-r'), \end{cases}$$

wo die Grösssen b sich in einfacher Weise ausdrücken lassen durch die Grössen a, und wo $b_{01} = b_{10}$, $b_{12} = b_{21}$, $b_{20} = b_{02}$.

Die Bedingung, unter der diese Gleichungen gelten, die Bedingung nämlich, dass S nicht unendlich gross ist gegen M_0, M_1, M_2, wird erfüllt, wenn bei der betrachteten Gleichgewichtsfigur des Stabes die Axe desselben endlich gekrümmt ist, einerlei, ob im natürlichen Zustande diese Axe gerade oder krumm ist. Aus den Gleichungen (27) folgt nämlich, dass die Ausdrücke $A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1$ und $A\alpha_2 + B\beta_2 + C\gamma_2$ von derselben Ordnung sind wie M_0, M_1, M_2; dieselben Ausdrücke müssen also unendlich klein gegen S sein, wenn S unendlich gross gegen M_0, M_1, M_2 sein soll; ist jenes der Fall, so müssen aber die Verhältnisse $A:B:C$ unendlich wenig abweichen von den Verhältnissen $\alpha_0:\beta_0:\gamma_0$; d. h. die Richtung der Tangente der Axe des Stabes muss überall unendlich wenig abweichen von der Richtung der Resultante der constanten Kräfte A, B, C.

Es soll nun angenommen werden, dass der Stab in seinem natürlichen Zustande cylindrisch ist, d. h. dass $p' = 0$, $q' = 0$, $r' = 0$ ist. Substituirt man die Werthe, die dann M_0, M_1, M_2 in Folge der Gleichungen (28) erhalten, in die Gleichungen (27), so gelangt man zu Differentialgleichungen, welche identisch mit denjenigen sind, auf welche die Untersuchung der Rotation eines schweren Körpers um einen festen Punkt führt, wenn man den hier gebrauchten Zeichen die folgende Bedeutung in Beziehung auf den rotirenden Körper giebt:

Die Axen der ξ, η, ζ sind die Axen eines im Raume festen Coordinatensystems; die Axen der x, y, z sind die Axen eines im Körper festen Coordinatensystems zur Zeit s; der Anfangspunkt des letzteren ist der Drehungspunkt, seine x-Axe geht durch den Schwerpunkt; A, B, C sind die negativen Componenten des Gewichtes des Körpers nach den ξ-, η-, ζ-Axen, multiplicirt mit der x-Coordinate des Schwerpunktes; endlich ist, wenn m die Masse eines Raumelementes des Körpers bedeutet, das die Coordinaten x, y, z hat:

$$b_{00} = \Sigma m(y^2 + z^2), \qquad b_{12} = -\Sigma m y z,$$
$$b_{11} = \Sigma m(z^2 + x^2), \qquad b_{20} = -\Sigma m z x,$$
$$b_{22} = \Sigma m(x^2 + y^2), \qquad b_{01} = -\Sigma m x y.$$

Die Bestimmung der Gestalt des elastischen Stabes erfordert, wenn das entsprechende Problem der Rotation gelöst ist, noch die Ausführung dreier Quadraturen; man erhält nämlich die laufenden Coordinaten eines Punktes der Axe des Stabes aus den Gleichungen:

$$\xi = \int \alpha_0 \, ds, \qquad \eta = \int \beta_0 \, ds, \qquad \zeta = \int \gamma_0 \, ds.$$

§. 4.

Ich will schliesslich die entwickelte Theorie auf einen einfachen Fall anwenden, in dem der Stab in seinem natürlichen Zustande nicht gerade ist; der Stab sei ein Draht von kreisförmigem Querschnitt und nach allen Richtungen gleicher Elasticität, dessen Axe im natürlichen Zustande eine Schraubenlinie bildet.

Bei einem Körper, dessen Elasticität in allen Richtungen dieselbe ist, bestehen die Gleichungen[1]):

$$\begin{aligned} X_x &= 2K\{(1+\theta)x_x + \theta y_y + \theta z_z\}, \\ Y_y &= 2K\{\theta x_x + (1+\theta)y_y + \theta z_z\}, \\ Z_z &= 2K\{\theta x_x + \theta y_y + (1+\theta)z_z\}, \\ Y_z &= Ky_z, \qquad Z_x = Kz_x, \qquad X_y = Kx_y. \end{aligned}$$

Daraus folgt für den Fall, dass x, y, z, u, v, w sich auf den natürlichen Zustand des Körpers beziehen:

$$F = K\{x^2_x + y^2_y + z^2_z + \tfrac{1}{2}y^2_z + \tfrac{1}{2}z^2_x + \tfrac{1}{2}x^2_y + \theta(x_x + y_y + z_z)^2\}. \tag{29}$$

Die Gleichungen (23) geben:

$$y_y = z_z = -\frac{\theta}{1+2\theta}x_x, \qquad y_z = 0.$$

---

1) In diesen Gleichungen haben die Grössen K und θ dieselbe Bedeutung, wie in meiner Abhandlung „über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe". Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, dass die Theorie des Gleichgewichts und der Bewegung einer unendlich dünnen elastischen Scheibe sich strenger, als es dort geschehen ist, entwickeln lässt auf einem Wege, der ähnlich demjenigen ist, den ich in dieser Abhandlung für einen Stab eingeschlagen habe, und dass auf diesem Wege auch der Fall behandelt werden kann, in dem die Scheibe in verschiedenen Richtungen verschiedene Elasticität hat.

Die Gleichungen (21) und (22) werden:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = 0$$

und für $q = 0$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} - py\right)\frac{\partial q}{\partial z} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + pz\right)\frac{\partial q}{\partial y} = 0.$$

Da der Querschnitt des Drahtes ein Kreis sein soll, so ist $q = y^2 + z^2 - \text{const.}$ Aus diesen beiden Gleichungen in Verbindung mit der ersten der Gleichungen (18) folgt daher $u_0 = 0$. Die Gleichungen (15) geben demnach:

$$x_x = ry - qz + \varepsilon, \qquad z_x = -py, \qquad x_y = pz.$$

Es wird also;

$$F = K\left\{\frac{1}{2}\frac{+3\theta}{+2\theta}(ry - qz + \varepsilon)^2 + \frac{1}{2}p^2(y^2 + z^2)\right\}.$$

Bildet man nun

$$f = \int F\,dy\,dz,$$

benutzt dabei, dass

$$\int y\,dy\,dz = 0, \qquad \int z\,dy\,dz = 0, \qquad \int yz\,dy\,dz = 0,$$

und setzt, gemäss der schon früher gebrauchten Bezeichnung.

$$\int dy\,dz = \lambda, \qquad \int y^2\,dy\,dz = \int z^2\,dy\,dz = \frac{\mu}{2},$$

so findet man:

$$f = K\left\{\frac{\mu}{2}p^2 + \frac{1+3\theta}{1+2\theta}\frac{\mu}{2}(q^2 + r^2) + \frac{1+3\theta}{1+2\theta}\lambda\varepsilon^2\right\}.$$

Von den Grössen $a_{00}, a_{01}, \ldots$ sind daher alle mit ungleichen Indices versehenen gleich Null, und es ist:

$$a_{00} = K\nu, \qquad a_{11} = a_{22} = \frac{1+3\theta}{1+2\theta}K\mu, \qquad a_{33} = 2\frac{1+3\theta}{1+2\theta}K\lambda.$$

Von den durch die Gleichungen (28) eingeführten Grössen b_{00}, $b_{01}, \ldots$ sind gleichfalls diejenigen, welche ungleiche Indices haben, gleich Null, und es ist:

$$b_{00} = K\mu, \qquad b_{11} = b_{22} = \frac{1+3\theta}{1+2\theta}K\mu.$$

Der Kürze wegen soll gesetzt werden:

$$b_{00} = L, \qquad b_{11} = b_{22} = N.$$

Ich bezeichne durch ξ', η', ζ, α'_0, β'_0, γ'_0, α'_1, β'_1, γ'_1, α'_2, β'_2, γ'_2 die Werthe, die ξ, η, ζ, α_0, β_0, γ_0, α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 annehmen, wenn der Draht in seine natürliche Gestalt und in eine gewisse Lage gebracht wird; diese Lage lässt sich so wählen, dass

$$\xi' = s \cdot \cos \vartheta',$$

$$\eta' = \frac{1}{n'} \sin \vartheta' \cdot \sin n's,$$

$$\zeta' = -\frac{1}{n'} \sin \vartheta' \cdot \cos n's$$

ist, wo ϑ' und n' Constanten sind; dabei bedeutet ϑ' den Winkel, den eine Tangente der Schraubenlinie mit der Axe derselben bildet, und $\frac{\sin \vartheta'}{n'}$ ist der Radius der Cylinderfläche, auf der die Schraubenlinie liegt. Aus diesen Werthen von ξ', η', ζ' ergeben sich die folgenden Werthe von α'_0, β'_0, γ'_0:

$$\alpha'_0 = \cos \vartheta',$$
$$\beta'_0 = \sin \vartheta' \cdot \cos n's,$$
$$\gamma'_0 = \sin \vartheta' \cdot \sin n's.$$

Wäre der Querschnitt des Drahtes kein Kreis, so würden durch die natürliche Gestalt desselben auch die Werthe von α'_1, β'_1, γ'_1, α'_2, β'_2, γ'_2 bis auf einige Vorzeichen bestimmt sein; da aber der Querschnitt als kreisförmig vorausgesetzt ist, so bleibt eine dieser Grössen willkürlich und kann gleich einer willkürlichen Function von s angenommen werden; ich setze:

$$\alpha'_1 = \sin \vartheta' \cdot \cos l's,$$

indem ich unter l' eine willkürliche Constante verstehe[1]). Es ergiebt sich dann aus den Relationen zwischen den Grössen α', β', γ', wenn man über das unbestimmt bleibende Vorzeichen von α'_2 nach Willkür verfügt,

---

1) Es lässt sich die Rechnung etwas abkürzen, indem man $l' = 0$ setzt; doch ziehe ich es vor diese Constante unbestimmt zu lassen.

$$\begin{aligned}
\beta'_1 &= -\cos\vartheta' \cdot \cos n's \cdot \cos l's - \sin n's \cdot \sin l's,\\
\gamma'_1 &= -\cos\vartheta' \cdot \sin n's \cdot \cos l's + \cos n's \cdot \sin l's,\\
\alpha'_2 &= \sin\vartheta' \cdot \sin l's,\\
\beta'_2 &= -\cos\vartheta' \cdot \cos n's \cdot \sin l's + \sin n's \cdot \cos l's,\\
\gamma'_2 &= -\cos\vartheta' \cdot \sin n's \cdot \sin l's - \cos n's \cdot \cos l's.
\end{aligned}$$

Hieraus findet man weiter:

$$\begin{aligned}
p' &= l' - n'\cos\vartheta',\\
q' &= -n'\sin\vartheta' \cdot \cos l's,\\
r' &= -n'\sin\vartheta' \cdot \sin l's.
\end{aligned}$$

Nun setze man ξ, η, ζ, α_0, β_0, γ_0, α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 gleich den Ausdrücken, die aus den Ausdrücken von ξ', η', ζ', ... entstehen, wenn man in diesen die Constanten ϑ', n', l' ersetzt durch neue Constanten ϑ, n, l. Allen Differentialgleichungen des Problems mit Ausnahme der Gleichungen (27) wird dann genügt, welches auch die Werthe von ϑ, n, l sein mögen; dadurch, dass man passende Beziehungen zwischen den Constanten ϑ, n, l, ϑ', n', l', A, B, C festsetzt, kann man auch diese erfüllen. Die Gleichungen (27) werden nämlich, wenn man die Gleichungen (28) und die oben entwickelten Werthe der Grössen b anwendet:

$$L\frac{d(p-p')}{ds} = N(rq' - qr'),$$

$$N\frac{d(q-q')}{ds} = L(p-p')r - N(r-r')p - (A\alpha_2 + B\beta_2 + C\gamma_2),$$

$$N\frac{d(r-r')}{ds} = N(q-q')p - L(p-p')q + A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1.$$

Denselben wird genügt, wenn man setzt:

$$l = l',$$

$$A = \frac{n}{\sin\vartheta}\Big\{ L(n\cos\vartheta - n'\cos\vartheta')\sin\vartheta - N(n\sin\vartheta - n'\sin\vartheta')\cos\vartheta \Big\},$$

$$B = 0, \qquad C = 0.$$

Die beiden letzten dieser Gleichungen sprechen eine von den Bedingungen aus, unter denen die für ξ, η, ζ, ... angenommenen Ausdrücke gelten; sie sagen aus, dass die auf das Ende

des Drahtes wirkende Kraft die Richtung der Axe der Schraubenlinie haben muss. Zu dieser Bedingung tritt noch eine andere hinzu, die sich auf die Drehungsmomente bezieht, die auf das Ende des Drahtes ausgeübt werden. Die Gleichungen (28) geben:

$$M_0 = -L(n\cos\vartheta - n'\cos\vartheta'),$$
$$M_1 = -N(n\sin\vartheta - n'\sin\vartheta')\cos\tau s,$$
$$M_2 = -N(n\sin\vartheta - n'\sin\vartheta')\sin\tau s.$$

In diesen Gleichungen möge unter s der auf das Ende des Drahtes bezügliche Werth verstanden werden; bildet man:

$$M_\xi = M_0\alpha_0 + M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2,$$
$$M_\eta = M_0\beta_0 + M_1\beta_1 + M_2\beta_2,$$
$$M_\zeta = M_0\gamma_0 + M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2,$$

so sind dann M_ξ, M_η, M_ζ die Drehungsmomente, die von Aussen her auf das Ende des Drahtes wirken, in Bezug auf drei Axen, die durch das Ende den Axen der ξ, η, ζ parallel gelegt sind. Man findet:

$$M_\xi = -\{L(n\cos\vartheta - n'\cos\vartheta')\cos\vartheta + N(n\sin\vartheta - n'\sin\vartheta')\sin\vartheta\},$$
$$M_\eta = -\{L(n\cos\vartheta - n'\cos\vartheta')\sin\vartheta - N(n\sin\vartheta - n'\sin\vartheta')\cos\vartheta\}\cos ns,$$
$$M_\zeta = -\{L(n\cos\vartheta - n'\cos\vartheta')\sin\vartheta - N(n\sin\vartheta - n'\sin\vartheta')\cos\vartheta\}\sin ns.$$

Die beiden letzten dieser Gleichungen lassen sich schreiben:

$$M_\eta = A\zeta, \qquad M_\zeta = -A\eta,$$

wo η und ζ sich auf das Ende des Drahtes beziehn. Es folgt daraus, dass M_η und M_ζ gerade den Drehungsmomenten gleich sind, die die Kraft A hervorbringen würde, wenn sie ihren Angriffspunkt in einem mit dem Ende des Drahtes fest verbundenen Punkte der Axe der Schraubenlinie hätte.

Hiernach gelten die für ξ, η, ζ, ... angenommenen Ausdrücke, wenn die Formänderung des Drahtes hervorgebracht ist durch eine Kraft A, die auf einen mit dem Ende des Drahtes fest verbundenen Punkt der Axe der Schraubenlinie in der Richtung dieser Axe wirkt, und durch ein Drehungs-

moment M_ξ um dieselbe Axe. Sind A und M_ξ gegeben, so bestimmen die Gleichungen für A und M_ξ die beiden unbekannten Constanten n und ϑ, die in den Ausdrücken von ξ, η, ζ vorkommen. Sind diese gefunden, so hat man für die Verlängerung der Schraubenlinie den Ausdruck

$$s(\cos\vartheta - \cos\vartheta')$$

und für die Drehung ihres Endes um ihre Axe den Ausdruck

$$s(n - n'),$$

wo s wieder sich auf das Ende bezieht.

Um auf den Fall zu kommen, der in der Einleitung als der Gegenstand dieses Paragraphen bezeichnet wurde, hat man $M_\xi = 0$ zu setzen. Diesen Fall hat schon J. Thomson[1]) behandelt; aber die Betrachtungen, die er über denselben anstellt, sind nicht strenge, und das Resultat, zu dem er gelangt, ist nicht genau.

Ueber das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation bei Stäben von federhartem Stahl.[2])

Wenn ein homogener cylindrischer Stab, dessen Elasticität in verschiedenen Richtungen dieselbe ist, in der Richtung seiner Länge durch einen Zug ausgedehnt wird, so erleiden seine Querdimensionen eine Contraction. Nach theoretischen Betrachtungen von Poisson sollte das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation immer $\frac{1}{4}$ sein, Wertheim schloss aus seinen Versuchen, dass dasselbe $\frac{1}{3}$ ist; nach einer mehrfach ausgesprochenen Ansicht hat es weder den einen noch den anderen Werth und ist verschieden bei verschiedenen Substanzen. Bei den meisten Körpern, bei denen man eine gleiche Elasticität in verschiedenen Richtungen annehmen kann, stellt sich der experimentellen Bestimmung dieses Verhältnisses der Umstand hindernd in den Weg, dass bei ihnen, auch bei sehr

1) Mech. Mag. L, p. 160 und 207.
2) Pogg. Ann. Bd. 108. 1859.

kleinen Formänderungen, bleibende Dehnung und elastische Nachwirkung in erheblichem Grade sich zeigen. Es ist dieses der Fall bei ausgeglühten Metalldrähten und Glasstäben. Bei hart gezogenen Metalldrähten ist eine bleibende Dehnung und eine elastische Nachwirkung viel weniger bemerklich; aber bei ihnen ist sicher die Elasticität in verschiedenen Richtungen verschieden. Bei gehärteten Stahlstäben dagegen kann man wohl mit Wahrscheinlichkeit eine Gleichheit der Elasticität in verschiedenen Richtungen voraussetzen; und da diese überdiess mehr noch als hart gezogene Drähte einem idealen elastischen Körper ähnlich sind, so erscheinen sie vorzugsweise geeignet zu Versuchen über den Werth jenes Verhältnisses. Ich habe an mehreren runden Stäben von federhartem Stahl, von etwa 2,85^{mm} Durchmesser und ungefähr 300^{mm} Länge, solche Versuche ausgeführt und will diese hier beschreiben.

Es stelle in Fig. 13 $A^0\,A'$ einen elastischen Stab vor, der in A^0 horizontal befestigt ist; in A' sei ein

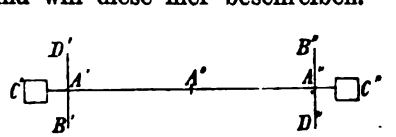


Fig. 13.

horizontaler Arm $A'\,B'$ senkrecht auf der Längsrichtung des Stabes an demselben angebracht. Wird in B' ein Gewicht P angehängt, so bewirkt dieses gleichzeitig eine Biegung und eine Torsion. An dem freien Ende des Stabes sei ein Spiegel C' so befestigt, dass seine Fläche nahe horizontal ist; gegen den Spiegel sei von oben her ein Fernrohr gerichtet, und eine Scale, die aus zwei Systemen senkrecht sich schneidender, gleich weit von einander abstehender Linien besteht, sei horizontal so angebracht, dass ihr Spiegelbild im Fernrohr erscheint. An dieser Scale lässt sich dann gleichzeitig die Biegung und die Torsion beobachten. Angenommen, dass der Querschnitt des Stabes ein Kreis ist, so kann man aus dem Radius desselben, dem Gewicht P, der Länge $A^0\,A'$ und der beobachteten Biegung den Elasticitätscoëfficienten, aus dem Radius, dem Gewichte P, den Längen $A^0\,A'$, $A'\,B'$ und der beobachteten Torsion den Torsionscoëfficienten berechnen; aus dem Verhältnisse dieser beiden Coëfficienten findet man dann leicht, unter der Voraussetzung der Gleichheit der Elasticität in ver-

schiedenen Richtungen, das gesuchte Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation. Bei der Bestimmung dieses Verhältnisses ist die Kenntniss des Radius des Stabes unnöthig, da dieser in gleicher Weise in den Ausdrücken des Elasticitätscoëfficienten und des Torsionscoëfficienten vorkommt.

Die Stäbe, welche ich den Versuchen unterworfen habe, sind Stücke von gezogenen Drähten; man kann daher bei ihnen nicht mit Sicherheit voraussetzen, dass ihr Querschnitt ein Kreis ist; man wird aber ohne merklichen Fehler annehmen dürfen, dass der Querschnitt eine Ellipse ist, bei der das Quadrat der Excentricität vernachlässigt werden kann. Bei dieser Annahme kann man sehr leicht den Einfluss der Abweichung des Querschnittes von der Kreisform eliminiren. Man hat nur nöthig, den Stab um seine Axe um 90^0 zu drehen, den Arm $A'B'$ wieder horizontal in A' zu befestigen und zum zweiten Male die Formänderung zu beobachten, die der Stab erleidet, wenn das Gewicht P in B' aufgehängt wird. Die Torsion muss dann eben so gross, wie bei der ersten Lage des Stabes, gefunden werden, die Biegung im Allgemeinen aber anders; die Torsion bei der einen oder der anderen Lage und das arithmetische Mittel aus den beiden Biegungen sind so gross, wie die Torsion und die Biegung sein würden, wenn der Querschnitt des Stabes ein Kreis wäre, dessen Radius das Mittel aus den beiden Halbaxen des elliptischen Querschnitts ist.

Der Arm $A'B'$ lässt sich nicht leicht mit Genauigkeit senkrecht zur Stabaxe machen; eine geringe Schiefe desselben hat auf die Torsion nicht Einfluss, wohl aber auf die Biegung. Diesen Einfluss habe ich auf folgende Weise unschädlich gemacht. Der Arm $A'B'$ ist die Hälfte eines Querstabes $B'D'$; nachdem das Gewicht P in B' gewirkt hat, hänge ich es in D' auf und nehme das Mittel aus den in beiden Fällen beobachteten Biegungen. Die Torsionen müssen in beiden Fällen dieselben sein, wenn die Stabaxe durch die Mitte von $B'D'$ hindurchgeht; ist diese Bedingung nicht genau erfüllt, so sind auch die Torsionen verschieden, ihr Mittel ist dann aber so gross, wie die Torsion sein würde, wenn die Länge eines jeden Armes genau der Hälfte von $B'D'$ gleich wäre.

Um mich von der Voraussetzung unabhängig zu machen, dass der Theil des Stabes bei A^0 genau seine Lage behält, wenn das Gewicht P an das Ende seines Hebelarms gehängt wird, habe ich die Einrichtung getroffen, dass der Stab $A^0 A'$ die Hälfte eines Stabes $A' A''$ ist, der bei A'' einen Querstab $B'' D''$ von denselben Dimensionen wie $B' D'$ und einen Spiegel C'' trägt, auf welchen ein zweites Fernrohr gerichtet ist. Der Stab ist bei A^0 in einem dünnen Blechstücke befestigt; es werden gleiche Gewichte bei B' und B'' oder bei D' und D'' angehängt und das Bild derselben Scale wird in beiden Spiegeln beobachtet.

Der Apparat, den ich benutzt habe, ist in Fig. 1, (Taf. I) perspectivisch dargestellt. An der Wand des Beobachtungszimmers sind vier Bretter A, B, B, C befestigt; das erste von diesen trägt die Scale, die beiden folgenden die beiden Fernröhre, das letzte den den Versuchen zu unterwerfenden Stab. An dem Brette A sitzen zwei horizontale, zu ihm senkrechte Leisten a, a; an jeder von diesen sind zwei kleine, nach Innen vorspringende Holzstücke angebracht, durch welche von unten her die Schrauben α, α geführt sind; auf diesen Schrauben ruht die Scale und ist durch sie mit Hülfe einer Libelle horizontal gestellt. Die Scale ist auf Papier gedruckt und auf eine Glasplatte aufgespannt. Fig. 14 zeigt einen Theil derselben. Die eine Axe ist parallel der Wand, die andere senkrecht zu dieser; ich werde die erste die ξ-Axe, die zweite die η-Axe nennen.

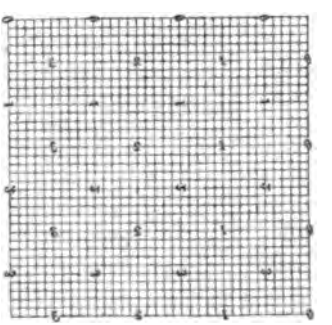


Fig. 14.

Die Bretter B, B, C tragen die Holzleisten b, b, c, die etwas weiter als die Leisten a, a vorspringen, und von denen die beiden ersten zwei Fernröhre β, β von etwa 30 maliger Vergrösserung halten. Die Gesichtslinien dieser sind vertical gestellt. Um das zu erreichen, ist unter dem Objektive eines jeden ein Kreuz von zwei Fäden ausgespannt und das Fernrohr so gerichtet, dass das Spiegelbild, welches ein Queck-

silberhorizont von dem Schnittpunkte dieser Fäden gewährt, mit dem Mittelpunkte des Fadenkreuzes im Fernrohr zusammenfällt.

An der Leiste c hängt der Stab, dessen Formänderungen gemessen werden sollen. In der Nähe des vorderen Endes der Leiste ist durch dieselbe eine verticale rechteckige Oeffnung gestemmt, die theilweise von einem Holzstück ausgefüllt wird, das von den vier seitlichen Schrauben γ, γ, γ', γ' gehalten wird, welche mit ihren Spitzen in Vertiefungen eingreifen, die in demselben angebracht sind. Von diesen vier Schrauben liegen die beiden ersten in einer horizontalen, die beiden letzten in einer verticalen Ebene. Mit Hülfe derselben kann das Holzstück in der Richtung der ξ-Axe verschoben und um zwei Axen gedreht werden, von denen die eine vertical, die andere nahe parallel der η-Axe ist. Das Holzstück ist vertical durchbohrt; durch die Durchbohrung ist von unten nach oben der Stiel eines kleinen Schraubstockes geführt und mit Hülfe einer Schraubenmutter so weit an dem Holzstücke befestigt, dass er nur mit starker Reibung in demselben sich drehen lässt. In das nach unten gekehrte Maul des Schraubstocks ist ein dünnes Stückchen Stahlblech gespannt, welches eine Oeffnung hat, die so gross wie der Querschnitt des zu untersuchenden Stabes ist. Durch diese Oeffnung ist der Stab bis zu seiner Mitte gesteckt und hier mit einer sehr kleinen Menge Zinn festgelöthet. Diese Vorrichtungen gestatten dem Stabe (der in Fig. 1 Taf. I durch d bezeichnet ist) eine Lage zu geben, bei der seine Axe horizontal und der ξ-Axe parallel ist, und die an ihm befestigten Querstäbe e, e so nahe horizontal sind, als es möglich ist, wenn sie nicht vollkommen parallel einander sind. Zu diesem Zwecke wird an den Stab d eine mit Haken versehene Libelle so gehängt, dass ihre Mitte unter der Mitte des Stabes sich befindet, und durch Drehung der Schrauben γ', γ' ihre Blase zum Einspielen gebracht. Darauf wird die Libelle an einen der Querstäbe e, e gehängt, und dieser durch Drehung des Blechstücks, welches den Stab d hält, horizontal gemacht. Sind beide Querstäbe einander parallel, so muss auch der zweite jetzt horizontal sein. Ob das der Fall ist, erkennt man, indem man die Libelle an ihn anhängt. Eine

kleine Abweichung ist nicht zu fürchten. Findet sie statt, so stellt man den Stab d am zweckmässigsten so, dass die beiden Querstäbe um gleich viel nach entgegengesetzten Seiten von der Horizontalen abweichen. Die Bewegung endlich, welche nöthig ist, um die Axe des Stabes d der ξ-Axe parallel zu richten, kann theils durch Drehung des Schraubstocks in dem Holzstücke, das diesen trägt, theils durch die Schrauben γ, γ ausgeführt werden. Um zu beurtheilen, ob der beabsichtigte Parallelismus besteht, habe ich das folgende Verfahren eingeschlagen. In zwei Punkten der ξ-Axe der Scale sind die Fäden f, f befestigt, die unten in zwei Schlingen endigen. In diese Schlingen ist ein Stab g von ähnlichen Dimensionen, wie der Stab d, eingelegt. Die Länge der Fäden ist so gewählt, dass beide Stäbe ungefähr in derselben Höhe, der eine hinter dem andern, sich befinden. An dem Stabe g wird ein Spiegelstreifen aufgehängt, der mit zwei Haken versehen ist, die den Haken einer Libelle ähnlich sind, Fig. 15; gegen diesen Spiegel richtet man ein Fernrohr, vor dessen Objektiv ein Loth angebracht ist, so, dass das Spiegelbild des Lothes von dem Verticalfaden des Fadenkreuzes gedeckt wird. Darauf hängt man denselben Spiegelstreifen an den Stab d und richtet diesen so, dass bei unveränderter Stellung des Fernrohrs dieselbe Deckung stattfindet.

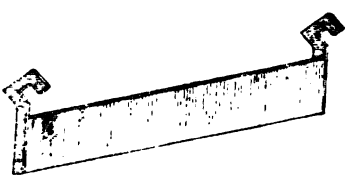


Fig. 15.

An den Enden des Stabes d sind die Träger zweier Silberspiegel h, h angeschraubt, deren Mitten nahezu von den Gesichtslinien der beiden Fernröhre getroffen werden sollen. Um zu beurtheilen, ob das stattfindet, dienen zwei Lothe i, i, die an den Schnittpunkten der Fäden aufgehängt sind, welche, wie schon erwähnt, unter jedem der beiden Objective sich befinden. Jeder Spiegel kann gegen seinen Träger mit Hülfe dreier Paare von Schräubchen in engen Gränzen bewegt und so gerichtet werden, dass passende Punkte der Scale in dem Gesichtsfelde des zugehörigen Fernrohrs erscheinen.

Fig. 16 stellt einen der beiden Querstäbe dar. Derselbe ist aus Stahlblech gearbeitet; in seiner Mitte hat er einen Ausschnitt, dessen Seiten *a*, *a*, *a* Schneiden sind; diese greifen, wenn er auf den Stab *d* aufgesetzt ist, in feine Einschnitte ein, die in diesen mit der Feile gemacht sind, und sind hier mit einer sehr kleinen Menge Zinn festgelöthet. In die Enden des Querstabes, die verdickt sind, sind die stählernen Spitzen *b*, *b* eingeschraubt, die dazu dienen die Ringe *c*, *c* zu tragen, an denen feine, in Haken endigende Drähte sitzen, an welche die Gewichte gehängt werden, die den Stab *d* biegen und tordiren sollen.

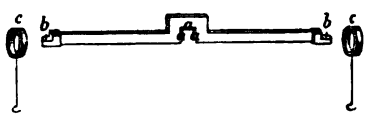


Fig. 16.

Wenn man sich erlaubt die Winkel als unendlich klein zu betrachten, unter welchen die in die Fernröhre gelangenden Strahlen reflectirt werden, so können als Maass für die Biegungen und Torsionen der beiden Stabhälften unmittelbar die Veränderungen der Coordinaten der Scalenpunkte dienen, deren Spiegelbilder von den Schnittpunkten der beiden Fadenkreuze gedeckt werden. Bei den angestellten Versuchen muss indessen Rücksicht auf die endliche Grösse jener Winkel genommen werden. Diese Rücksicht macht einige näher eingehende Betrachtungen nöthig.

Ich führe ein dreiaxiges rechtwinkliges Coordinatensystem ein; zwei Axen desselben sollen die ξ-Axe und η-Axe der Scale sein; von diesen hat die erste die Richtung der Linie $A'\,A''$ Fig. 13, die zweite die Richtung der Linie $A'\,D'$; die dritte, welche ich die ζ-Axe nennen will, soll vertical abwärts gekehrt sein. Den den Versuchen zu unterwerfenden Stab denke ich mir zunächst gerade gemacht; es kann das dadurch geschehen, dass in der Nähe seiner Enden Unterstützungen angebracht und diese so gestellt werden, dass eine Libelle, auf die eine oder auf die andere Stabhälfte gehängt, einsteht. Die Stabaxe ist dann parallel der ξ-Axe. Von einem variabeln Punkte der Stabaxe ausgehend stelle ich mir drei auf einander rechtwinklige Axen vor, die ich bezeichnen will als x-Axe, y-Axe, z-Axe, die fest verbunden mit den Molekülen des Stabes und bei der eben

bezeichneten Lage desselben den Axen der ξ, η, ζ parallel sind. Hat der Stab eine Aenderung der Lage und Gestalt erlitten, so bilden jene Axen mit diesen Winkel, deren Cosinus ich durch

$$\alpha_0,\ \beta_0,\ \gamma_0$$
$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1$$
$$\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2$$

bezeichne, so, dass die Indices 0, 1, 2 sich resp. beziehen auf die x-Axe, y-Axe, z-Axe. Weiter seien ξ, η, ζ die Coordinaten in Beziehung auf die ξ-, η-, ζ-Axen des Punktes, von dem die x-, y-, z-Axen ausgehen. Den Zeichen dieser drei Coordinaten und jener neun Cosinus werde ich oben ^{0} oder $'$ oder $''$ beifügen, wenn sie sich auf die Punkte der Stabaxe A^0, A', A'' Fig. 13 beziehen sollen.

Sind die Unterstützungen, durch welche der Stab gerade gemacht ist, entfernt, so hat sich derselbe gekrümmt in Folge seines eigenen Gewichtes, des Gewichtes der Spiegel, ihrer Träger und der Querstäbe. Um die Betrachtungen nicht unnöthig zu compliciren, werde ich annehmen, dass diese Krümmung angesehen werden kann als hervorgebracht durch gleiche Gewichte, die in A' und A'' wirken: die Grösse dieser Gewichte sei G. Die Grösse der gleichen Gewichte, welche bestimmt sind in B' und B'' oder in D' und D'' angehängt zu werden, nenne ich, wie früher, P. Die Hälfte von $A'\,A''$ bezeichne ich durch s, den vierten Theil der Summe von $B'\,D'$ und $B''\,D''$ durch l. Um die Rechnungen etwas zu vereinfachen, nehme ich an, dass

$$A'A^0 = A''A^0$$

und

$$B'A' = D'A' = B''A'' = D''A''$$

ist, bemerke aber, dass das Endresultat auch Gültigkeit behält, wenn diese Gleichungen nicht genau erfüllt sind. Der Radius des als kreisförmig gedachten Querschnitts des Stabes sei ρ. Den Elasticitätscoëfficienten setze ich in Uebereinstimmung mit den Bezeichnungen, welche ich in früheren Abhandlungen über Elasticität gebraucht habe,

$$= 2K\frac{1+3\theta}{1+2\theta},$$

das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation in dem Falle, dass der Stab durch einen longitudinalen Zug angedehnt wird

$$= \frac{\theta}{1+2\theta}.$$

Der Kürze wegen mache ich weiter:

$$L = \frac{\pi}{2}\varrho^4 K, \quad N = \frac{\pi}{2}\varrho^4 K\frac{1+3\theta}{1+2\theta}.$$

Die Formänderungen des Stabes sollen als unendlich klein betrachtet werden; es ist dann immer:

$$\alpha_0 = 1, \qquad \beta_1 = 1, \qquad \gamma_2 = 1,$$
$$\beta_2 + \gamma_1 = 0, \quad \gamma_0 + \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 + \beta_0 = 0.$$

Für den Fall, dass die Gewichte P nicht wirken, hat man[1]:

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha'_2 = \alpha^0_2 + \frac{Gs^2}{2N} \\ \beta'_2 = \beta^0_2 \\ \gamma' = \gamma^0 + \alpha^0_2 s + \frac{Gs^3}{3N} \\ \alpha''_2 = \alpha^0_2 - \frac{Gs^2}{2N} \\ \beta''_2 = \beta^0_2 \\ \gamma'' = \gamma^0 - \alpha^0_2 s + \frac{Gs^3}{3N}, \end{cases}$$

woraus folgt:

$$\alpha'_2 - \alpha''_2 = \frac{Gs^2}{N}$$
$$\beta'_2 - \beta''_2 = 0.$$

Für den Fall, dass die Gewichte P in B' und B'' angebracht sind, ist:

[1] S. oben p. 285.

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha'_2 = \alpha^0_2 + \dfrac{(G+P)s^2}{2N} \\ \beta'_2 = \beta^0_2 + \dfrac{Pls}{L} \\ \zeta' = \zeta^0 + \alpha^0_2 s + \dfrac{(G+P)s^3}{3N} \\ \alpha''_2 = \alpha^0_2 - \dfrac{(G+P)s^2}{2N} \\ \beta''_2 = \beta^0_2 - \dfrac{Pls}{L} \\ \zeta'' = \zeta^0 - \alpha^0_2 s + \dfrac{(G+P)s^3}{2N}, \end{cases}$$

woraus folgt:

$$\alpha'_2 - \alpha''_2 = \frac{(G+P)s^2}{N}$$

$$\beta'_2 - \beta''_2 = \frac{2Pls}{L}.$$

Ich werde die Veränderungen, welche die in Betracht kommenden Grössen dadurch erleiden, dass die Gewichte P in B' und B'' angehängt werden, durch Vorsetzen eines δ bezeichnen; es ist dann:

$$\delta\alpha'_2 - \delta\alpha''_2 = \frac{Ps^2}{N}$$

$$\delta\beta'_2 - \delta\beta''_2 = \frac{2Pls}{L},$$

woraus sich ergiebt:

$$(3)\quad \frac{N}{L} = 1 + \frac{\theta}{1+2\theta} = \frac{\delta\beta'_2 - \delta\beta''_2}{\delta\alpha'_2 - \delta\alpha''_2}\frac{s}{2l}.$$

Werden die Gewichte P statt in B' und B'' in D' und D'' angebracht, so gelten dieselben Gleichungen, wenn nur in ihnen $-l$ statt l gesetzt wird.

Es handelt sich nun darum abzuleiten, wie $\delta\alpha'_2$, $\delta\alpha''_2$, $\delta\beta'_2$, $\delta\beta''_2$ aus den an der Scale zu machenden Ablesungen gefunden werden können. Zu diesem Zwecke werde ich die Richtungen der nach Unten gekehrten Spiegelnormalen in die Betrachtung einführen und durch n' und n'' bezeichnen. Der Kürze wegen will ich dabei setzen:

$$\cos(n'\xi) = \alpha', \quad \cos(n'\eta) = \beta', \quad \cos(n'\zeta) = \gamma'$$
$$\cos(n''\xi) = \alpha'', \quad \cos(n''\eta) = \beta'', \quad \cos(n''\zeta) = \gamma''.$$

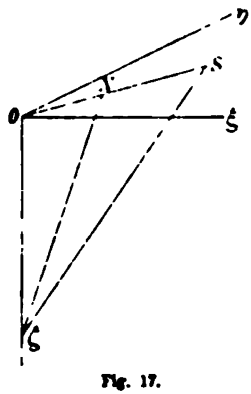


Fig. 17.

In Fig. 17 sei $O\zeta$ die Gesichtslinie des ersten Fernrohrs, $O\xi$ und $O\eta$ seien zwei Linien, die in der Ebene der Scale der ξ-Axe und der η-Axe parallel gezogen sind; dabei möge der Punkt ζ der Schnittpunkt der Gesichtslinie mit der Spiegelebene sein, N der Schnittpunkt der aus dem Punkte ζ gezogenen Spiegelnormale mit der Ebene der Scale und S der Punkt der Scale, dessen Spiegelbild in der Gesichtslinie liegt. Ich bezeichne weiter die Coordinaten in Bezug auf die ξ-, η-, ζ-Axen des Punktes ζ durch a', b', c', des Punktes S durch X', Y', 0, des Punktes N durch A', B', 0. Es ist dann:

$$\begin{aligned} A' - a' &= -N\zeta . \alpha' \\ B' - b' &= -N\zeta . \beta' \\ -c' &= -N\zeta . \gamma', \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} A' - a' &= -\frac{\alpha'}{\gamma'} c' \\ B' - b' &= -\frac{\beta'}{\gamma'} c'. \end{aligned}$$

Da aber die Linie $N\zeta$ in der Ebene des Dreiecks $OS\zeta$ liegt und den Winkel desselben bei ζ halbirt, so ist

$$\begin{aligned} X' - a' &= (A' - a') \frac{2\gamma'^2}{2\gamma'^2 - 1} \\ Y' - b' &= (B' - b') \frac{2\gamma'^2}{2\gamma'^2 - 1}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$(4) \qquad \left| \begin{aligned} X' - a' &= -\alpha' \frac{2\gamma'^2}{2\gamma'^2 - 1} c' \\ Y' - b' &= -\beta' \frac{2\gamma'^2}{2\gamma'^2 - 1} c'. \end{aligned} \right.$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich bei entsprechender Bezeichnung für den zweiten Spiegel:

$$(5) \qquad \left| \begin{aligned} X'' - a'' &= -\alpha'' \frac{2\gamma''^2}{2\gamma''^2 - 1} c'' \\ Y'' - b'' &= -\beta'' \frac{2\gamma''^2}{2\gamma''^2 - 1} c''. \end{aligned} \right.$$

Sind $(n'x)$, $(n'y)$, $(n'z)$ die Winkel, welche die Spiegelnormale n' bildet mit den von A' ausgehenden Axen der x, y, z, so ist

$$\alpha' = \cos(n'x) + \alpha'_1 \cos(n'y) + \alpha'_2 \cos(n'z)$$
$$\beta' = \beta'_0 \cos(n'x) + \cos(n'y) + \beta'_2 \cos(n'z).$$

Es ist α'_1, oder $-\beta'_0$, der Winkel, um den sich der Stab um eine verticale Axe aus der Lage gedreht hat, bei der seine Axe der ξ-Axe parallel ist; dieser Winkel ist, wenn nicht $=0$, so doch sicher sehr klein, und da $\cos(n'y)$ und $\cos(n'x)$ auch nur kleine Grössen sind, so wird man setzen dürfen:

$$\alpha' = \cos(n'x) + \alpha'_2 \cos(n'z)$$
$$\beta' = \cos(n'y) + \beta'_2 \cos(n'z).$$

Ich werde die Werthe, welche die in Betracht kommenden Grössen in dem Falle annehmen, dass der Stab auf die oben angegebene Weise gerade gemacht ist, durch Uebersetzen eines — bezeichnen. Es ist dann:

$$\cos(n'x) = \overline{\alpha'}, \quad \cos(n'y) = \overline{\beta'}, \quad \cos(n'z) = \overline{\gamma'}.$$

Die letzten Gleichungen lassen sich in Folge dessen schreiben:

$$(6) \qquad \begin{cases} \alpha'_2 = \dfrac{\alpha' - \overline{\alpha'}}{\overline{\gamma'}} \\ \beta'_2 = \dfrac{\beta' - \overline{\beta'}}{\overline{\gamma'}}. \end{cases}$$

Ebenso findet man:

$$(7) \qquad \begin{cases} \alpha_2'' = \dfrac{\alpha'' - \overline{\alpha''}}{\overline{\gamma''}} \\ \beta_2'' = \dfrac{\beta'' - \overline{\beta''}}{\overline{\gamma''}}. \end{cases}$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen sollen nun Ausdrücke für c' und c'' abgeleitet werden. Die Gleichung der Ebene des ersten Spiegels in Beziehung auf die aus dem Punkte A' gezogenen Axen der x, y, z sei:

$$x\cos(n'x) + y\cos(n'y) + z\cos(n'z) - D' = 0;$$

die Gleichung derselben Ebene in Beziehung auf die Axen der ξ, η, ζ ist dann:

$$(\xi - \xi')\alpha' + (\eta - \eta')\beta' + (\zeta - \zeta')\gamma' - D' = 0.$$

Der Punkt, für den $\xi = a'$, $\eta = b'$, $\zeta = c'$ ist, gehört die Ebene an; es ist daher:

$$(a' - \xi')\alpha' + (b' - \eta')\beta' + (c' - \zeta')\gamma' - D' = 0,$$

woraus folgt:

$$c' = \zeta' + \frac{D' + (\xi' - a')\alpha' + (\eta' - b')\beta'}{\gamma'}.$$

Bei meinem Apparate betragen D' und $\eta' - b'$ wenige Millimeter, $\xi' - a'$ ist wenige Centimeter, c' mehr als 2 Meter; man wird deshalb in Anbetracht der Kleinheit von α und β statt dieser Gleichung schreiben dürfen:

$$c' = \zeta' + D' + (\xi' - a')\alpha',$$

und für α' wird es erlaubt sein einen auch rohen Näherungswerth zu setzen. Ich mache

$$(8) \qquad \begin{cases} c' = C + h \\ c'' = C - h, \end{cases}$$

wo h eine gegen C sehr kleine Grösse ist; dann werde ich in Folge der Gleichungen (4) setzen können:

$$(9) \qquad \alpha' = -\frac{X' - a'}{2C}.$$

Dadurch erhalte ich:

$$c' = \zeta' + D' - \frac{(\xi' - a')(X' - a')}{2C}.$$

Es folgt hieraus:

$$\overline{c'} = \overline{\zeta'} + D' - \frac{(\xi' - a')(\overline{X'} - a')}{2C};$$

es ist also auch mit Rücksicht auf die Gleichungen (8):

$$c' = C + h + \zeta' - \overline{\zeta'} - \frac{(\xi' - a')(X' - \overline{X'})}{2C},$$

oder, da $\overline{\zeta'} = \zeta^0$ ist,

$$c' = C + h + \zeta' - \zeta^0 - \frac{(\xi' - a')(X' - \overline{X'})}{2C}.$$

Auf dieselbe Weise findet man:

$$c'' = C - h + \zeta'' - \zeta^0 - \frac{(\xi' - a')(X'' - \overline{X''})}{2C}.$$

Nun folgt aber aus den Gleichungen (1) und (2):

$$\zeta'' - \zeta^0 = \frac{5}{6} s\alpha'_2 + \frac{1}{6} s\alpha''_2$$

$$\zeta' - \zeta^0 = -\frac{1}{6}s\alpha'_2 - \frac{5}{6}s\alpha''_2;$$

aus den Gleichungen (6) und (9) folgt, dass näherungsweise:

$$\alpha'_2 = -\frac{X' - \overline{X'}}{2C};$$

und ebenso ist:

$$\alpha''_2 = -\frac{X'' - \overline{X''}}{2C}.$$

Es ergiebt sich daher:

$$c' = C + h - \frac{1}{2C}\left[\left(\frac{5}{6}s + \xi' - a'\right)(X' - \overline{X'}) + \frac{1}{6}s(X'' - \overline{X''})\right]$$

$$c'' = C - h + \frac{1}{2C}\left[\frac{1}{6}s(X' - \overline{X'}) + \left(\frac{5}{6}s - (\xi'' - a'')\right)(X'' - X')\right].$$

Diese Werthe von c' und c'' substituire man in die Gleichungen (4) und (5); dabei setze man für γ' und γ'' die Näherungswerthe:

$$(10) \qquad \begin{cases} \gamma' = 1 - \dfrac{(X' - a')^2 + (Y' - b')^2}{8C^2} \\ \gamma'' = 1 - \dfrac{(X'' - a'')^2 + (Y'' - b'')^2}{8C^2}, \end{cases}$$

welche sich leicht aus der Gleichung (9) und den dieser analog zu bildenden Gleichungen ergeben. Bei Vernachlässigung von kleinen Gliedern höherer Ordnung findet man dann:

$$(11) \qquad \begin{cases} \alpha' = -\dfrac{X' - a'}{2C}\left\{1 - \dfrac{h}{C} - \dfrac{3}{8C^2}[(X' - a')^2 + (X' - b')^2)] \right. \\ \left. + \dfrac{1}{8C^2}\left[\left(\dfrac{10}{3}s + 4(\xi' - a')\right)(X' - \overline{X'}) + \dfrac{2}{3}s(X'' - \overline{X''})\right]\right\} \\ \beta' = -\dfrac{Y' - b'}{2C}\left\{1 - \dfrac{h}{C} - \dfrac{3}{8C^2}[(X' - a')^2 + (Y' - b')^2] \right. \\ \left. + \dfrac{1}{8C^2}\left[\left(\dfrac{10}{3}s + 4(\xi' - a')\right)(X' - \overline{X'}) + \dfrac{2}{3}s(X'' - \overline{X''})\right]\right\} \\ \alpha'' = -\dfrac{X'' - a''}{2C}\left\{1 + \dfrac{h}{C} - \dfrac{3}{8C^2}[(X'' - a'')^2 + (Y'' - b'')^2] \right. \\ \left. - \dfrac{1}{8C^2}\left[\left(\dfrac{2}{3}s(X' - \overline{X'}\right) + \left(\dfrac{10}{3}s - 4(\xi'' - a'')\right)(X'' - \overline{X''})\right]\right\} \\ \beta'' = -\dfrac{Y'' - b''}{2C}\left\{1 + \dfrac{h}{C} - \dfrac{3}{8C^2}[(X'' - a'')^2 + (Y'' - b'')^2] \right. \\ \left. - \dfrac{1}{8C^2}\left[\dfrac{2}{3}s(X' - \overline{X'}) + \left(\dfrac{10}{3}s - 4(\xi'' - a'')\right)(X'' - \overline{X''})\right]\right\}. \end{cases}$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke kann man aus den Gleichungen (6) und (7) die Werthe von α'_2, α''_2, β'_2, β''_2 bilden. Ich will aber diese Werthe selbst nicht aufstellen, sondern an ihrer Statt die von vier Grössen, die ich durch (X'), (Y'), (X''), (Y'') bezeichne und durch die folgenden Gleichungen definire:

$$(12)\qquad \begin{cases} (X') = a' - 2C\left(\alpha'_2 + \frac{\bar{\alpha}'}{\bar{\gamma}}\right) \\ (Y') = b' - 2C\left(\beta'_2 + \frac{\bar{\beta}'}{\bar{\gamma}}\right) \\ (X'') = a'' - 2C\left(\alpha''_2 + \frac{\bar{\alpha}''}{\bar{\gamma}}\right) \\ (Y'') = b'' - 2C\left(\beta''_2 + \frac{\bar{\beta}''}{\bar{\gamma}}\right). \end{cases}$$

Einerseits folgt hieraus:

$$\delta(X') = -2C\delta\alpha'_2,\ \delta(Y') = -2C\delta\beta'_2$$
$$\delta(X'') = -2C\delta\alpha''_2,\ \delta(Y'') = -2C\delta\beta''_2$$

und also bei Rücksicht auf die Gleichung (3):

$$(13)\qquad 1 + \frac{\theta}{1+2\theta} = \frac{\delta(Y'') - \delta(Y')}{\delta(X'') - \delta(X')}\frac{s}{2l}.$$

Andererseits folgt aus den Gleichungen (12), wenn man die Gleichungen (6) und (7) hinzuzieht:

$$(X') = a' - 2C\frac{\bar{\alpha}'}{\bar{\gamma}}$$
$$(Y') = b' - 2C\frac{\bar{\beta}'}{\bar{\gamma}}$$
$$(X'') = a'' - 2C\frac{\bar{\alpha}''}{\bar{\gamma}}$$
$$(Y'') = b'' - 2C\frac{\bar{\beta}''}{\bar{\gamma}}.$$

Benutzt man nun die Gleichungen (11), setzt für $\bar{\gamma}'$ und $\bar{\gamma}''$ die Näherungswerthe:

$$\bar{\gamma}' = 1 - \frac{(X'-a')^2 + (Y'-b')^2}{2C^2},$$
$$\bar{\gamma}'' = 1 - \frac{(X''-a'')^2 + (Y''-b'')^2}{2C^2},$$

die aus den Gleichungen (10) sich ergeben, und vernachlässigt wieder kleine Grössen höherer Ordnung, so findet man:

$$\begin{aligned}(X') &= X' + (X' - a')F'\\ (Y') &= Y' + (Y' - b')F'\\ (X'') &= X'' + (X'' - a'')F''\\ (Y'') &= Y'' + (Y'' - b'')F'',\end{aligned}$$

wo

$$F' = -\frac{h}{C} + \frac{1}{8C^2}\Big[(\overline{X'} - a')^2 + (\overline{Y'} - b')^2 - 3[(X' - a')^2 + (Y' - b')^2] + \left(\frac{10}{3}s + 4(\xi' - a')\right)(X' - \overline{X'}) + \frac{2}{3}s(X'' - \overline{X''})\Big]$$

und

$$F'' = \frac{h}{C} + \frac{8}{8C^2}\Big[(\overline{X''} - a'')^2 + (Y'' - b'')^2 - 3[(X'' - a'')^2 + (Y'' - b'')^2] - \frac{2}{3}s(X' - \overline{X'}) - \left(\frac{10}{8}s - 4(\xi'' - a'')\right)(X'' - \overline{X''})\Big].$$

Nach diesen Formeln sind die angestellten Beobachtungen berechnet. Von den hier vorkommenden Grössen ergaben sich X', Y', X'', Y'', $\overline{X'}$, $\overline{Y'}$, $\overline{X''}$, $\overline{Y''}$ unmittelbar aus den an den Spiegelbildern der Scale gemachten Ablesungen; a', b', a'', b'' wurden gefunden aus den gemessenen Entfernungen der Lothe i, i (Taf. I Fig. 1) und zweier Lothe, die aus den Fäden f, f gebildet waren; $\xi' - a'$ und $\xi'' - a''$ wurden mit einem Zirkel gemessen. Einer näheren Auseinandersetzung bedarf nur noch die Art, wie die Grössen C und h, oder die mit diesen durch die Gleichungen (8) zusammenhängenden Grössen $\overline{c'}$, $\overline{c''}$ bestimmt wurden.

An der Leiste, welche den der Untersuchung unterworfenen Stab trug, war eine Spitze angebracht, deren Tiefe unter der Scale an einem langen Maassstabe ein für alle Mal gemessen war. Vor dem elastischen Stabe war ein Kathetometer aufgestellt; mit diesem wurde, nachdem der Stab auf die oben beschriebene Weise eingestellt und gerade gemacht war, die Tiefe eines gewissen Punktes einer jeden Spiegelfläche unter jener Spitze gemessen. Es wurde nämlich, nachdem die Höhe der Spitze an der Scale des Kathetometers abgelesen war, das Fernrohr desselben durch Drehung um seine verticale Drehungsaxe so gestellt, dass sein verticaler Faden eines der Lothe i

deckte, und dann so lange gesenkt, bis der Schnittpunkt seiner Fäden in den vorderen Rand der entsprechenden Spiegelfläche zu fallen schien. Der Punkt, auf den das Fernrohr dann eingestellt war, ist der Schnittpunkt dreier Ebenen, deren Gleichungen gebildet werden sollen. Eine dieser Ebenen ist die Spiegelfläche; sie hat die Gleichung (wenn der Spiegel der erste ist):

$$(\xi - a')\overline{\alpha'} + (\eta - b')\overline{\beta'} + (\zeta - \overline{c'})\overline{\gamma'} = 0.$$

Eine zweite Ebene ist die verticale, durch den vorderen Rand des Spiegels gelegte; ihre Gleichung sei:

$$\eta - r' = 0.$$

Die dritte Ebene ist die, welche durch das Loth i und die Drehungsaxe des Kathetometers geht; sind a''' und b''' die ξ- und η-Ordinaten dieser Drehungsaxe, so ist die Gleichung der genannten Ebene:

$$(\xi - a')(b''' - b') - (\eta - b')(a''' - a') = 0.$$

Bezeichnet man durch Z' die ζ-Ordinate des Punktes, auf den das Kathetometerfernrohr eingestellt war, so folgt aus diesen drei Gleichungen:

$$\overline{c'} = Z' + \frac{r' - b'}{\overline{\gamma'}}\left(\overline{\beta'} + \frac{a''' - a'}{b''' - b'}\overline{\alpha'}\right),$$

oder näherungsweise:

$$\overline{c'} = Z' - \frac{r' - b'}{2C}\left((\overline{Y'} - b') + \frac{a''' - a'}{b''' - b'}(\overline{X'} - a')\right).$$

Auf dieselbe Weise findet man bei ähnlicher Bezeichnung:

$$\overline{c''} = Z'' - \frac{r'' - b''}{2C}\left((\overline{Y''} - b'') + \frac{a''' - a''}{b''' - b''}(\overline{X'''} - a'')\right).$$

Nach diesen Gleichungen sind $\overline{c'}$ und $\overline{c''}$ berechnet, indem für C ein Näherungswerth genommen ist.

Ich wende mich nun zur Angabe der numerischen Resultate, welche die Beobachtungen und die Abmessungen ergeben haben.

Was zunächst die Scale anbetrifft, so wurden die Theile einer jeden Axe derselben zwar nicht genau gleich gefunden, doch waren die Unterschiede, die sich zeigten, so klein, dass sie hier vernachlässigt werden dürfen. Erheblicher ergab sich

der Unterschied des mittleren Werthes eines Theiles der ξ-Axe und des mittleren Werthes eines Theiles der η-Axe; nach den ausgeführten Messungen ist jener = 1,7993^{mm}, dieser = 1,8086^{mm}.

Ein Näherungswerth für C ist 2357^{mm}. Bei den Versuchen, deren Einzelheiten ich mittheilen will, war, in Millimetern ausgedrückt:

$$a' = -24{,}1,\ b' = -147{,}0,\ a'' = 329{,}6,\ b'' = -152{,}3$$
$$a''' = 147{,}5,\ b''' = -1512.$$
$$2l = 108{,}85.$$

Bei einem Stahlstabe von den schon im Eingange ungefähr angegebenen Dimensionen, den ich als No. 1 bezeichnen will, war:

$$s = 145{,}04^{mm},$$

und bei der ersten Einstellung:

$$\overline{X} = 143{,}2\ \ \overline{Y} = 93{,}3\ \ \overline{X}'' = 12{,}4\ \ \overline{Y}'' = 98{,}0$$
$$Z' = 2355{,}2^{mm}\ \ Z'' = 2355{,}5^{mm}$$
$$r' - b' = -21\ ..\ r'' - b'' = -20\ ..$$
$$\xi' - a' = \ \ 35\ ..\ \xi'' - a'' = -29\ ..$$

Bei Anwendung von Gewichten von 100$_{gr}$ wurden folgende Scalenablesungen gewonnen:

	X'	Y'	X''	Y''
0	137,2	88,2	25,8	92,5
100	101,2	122,9	63,0	56,4
0	137,0	88,1	25,6	92,4
100	101,8	53,0	61,8	127,3
0	137,2	88,5	25,7	92,8
100	101,2	122,8	62,9	56,4
0	137,1	88,0	25,6	92,3
100	101,4	52,8	61,4	127,1
0	137,0	88,2	25,5	92,6

Die Ablesungen wurden gemacht zuerst bei Abwesenheit der Gewichte, dann, nachdem diese in D' und D'' (Fig. 1) angehängt waren, dann nach ihrer Entfernung, dann, als sie in B' und B'' wirkten, dann wieder nach ihrer Entfernung, dann nachdem sie abermals in D' und D'' angebracht waren, und so fort. Ich habe den Stab mehrmals unter gleichen Bedin-

gungen beobachtet, einmal, um eine grössere Genauigkeit zu erreichen, als eine einmalige Beobachtung sie hätte geben können, dann aber auch, um zu erkennen, ob nach dem Fortnehmen der Gewichte ein merklicher Theil der durch sie hervorgebrachten Biegung oder Torsion zurückblieb. Fand dieses statt, so verräth es sich in einer Verschiedenheit der Differenzen $X' - X''$ und $Y' - Y''$ bei den Beochtungen, bei denen die Gewichte nicht wirkten. Eine solche Verschiedenheit zeigt sich, aber sie übersteigt bei allen Beobachtungssätzen nur in seltenen Fällen 0,2 eines Scalentheils und sie kann daher wohl aus Ablesungsfehlern und zufälligen Störungen erklärt werden.

Aus den unmittelbar beobachteten Werthen von X', Y', X'', Y'' habe ich dadurch, dass ich die Mittel nahm zwischen den für gleiche Bedingungen geltenden, die folgenden gebildet:

	X	Y	X	Y
0	137,10	88,20	25,64	92,52
100	101,20	122,85	62,95	56,40
100	101,60	52,90	61,60	127,20

Aus diesen ergiebt sich:

	(X')	(Y')	(X'')	(Y'')
0	136,00	86,96	26,91	91,08
100	100,20	121,07	63,45	55,81
100	101,20	52,43	62,67	125,42

Aus der ersten und zweiten dieser Horizontalreihen folgt:

$$\frac{\delta(X'') - \delta(X')}{2} = 36{,}17, \quad \frac{\delta(Y'') - \delta(Y')}{2} = -34{,}69$$

aus der ersten und drittten:

$$\frac{\delta(X'') - \delta(X')}{2} = 35{,}28, \quad \frac{\delta(Y'') - \delta(Y')}{2} = 34{,}43.$$

Die halbe Summe der beiden Werthe von $\frac{\delta(X'') - \delta(X')}{2}$ will ich durch B, die halbe Differenz der beiden Werthe von $\frac{\delta(Y'') - \delta(Y')}{2}$ durch T bezeichnen; es wird dann:

$$B = 35{,}72 \qquad T = 34{,}56.$$

Bei Anwendung von Gewichten von 200^{gr} wurde gefunden:

	X'	Y'	X''	Y''
0	131,5	93,1	20,1	97,5
200	65,8	157,2	100,3	20,0
0	136,8	87,7	25,5	91,9
200	64,2	16,7	95,4	161,0
0	137,0	89,2	25,7	93,6
200	66,1	156,8	100,5	19,6
0	136,7	87,3	25,3	91,5
200	67,0	17,7	98,0	162,0
0	137,2	88,2	25,8	92,5

also im Mittel:

0	135,84	89,10	24,48	93,40
200	65,93	157,00	100,40	19,80
200	65,60	17,20	96,70	161,50

Daraus folgt:

	(X')	(Y')	(X'')	(Y'')
0	134,74	87,86	25,75	91,96
200	65,05	154,28	100,51	19,66
200	65,52	17,10	97,76	158,47

und weiter

$$B = 71{,}42 \qquad T = 69{,}00.$$

Berechnet man aus diesen Werthen, indem man sie durch 2 dividirt, die Werthe von B und T für $P = 100^{gr}$, so ergiebt sich in naher Uebereinstimmung mit den vorher direct gefundenen Zahlen:

$$B = 35{,}71 \qquad T = 34{,}50.$$

Der Stab wurde nun um 90° um seine Axe gedreht, es wurden die Querstäbe wieder horizontal an ihm befestigt und dann Versuche derselben Art ausgeführt. Es fand sich:

$$\overline{X}' = 138{,}2 \quad \overline{Y}' = 100{,}1 \quad \overline{X}'' = 23{,}7 \quad \overline{Y}'' = 94{,}0$$

$$Z' = 2355{,}4^{mm} \qquad Z'' = 2355{,}3^{mm}$$

$$r' - b' = -26 \,..\, r'' - b'' = -20 \,..$$

$$\xi' - a' = 32 \,..\, \xi'' - a'' = -32 \,..$$

	X'	Y'	X''	Y''
0	122,6	98,7	33,9	92,6
100	85,2	133,7	68,5	57,0
0	122,3	98,7	33,6	92,6
100	84,6	62,9	68,7	127,0
0	122,0	98,6	33,4	92,6
100	83,2	133,7	66,5	57,0
0	120,8	98,7	32,0	92,6
100	85,3	63,1	69,3	127,2
0	122,6	98,8	33,8	92,8

also im Mittel:

	X'	Y'	X''	Y''
0	122,06	98,70	33,34	92,64
100	84,20	133,70	67,50	57,00
100	84,95	63,00	69,00	127,10

	(X')	(Y')	(X'')	(Y'')
0	121,05	97,35	34,49	91,27
100	83,28	131,68	67,95	56,45
100	84,57	62,44	70,07	125,11

$B = 35{,}82$ $T = 34{,}48$

	X'	Y'	X''	Y''
0	122,5	99,6	33,6	93,5
200	49,1	170,0	103,9	22,3
0	121,3	99,5	32,5	93,3
200	41,2	27,7	97,5	161,9
0	124,5	99,6	35,8	93,5
200	50,0	169,6	104,7	21,9
0	122,7	99,0	34,0	92,8
200	48,6	27,6	105,0	161,8
0	122,6	98,7	33,9	92,6

also im Mittel:

0	122,72	99,28	33,96	93,14
200	49,55	169,80	104,30	22,10
200	44,90	27,65	101,25	161,85

	(X')	(Y')	(X'')	(Y')
0	121,71	97,93	35,11	91,77
200	48,75	166,61	104,39	21,97
200	44,82	27,50	102,23	158,90

$B = 71{,}56 \qquad T = 69{,}01$

und für $P = 100_{gr}$

$B = 35{,}78 \qquad T = 34{,}51.$

In der folgenden kleinen Tafel will ich die Werthe von B und T für $P = 100^{gr}$, wie sie sich hiernach ergeben haben, zusammenstellen; dabei will ich die Temperaturen hinzufügen, die bei den Versuchen stattfanden.

B	T	
35,72	34,56	bei der einen Lage; 21°,7 C.
35,71	34,50	
35,82	34,48	bei der andern Lage; 22°,0 C.
35,78	34,51	

Im Mittel ist hiernach:

$B = 35{,}76 \qquad T = 34{,}51.$

Die Einheiten, die diesen Angaben zu Grunde liegen, sind aber nicht dieselben, da, wie oben erwähnt, die Theile der ξ-Axe und die der η-Axe bei der benutzten Scale merklich verschieden von einander waren. Benutzt man die oben angegebenen mittleren Werthe der Scalentheile, so findet man

$B = 64{,}34^{mm} \qquad T = 62{,}41^{mm}$

Nun folgt aber aus der Gleichung (13):

$$1 + \frac{\varphi}{1 + 2\varphi} = \frac{T}{B}\frac{s}{2l}; \qquad (14)$$

daraus ergiebt sich für den Stahlstab No. 1

$$\frac{\varphi}{1 + 2\varphi} = 0{,}283.$$

Ganz eben solchen Versuchen, wie der Stahlstab No. 1 sind zwei andere Stahlstäbe von mir derselben Untersuchung unterworfen. Ich begnüge mich für diese die folgenden Angaben zu machen.

Stahlstab No. 2.

B	T	
35,83	34,77	bei der einen Lage; 12°,4 C.
35,82	34,78	
36,16	34,82	bei der andern Lage; 16°,8 C.
36,14	34,84	

Mittel: $B = 35{,}99$ $T = 34{,}80$

$= 64{,}76^{mm}$ $= 62{,}94^{mm}$

$s = 145{,}01^{mm}$

$$\frac{\theta}{1+2\theta} = 0{,}295.$$

Stahlstab No. 3.

36,38	35,10	bei der einen Lage; 22°,6 C.
36,33	35,10	
36,40	35,10	bei der andern Lage; 22°,9 C.
36,35	35,11	

Mittel: $B = 36{,}37$ $T = 35{,}10$

$= 65{,}43^{mm}$ $= 63{,}48^{mm}$

$s = 145{,}16^{mm}$

$$\frac{\theta}{1+2\theta} = 0{,}294.$$

Im Mittel ist daher für die drei Stahlstäbe das gesuchte Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation

$$= 0{,}294.$$

Es wäre von Interesse zu prüfen, ob bei Stahlstäben von anderem Querschnitte, als die hier untersuchten ihn haben, das genannte Verhältniss sich eben so gross findet. Wäre das der Fall, so würde dadurch die hier gemachte Annahme bestätigt werden, dass ein gehärteter Stahlstab als homogen und von gleicher Elasticität in verschiedenen Richtungen betrachtet werden darf. Gegen diese Annahme lassen sich Bedenken erheben; in der That kann man sich vorstellen, dass bei der Härtung, bei der die Wärme von der Axe nach der Peripherie hin abfliesst, die Elasticität in der Richtung der Axe eine andere wird, als in den auf dieser senkrechten Richtungen, und dass die Molecüle in den äusseren Schichten eine andere Anordnung annehmen, als in den der Axe näheren. Findet dieses

statt, so findet es aber aller Wahrscheinlichkeit nach in verschiedenem Grade statt je nach der Dicke des Stabes, und es wird jenes Verhältniss anders bei dicken als bei dünnen Stäben sich ergeben müssen.

Ich erwähne schliesslich noch Versuche, denen ich einen hart gezogenen Messingstab von nahe gleichen Dimensionen, wie die drei untersuchten Stahlstäbe sie besitzen, unterworfen habe. Die Versuche sind von genau derselben Art wie diejenigen, die mit jedem der Stahlstäbe angestellt sind; nur wurden statt der Gewichte von 100^{gr} und 200^{gr} Gewichte von 50^{gr} und 100^{gr} benutzt. Es fanden sich hier die folgenden Werthe von P und T für $P = 50^{gr}$:

B	T	
35,55	37,14	bei der einen Lage; 24°,1 C.
35,57	37,16	
35,94	37,07	bei der andern Lage; 25,°0 C.
35,95	37,12	

Mittel: $B = 35{,}75$ $T = 37{,}12$

$64{,}33^{mm}$ $= 67{,}13^{mm}$

Es war hier $s = 144{,}65^{mm}$. Daraus folgt bei Anwendung der Gleichung (14):

$$\frac{\theta}{1 + 2\theta} = 0{,}387.$$

Diese Zahl hat hier aber sicher nicht die Bedeutung, die ich der entsprechenden bei den Stahlstäben geglaubt habe beilegen zu dürfen, weil die Elasticität des gezogenen Messingstabes sicher in der Richtung der Axe eine andere ist, als in anderen Richtungen.

Ueber die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt. [1])

Die Schwingungen cylindrischer Stäbe sind theoretisch und experimentell ausführlich behandelt; die Schwingungen eines Stabes, dessen Querschnitt veränderlich ist, sind aber

[1]) Monatsbericht der Akad. d. Wiss. zu Berlin vom 2. Oct. 1879.

bisher nicht näher untersucht, obwohl sie ausser dem mathematischen Interesse, das ihnen zukommt, auch ein praktisches in so fern besitzen, als bei einem Stabe, der mit einem freien Ende schwingt, die Excursionen dieses Endes viel grösser sein können, wenn nach ihm hin der Stab sich verjüngt, als wenn der Querschnitt überall derselbe ist, ohne dass die Grenze der Elasticität überschritten wird. Die folgenden Betrachtungen sollen sich auf die Transversalschwingungen eines Stabes beziehn, der ein Prisma oder einen Kegel von äusserst kleinem Winkel bildet, bei dem die Kante oder Spitze ein freies Ende ist.

Es werde zunächst ein Stab ins Auge gefasst, dessen Querschnitt in der Richtung der Länge beliebig, nur so variirt, dass alle Querschnitte unendlich klein sind, ihre Schwerpunkte in einer Geraden liegen und ihre Hauptaxen die gleichen Richtungen haben. Ein solcher Stab kann unendlich kleine Schwingungen ausführen, bei denen die Verschiebungen immer in einer dieser beiden Richtungen geschehn; um solche Schwingungen soll es sich handeln; die Differentialgleichung derselben ist bekannt [1]) und leicht mit Hülfe des Hamilton'schen Princips abzuleiten. Die Linie, die die Schwerpunkte der Querschnitte in der Gleichgewichtslage bilden, sei z-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems und die Richtung der Hauptaxe eines Querschnitts, der parallel die Schwingungen geschehn, die Richtung der x-Axe. Es sei ferner.

$$q = \int\int dx\,dy,\quad k = \int\int x^2\,dx\,dy,$$

die Integrationen über den dem Werthe von z entsprechenden Querschnitt ausgedehnt, ξ die Verrückung zur Zeit t dieses Querschnitts, μ die Dichtigkeit, E der Elasticitätscoëfficient des Substanz des Stabes; dann ist die lebendige Kraft

$$\frac{\mu}{2}\int dz\,k\left(\frac{\partial\xi}{dt}\right)^2$$

und die potentielle Energie des Stabes

$$\frac{E}{2}\int dz\,k\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)^2,$$

[1]) The theory of sound by John William Strutt, London 1877, Vol. I. pag. 240.

die Integrationen über die Länge desselben ausgedehnt. Hieraus folgt die partielle Differentialgleichung

$$q\mu\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -E\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(k\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right),$$

und, wenn auf die Enden des Stabes nicht Kräfte wirken, die Arbeit leisten, d. h., wenn die Enden frei oder fest sind, folgt weiter, dass für jedes Ende

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)\delta\xi \quad \text{und} \quad k\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\delta\frac{\partial\xi}{\partial z}$$

verschwinden.

Beschränkt man sich auf die Betrachtung von Schwingungen, bei denen der Stab einen einfachen Ton giebt, so kann man

$$\xi = u\sin\lambda t$$

setzen, wo u eine Funktion von z, λ eine Constante bedeutet. Für u hat man dann die gewöhnliche Differentialgleichung

$$q\mu\lambda^2 u = E\frac{d^2}{dz^2}\left(k\frac{d^2u}{dz^2}\right)$$

und die Bedingung, dass für jedes Ende

$$\frac{d}{dz}\left(k\frac{d^2u}{dz^2}\right)\delta u \quad \text{und} \quad k\frac{d^2u}{dz^2}\delta\frac{du}{dz}$$

verschwinden.

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ist ohne Schwierigkeit anzugeben, wenn die Aenderungen des Querschnitts derart sind, dass die Gleichung seiner Grenze eine Gleichung zwischen den beiden Variabeln

$$\frac{x}{z^m} \text{ und } \frac{y}{z^n}$$

ist, wo m und n zwei Constanten bedeuten. Bezeichnet man durch q' und k' die Werthe von q und k für $z = 1$, so ist dann

$$q = q'z^{m+n}, \quad k = k'z^{3m+n},$$

also die Differentialgleichung

$$q'\mu\lambda^2 z^{m+n}u = Ek'\frac{d^2}{dz^2}\left(z^{3m+n}\frac{d^2u}{dz^2}\right).$$

Man erhält ein Integral derselben, wenn man

$$u = Az^h + A_1 z^{h+(4-2m)} + A_2 z^{h+2(4-2m)} + \cdots$$

setzt, h aus der Gleichung vierten Grades

$$h(h-1)(h-2+3m+n)(h-3+3m+n) = 0$$

und die Coëfficienten A_1, A_2,... aus den Gleichungen

$$\frac{q'\mu\lambda^2}{k'E}A = A_1(h+4-2m)(h-1+4-2m)$$
$$(h-2+4-2m+3m+n)(h-3+4-2m+3m+n)$$

$$\frac{q'\mu\lambda^2}{k'E}A_1 = A_2\big(h+2(4-2m)\big)\big(h-1+2(4-2m)\big)$$
$$\big(h-2+2(4-2m)+3m+n\big)\big(h-3+2(4-2m)+3m+n\big)$$

u. s. f. bestimmt. Wählt man für h der Reihe nach die vier Werthe 0, 1, $2-3m-n$, $3-3m-n$, giebt der willkürlichen Constanten A jedesmal einen andern Werth und bildet die Summe der so für u gewonnenen Ausdrücke, so erhält man das allgemeine Integral der in Rede stehenden Differentialgleichung. Die convergenten Reihen, durch die dasselbe dargestellt ist, schreiten nach steigenden oder fallenden Potenzen von z fort, je nachdem m kleiner oder grösser als 2 ist. In dem Grenzfalle $m=2$ ist u gleich der Summe der vier Werthe, die der Ausdruck

$$Az^h$$

annimmt, wenn man darin für h eine Wurzel der Gleichung vierten Grades

$$h(h-1)(h+4+n)(h+3+n) = \frac{q'\mu\lambda^2}{k'E}$$

setzt und die willkürliche Constante A jedesmal anders wählt. Noch in anderen Fällen verliert die entwickelte Form des allgemeinen Integrals der Differentialgleichung ihre Brauchbarkeit; dann nämlich, wenn zwei von den für h angegebenen Werthen einander gleich werden, oder wenn einer der Faktoren, die bei A_1, A_2,... in den für diese Grössen aufgestellten Gleichungen auftreten, verschwindet. Eine brauchbare Form des Integrals erhält man dann, indem man den Werth von m sich unendlich wenig geändert denkt; man findet es dadurch als eine Summe von Potenzreihen, die zum Theil mit $\log z$ multiplicirt sind; die Coëfficienten derselben lassen sich auch direkt aus der Differentialgleichung bestimmen.

Weiter verfolgt sollen hier nur die Fälle werden, dass $m=1$, $n=0$ oder $m=1$, $n=1$ ist. In jedem dieser Fälle lässt sich die Differentialgleichung vierter Ordnung auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung reduciren, und zwar auf solche,

deren Integrale Bessel'sche Funktionen mit reellem oder imaginärem Argumente sind.

Es sei also zunächst

$$m = 1,\ n = 0;$$

das findet statt, wenn der Stab der Breite nach durch 2 parallele Ebenen, der Dicke nach durch 2 Ebenen, die einen sehr kleinen Winkel mit einander machen, begrenzt ist, wenn der Stab also ein sehr spitzes Prisma bildet. Die Differentialgleichung ist dann

$$\frac{q'\mu\lambda^2}{k'E} z u = \frac{d^2}{dz^2} z^3 \frac{d^2u}{dz^2}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{q'\mu\lambda^2}{k'E} u = \frac{1}{z}\frac{d}{dz} z^3 \frac{d}{dz}\frac{1}{z}\frac{d}{dz} z^3 \frac{du}{dz}.$$

Sie wird erfüllt, wenn

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz} z^3 \frac{du}{dz} = u\lambda\sqrt{\frac{q'\mu}{k'E}},$$

und auch, wenn

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz} z^3 \frac{du}{dz} = -u\lambda\sqrt{\frac{q'\mu}{k'E}}$$

ist. Hieraus folgt, dass, wenn man

$$z\lambda\sqrt{\frac{q'\mu}{k'E}} = x$$

setzt, das allgemeine Integral der für u geltenden Differentialgleichung gleich der Summe der allgemeinen Integrale der Differentialgleichungen

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{du}{dx} = u$$

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{du}{dx} = -u$$

ist. Nun seien φ und ψ gewisse Integrale der Gleichungen

$$x\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} = \varphi$$

$$x\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d\psi}{dx} = -\psi,$$

und zwar sei

$$\varphi = 1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{(1.2)^2} + \frac{x^3}{(1.2.3)^2} + \cdots$$

$$\psi = 1 - \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{(1.2)^2} - \frac{x^3}{(1.2.3)^2} + \cdots,$$

φ' und ψ' seien andere Integrale derselben Gleichungen, nämlich

$$\varphi' = \varphi \log x - 2\left(\frac{x}{1^2} + \frac{x^3(1+\frac{1}{2})}{(1.2)^2} + \frac{x^5(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})}{(1.2.3)^2} + \cdots\right),$$

$$\psi' = \psi \log x + 2\left(\frac{x}{1^2} - \frac{x^3(1+\frac{1}{2})}{(1.2)^2} + \frac{x^5(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})}{(1.2.3)^2} \cdots\right);$$

der allgemeine Ausdruck von u ist dann die Summe der mit willkürlichen Constanten multiplicirten Differential-Quotienten $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi'}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{d\psi'}{dx}$.

Es sei für das eine Ende des Stabes x, also auch x unendlich klein, und dieses Ende sei frei; es muss dann für ein unendlich kleines x

$$x^3\frac{d^2u}{dx^3} \text{ und } \frac{d}{dx}x^3\frac{d^2u}{dx^3}$$

verschwinden; das geschieht, wenn die Coëfficienten von $\frac{d\varphi}{dx}$ und $\frac{d\psi'}{dx}$ in dem Ausdruck von u gleich Null gemacht werden, also

$$u = A\frac{d\varphi}{dx} + B\frac{d\psi}{dx}$$

gesetzt wird.

Das zweite Ende des Stabes sei so befestigt, dass für dasselbe u und $\frac{du}{dx}$, also auch $\frac{du}{dx}$, verschwinden müssen; für dieses Ende ist dann

$$0 = A\frac{d\varphi}{dx} + B\frac{d\psi}{dx}$$

und

$$0 = A\frac{d^2\varphi}{dx^2} + B\frac{d^2\psi}{dx^2},$$

also auch, nach den Differentialgleichungen, denen φ und ψ genügen,

$$0 = A\varphi - B\psi,$$

mithin

$$0 = \varphi\frac{d\psi}{dx} + \psi\frac{d\varphi}{dx}$$

oder

$$0 = \frac{d\varphi\psi}{dx}.$$

Dieses ist die Gleichung, aus der die Werthe von λ, d. h. die Schwingungszahlen der Töne, die der Stab geben kann, zu be-

stimmen sind. Zur Entwickelung derselben kann die Methode dienen, die ich bei einem allgemeineren Falle in meiner Arbeit über die Schwingungen einer kreisförmigen Platte[1]) benutzt habe. Multiplicirt man die Differentialgleichungen für φ und ψ

$$\begin{array}{ccc} \text{mit } \psi & \text{oder mit } \frac{d\psi}{dx} & \text{oder mit } \psi \\ -\varphi & \frac{d\varphi}{dx} & \varphi \end{array}$$

und addirt sie jedesmal, so erhält man

$$2\varphi\psi = \frac{d}{dx} x \left(\psi \frac{d\varphi}{dx} - \varphi \frac{d\psi}{dx}\right)$$

$$\psi \frac{d\varphi}{dx} - \varphi \frac{d\psi}{dx} = -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} x^2 \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dx}$$

$$x\left(\psi \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \varphi \frac{d^2\psi}{dx^2}\right) + \frac{d\varphi\psi}{dx} = 0.$$

Transformirt man die letzte von diesen Gleichungen mit Hülfe der identischen Gleichung

$$\frac{d^2\varphi\psi}{dx^2} = \psi \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \varphi \frac{d^2\psi}{dx^2} + 2 \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dx},$$

so wird sie

$$\frac{d\varphi}{dx} \frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{2x} \frac{d}{dx} x \frac{d\varphi\psi}{dx}.$$

Daraus ergiebt sich für $\varphi\psi$ die Differentialgleichung vierter Ordnung

$$4\varphi\psi = -\frac{d^2}{dx^2} x \frac{d}{dx} x \frac{d\varphi\psi}{dx},$$

und diese bestimmt die Coëfficienten B in der Gleichung

$$\varphi\psi = 1 + B_1 x^2 + B_2 x^4 + B_3 x^6 + \ldots,$$

die aus den Ausdrücken von φ und ψ unmittelbar folgt. Man findet

$$B_n = -B_{n-1} n^2 . 2n - 1 . 2n,$$

also, wenn man

$$1 . 2 . 3 \ldots n \text{ durch } n!$$

bezeichnet,

$$\varphi\psi = 1 - \frac{x^2}{(1!)^2 2!} + \frac{x^4}{(2!)^2 4!} - \frac{x^6}{(3!)^2 6!} + \ldots.$$

[1]) S. oben p. 264.

Die Gleichung, die zur Bestimmung der Tonhöhe zu dienen hat, ist daher

$$0 = 1 - \frac{x^2}{(2!)^2 3!} + \frac{x^4}{(3!)^2 5!} - \frac{x^6}{(4!)^2 7!} + \ldots.$$

Es sei x_0 die kleinste positive Wurzel dieser Gleichung, also diejenige, die den Grundton des Stabes bedingt. Ohne Mühe findet man

$$x_0 = 5{,}315.$$

Ist l die Länge des Stabes, so ist aber

$$l\lambda \sqrt{\frac{q'\mu}{k'E}} = x_0;$$

hieraus ist der Werth von λ für den Grundton zu berechnen. Es sei $2a$ die Dicke des Stabes an dem befestigten Ende; es ist dann

$$\frac{q'}{k'} = \frac{3l^2}{a^2},$$

also

$$\lambda = 5{,}315 \sqrt{\frac{E}{3\mu}} \frac{a}{l^2}.$$

Bei dem prismatischen Stabe ist daher, wie bei dem parallelepipedischen die Schwingungszahl des Grundtons mit dem Quadrat der Länge umgekehrt und mit der Dicke direct proportional, falls die Dicke an dem befestigten Ende gemessen wird. Bei gleichen Werthen von a und l ist der Grundton des prismatischen Stabes höher als der des parallelepipedischen; für den letzteren ist nämlich

$$\lambda = 3{,}516 \sqrt{\frac{E}{3\mu}} \frac{a}{l^2},$$

so dass der Grundton des prismatischen Stabes ungefähr die Quinte von dem Grundton des parallelepipedischen ist.

Nun soll untersucht werden, wie gross die Excursionen des freien Endes des prismatischen Stabes sein können, wenn die Dilatationen nirgends eine gewisse Grenze überschreiten sollen.

In irgend einem Querschnitt findet das Maximum der Dilatation an seiner Grenze in den Augenblicken statt, in denen der Stab seine grösste Ausbiegung nach der einen oder

der anderen Seite erlitten hat, und es ist dieses Maximum gleich dem absoluten Werthe von

$$\frac{az}{l}\frac{d^2u}{dx^2}$$

d. i. von

$$\frac{ax_0}{l^2}x\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Dieser Werth erlangt, wenn x von 0 bis x_0 wächst, ein Maximum bei einem gewissen Werthe von x, der berechnet werden soll. Man bezeichne die Werthe von φ und ψ für $x = x_0$ durch φ_0 und ψ_0; es ist dann

$$\varphi_0 = 19{,}2772 \qquad \psi_0 = -0{,}2934$$

und man kann setzen

$$u = -C\left(\varphi_0\frac{d\psi}{dx} + \psi_0\frac{d\varphi}{dx}\right),$$

wo C eine Constante bedeutet. Die Bedingung für das gesuchte Maximum ist daher

$$0 = \varphi_0\frac{d}{dx}x\frac{d^3\psi}{dx^3} + \psi_0\frac{d}{dx}x\frac{d^3\varphi}{dx^3}$$

oder

$$0 = \varphi_0\left(\frac{1}{3!} - \frac{2x}{1!4!} + \frac{3x^2}{2!5!} - \frac{4x^3}{3!6!} + \ldots\right) - \psi_0\left(\frac{1}{3!} + \frac{2x}{1!4!} + \frac{3x^2}{2!5!} + \frac{4x^3}{3!6!} + \ldots\right).$$

Die kleinste Wurzel dieser Gleichung und die einzige, die zwischen 0 und x_0 liegt, ist

$$= 3{,}688.$$

Für diesen Werth von x ist

$$x\left(\varphi_0\frac{d^3\psi}{dx^3} + \psi_0\frac{d^3\varphi}{dx^3}\right) = -4{,}992.$$

Für $x = x_0$ ist derselbe Ausdruck $= -4{,}333$. Bezeichnet man die grösste Dilatation durch ε, so ist daher

$$\varepsilon = C\frac{ax_0}{l^2}4{,}992.$$

Nun sei U die grösste Elongation des freien Endes des Stabes; dann ist

$$U = C(\varphi_0 - \psi_0)$$

d. h.

$$= C.19{,}563,$$

also

$$U = \varepsilon \frac{l^2}{a x_0} 3{,}919,$$

oder bei Rücksicht auf die Gleichung, die λ bestimmt,

$$U = \varepsilon \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{E}{3\mu}} . 3{,}919.$$

Bei den, dem Grundton entsprechenden Schwingungen des parallelepipedischen Stabes findet das Maximum der Dilatation an dem befestigten Ende statt, und zwischen diesem Maximum und der grössten Elongation des freien Endes besteht die Beziehung

$$U = \varepsilon \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{E}{3\mu}} .$$

Man sieht hieraus, dass bei gleichem Material und gleicher Schwingungsdauer der prismatische Stab etwa 4mal so grosse Elongationen des freien Endes geben kann, als der parallelepipedische.

Jetzt soll in ähnlicher Weise der Fall behandelt werden, dass der Stab einen sehr spitzen Kegel bildet. Die Differentialgleichung seiner Schwingungen ist dann den vorausgeschickten Bemerkungen zufolge

$$\frac{q' \mu \lambda^2}{k' E} z^2 u = \frac{d^2}{dz^2} z^4 \frac{d^2 u}{dz^2} .$$

Dieselbe lässt sich schreiben

$$\frac{q' \mu \lambda^2}{k' E} u = \frac{1}{z^3} \frac{d}{dz} z^3 \frac{d}{dz} \frac{1}{z^3} \frac{d}{dz} z^3 \frac{du}{dz},$$

und sie wird erfüllt, wenn man

$$\frac{1}{z^3} \frac{d}{dz} z^3 \frac{du}{dz} = \pm u \lambda \sqrt{\frac{q' \mu}{k' E}}$$

setzt. Macht man wiederum

$$x = z \lambda \sqrt{\frac{q' \mu}{k' E}},$$

so ist daher der allgemeine Ausdruck von u die Summe der allgemeinen Integrale der beiden Differentialgleichungen

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + 3\frac{du}{dx} = \pm u.$$

Gebraucht man die Zeichen φ und ψ, φ' und ψ' in derselben Bedeutung wie oben, so ist daher u eine lineare homogene Funktion von $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, $\frac{d^2\psi}{dx^2}$, $\frac{d^2\varphi'}{dx^2}$, $\frac{d^2\psi'}{dx^2}$, deren Coëfficienten willkürliche Constanten sind. Aber das eine Ende des Stabes soll frei und für dasselbe z unendlich klein sein; es muss daher für ein unendlich kleines x

$$x^4\frac{d^2u}{dx^2} \text{ und } \frac{d}{dx}x^4\frac{d^2u}{dx^2}$$

verschwinden; das erfordert, dass die Coëfficienten von $\frac{d^2\varphi'}{dx^2}$ und $\frac{d^2\psi'}{dx^2}$ gleich Null gemacht werden. Man hat daher

$$u = A\frac{d^2\varphi}{dx^2} + B\frac{d^2\psi}{dx^2}.$$

Für das zweite Ende des Stabes sei wieder $u = 0$, und $\frac{du}{dx} = 0$, d. h.

$$A\frac{d^2\varphi}{dx^2} + B\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0$$

$$A\frac{d^3\varphi}{dx^3} + B\frac{d^3\psi}{dx^3} = 0;$$

es muss dann für dasselbe auch

$$A\frac{d\varphi}{dx} - B\frac{d\psi}{dx} = 0,$$

mithin

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d\psi}{dx}\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$$

oder

$$\frac{d}{dx}\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dx} = 0$$

sein. Aus der für $\varphi\psi$ gegebenen Entwickelung folgt aber

$$-\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dx} = 1 - \frac{x^2}{1!2!3!} + \frac{x^4}{2!3!5!} - \frac{x^6}{3!4!7!} + \cdots;$$

die für das befestigte Ende zu erfüllende Gleichung ist also

$$0 = \frac{1}{2!3!} - \frac{x^2}{1!3!5!} + \frac{x^4}{2!4!7!} - \frac{x^6}{3!5!9!} + \cdots$$

Wird wiederum die kleinste, also dem Grundton des Stabes entsprechende Wurzel dieser Gleichung durch x_0 bezeichnet, so ergiebt sich

$$x_0 = 8{,}718\,.$$

Ist wieder l der Werth von z für das befestigte Ende des Stabes, so ist auch hier

$$l\lambda\sqrt{\frac{q'\mu}{k'E}} = x_0.$$

Bezeichnet man durch q_0 und k_0 die Werthe von q und k für $z = l$, so hat man

$$\frac{q'}{k'} = \frac{q_0}{k_0}\,l^2.$$

Daraus folgt dann

$$\lambda = 8{,}718\,\sqrt{\frac{k_0 E}{q_0\mu}}\,\frac{1}{l^2}\,.$$

Auch hier ist also die Schwingungszahl des Grundtones mit dem Quadrat der Länge umgekehrt proportional, falls der Querschnitt am befestigten Ende sich gleich bleibt. Bei einem cylindrischen, einseitig befestigten Stabe, bei dem q und k die Werthe q_0 und k_0 haben, und der die Länge l besitzt, ist für den Grundton

$$\lambda = 3{,}516\,.\,\sqrt{\frac{k_0 E}{q_0\mu}}\,\frac{1}{l^2}\,,$$

so dass die Schwingungszahlen der Grundtöne des conischen und des cylindrischen Stabes sich wie 8,718 : 3,516 verhalten. Was die Dilatationen in dem conischen Stabe betrifft, so ist das Maximum derselben in irgend einem Querschnitt

$$\frac{a x_0}{l^2}\,x\,\frac{d^2u}{dx^2}\,,$$

wenn a bedeutet das Maximum des Abstandes in der Richtung der Schwingungen eines Punktes im Umfange des befestigten Querschnitts vom Schwerpunkt dieses. Das Maximum hiervon findet bei einem Werthe von x statt, der der Gleichung

$$0 = \frac{d}{dx}\,x\,\frac{d^2u}{dx^2}$$

genügt. Für $x = x_0$ ist

$$\frac{d\varphi}{dx} = 19{,}024 \qquad \frac{d\psi}{dx} = 0{,}099534,$$

man hat daher

$$u = C\left(0{,}09953\,\frac{d^2\varphi}{dx^2} + 19{,}024\,\frac{d^2\psi}{dx^2}\right),$$

und jene Gleichung ist

$$0 = 0{,}09953\left(\frac{1}{4!} + \frac{2x}{1!5!} + \frac{3x^2}{2!6!} + \ldots\right) + 19{,}024\left(\frac{1}{4!} - \frac{2x}{1!5!} + \frac{3x^2}{3!6!} - \ldots\right).$$

Die kleinste Wurzel dieser Gleichung ist

$$x = 4{,}464.$$

Für diesen Werth von x ist

$$\frac{1}{C}\,x\,\frac{d^2u}{dx^2} = 1{,}388.$$

Für $x = x_0$ ist derselbe Ausdruck $= 0{,}9734$. Bedeutet wieder ε das Maximum der Dilatation, so hat man also

$$\varepsilon = C\,.\,\frac{a x_0}{l^2}\,.\,1{,}388.$$

Ist U die grösste Elongation des freien Endes des Stabes, so ist

$$U = C\,.\,9{,}562,$$

daher

$$U = \varepsilon\,.\,\frac{l^2}{a x_0}\,.\,6{,}889$$

oder, da

$$\frac{l^2}{x_0} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{k_0 E}{q_0 \mu}},$$

$$U = \varepsilon\,\frac{1}{\lambda}\,\frac{1}{a}\sqrt{\frac{k_0 E}{q_0 \mu}}\,.\,6{,}889.$$

Für einen cylindrischen Stab, dessen befestigtes Ende dieselben Dimensionen besitzt, ist beim Grundton

$$U = \varepsilon\,\frac{1}{\lambda}\,\frac{1}{a}\sqrt{\frac{k_0 E}{q_0 \mu}},$$

so dass bei gleichem Material und gleicher Schwingungsdauer der conische Stab etwa 7 mal so grosse Excursionen des freien Endes geben kann, als der cylindrische.

Ueber die Reflexion und Brechung des Lichts an der Grenze krystallinischer Mittel.[1])

Die Gesetze der Fortpflanzung des Lichts in einem krystallinischen Mittel, die Fresnel theils durch Versuche, theils durch Speculation aufgefunden hat, sind aus den Differentialgleichungen der Theorie der Elasticität fester Körper zuerst von Hrn. Neumann abgeleitet[2]); Hr. Neumann hat auch zuerst Formeln für die Intensitäten der an der Oberfläche eines Krystalls reflectirten und gebrochenen Lichtwellen entwickelt und ihre Uebereinstimmung mit der Erfahrung in vielen Fällen nachgewiesen[3]). Derselbe Gegenstand ist später in anderer Weise von Mac Cullagh behandelt[4]). Der einzige Unterschied in den Resultaten der beiden Forscher ist der, dass, während nach Hrn. Neumann die Schwingungsrichtung einen kleinen Winkel mit der Wellenebene bildet, nach Mac Cullagh dieselbe genau parallel dieser ist; ein Unterschied, der aber insofern wenig Erheblichkeit besitzt, als die Neumann'sche Theorie leicht so modificirt werden kann, dass er fortfällt, wie auch Hr. Neumann selbst bemerkt hat. Dagegen scheinen beim ersten Anblick die Ausgangspunkte der beiden Theorien wesentlich verschieden, ja entgegengesetzt zu sein. Hr. Neumann geht nämlich von der Annahme aus, dass der Aether in Bezug auf die Lichtschwingungen sich wie ein elastischer fester Körper verhält, auf dessen Theile keine anderen Kräfte wirken, als die durch ihre relativen Verschiebungen erzeugten; und Mac Cullagh stellt für das Potential der auf ein Aethertheilchen ausgeübten Kräfte einen Ausdruck auf, der nicht übereinstimmt mit dem Potential der durch die relativen Verschiebungen der Theile eines elastischen Körpers hervorgerufenen Kräfte; auch bei der Theorie von Mac Cullagh kann man den Aether als einen elastischen Körper betrachten, man muss ihn aber betrachten als einen, der noch anderen Kräften unter-

[1]) Abh. der Berl. Akad. 1876.
[2]) Pogg. Ann. Bd. 25.
[3]) Abh. der Berl. Akad. 1835.
[4]) Trans. of the Irish Acad. Vol. XXI.

worfen ist, als den durch seine Elasticität bedingten. Von diesen anderen Kräften lässt sich indessen aus dem von Mac Cullagh aufgestellten Potentialausdruck beweisen, dass sie, bezogen auf irgend einen Theil des Aethers in einem homogenen Körper, sich auf Druckkräfte reduciren, die auf die Oberfläche dieses Theiles wirken. Man kann daher sagen, dass auch die Theorie von Mac Cullagh auf der Annahme beruht, dass auf die Theile des Aethers keine Kräfte wirken ausser den durch seine Elasticität bedingten, auf die Flächen aber, die die Grenzen heterogener Mittel bilden, Druckkräfte ausgeübt werden, die anderen Ursprungs sind. Solche Druckkräfte setzt nun aber auch die Neumann'sche Theorie voraus; ihre Annahme ist es, die dazu berechtigt, die longitudinalen Wellen ausser Acht zu lassen, wie es bei dieser Theorie geschieht; sie müssen bewirken, dass longitudinale Wellen bei der Reflexion und Brechung der Lichtwellen nicht entstehen. Die beiden genannten Theorien dürfen daher als vollkommen übereinstimmend angesehen werden. Ich erlaube mir eine Behandlung des Gegenstandes dieser Theorien der Akademie vorzulegen, die, wie ich glaube, allgemeiner und übersichtlicher ist, als die bisher gegebenen es sind.

Es werden zuerst die partiellen Differentialgleichungen aufgestellt, denen die transversalen Bewegungen des Aethers in einem krystallinischen Mittel genügen, und die Bedingungen, die dieselben an der ebenen Grenze zweier verschiedenen krystallinischen Mittel erfüllen müssen. Es wird dann eine particuläre Lösung jener Differentialgleichungen gebildet, die diesen Bedingungen entspricht. Diese Lösung stellt ein System ebener Wellen dar, die theils in dem einen, theils in dem anderen Mittel sich bewegen. Eine von diesen Wellen kann beliebig gegeben sein: beliebig in Bezug anf ihre Richtung und in Bezug auf das Gesetz, welches die Grösse der Verrückung eines Punktes mit der Zeit verbindet; die Richtungen der anderen Wellen sind dann durch die Wurzeln zweier biquadratischen Gleichungen bestimmt, von denen die eine auf Wellen in dem einen, die andere auf Wellen in dem anderen Mittel sich bezieht. Eine Wurzel der einen dieser Gleichungen führt auf die gegebene Welle zurück; es besteht daher das ganze System

aus acht Wellen, von denen vier dem einen, vier dem anderen Mittel angehören. Für jede dieser Wellen ist mit ihrer Richtung die Richtung der Verrückung vollständig, und die Grösse der Verrückung in jedem Augenblick bis auf eine multiplicative Constante bestimmt. Nennt man diese Constante die Amplitude der Welle (indem man einen bei Sinusschwingungen üblichen Ausdruck auf Schwingungen allgemeinerer Art überträgt), so bestehen zwischen den Amplituden der acht Wellen vier lineare, homogene Gleichungen; neben der Amplitude der gegebenen Welle können also noch die Amplituden von drei anderen willkürlich gewählt werden. Haben die beiden biquadratischen Gleichungen nur reelle Wurzeln, so sind in jedem Mittel zwei einfallende Wellen vorhanden und zwei, die reflectirt oder gebrochen sind; um Fälle zu erhalten, die durch das Experiment verwirklicht werden können, hat man dann im Allgemeinen die Amplituden von drei einfallenden Wellen gleich Null zu setzen, so dass nur eine einfallende Welle übrig bleibt. Aber die biquadratischen Gleichungen können auch complexe Wurzeln haben; das Entsprechende tritt bei isotropen Mitteln ein, wenn totale Reflexion stattfindet. Um dann auf Fälle zu kommen, die der Beobachtung zugänglich sind, hat man die Constanten, die die Bedingung. dass nur eine einfallende Welle da sei, noch unbestimmt lässt, so zu wählen, dass die Verrückung nirgends unendlich wird; es ist dabei die Aufgabe zu lösen, eine Function eines complexen Arguments zu finden, deren reeller Theil für reelle Werthe des Arguments gegeben ist, und die nicht unendlich wird für Werthe des Arguments, deren imaginärer Theil gleich $\sqrt{-1}$, multiplicirt mit einer positiven Grösse, ist.

Bei der Ableitung der Gleichungen zwischen den Amplituden eines Systems von acht zusammengehörigen Wellen ist von dem Begriff der Strahlen kein Gebrauch gemacht; es scheint mir das ein Vorzug des eingeschlagenen Weges zu sein wegen der Schwierigkeiten, welche der genannte Begriff darbietet. Bei der Entscheidung der Frage, ob eine Welle eine einfallende ist oder eine reflectirte oder gebrochene, kann derselbe aber nicht umgangen werden; aus diesem Grunde ist bei den einleitenden Betrachtungen auch auf den Begriff des

Strahles, der zu einer gegebenen ebenen Welle gehört, eingegangen, und es ist eine Definition für ihn aufgestellt, die, wie ich glaube, Vorzüge vor der gewöhnlichen darbietet.

Die für den Fall zweier krystallinischer Mittel entwickelten Formeln können eine unmittelbare Anwendung bei der Reflexion und Brechung des Lichts an einer Zwillingsfläche eines Krystalls finden; mit Leichtigkeit ergeben sich aus ihnen die Formeln für den einfacheren Fall, dass nur das eine von den beiden Mitteln krystallinisch, das andere isotrop ist.

Wir betrachten einen homogenen, elastischen, festen Körper, auf dessen Theile keine andern Kräfte wirken, als die durch die relativen Verschiebungen erzeugten. Die Dichtigkeit sei $= 1$ und u, v, w seien die Componenten der unendlich kleinen Verrückung, die ein Punkt, dessen Coordinaten bei der Ruhe x, y, z sind, zur Zeit t erfahren hat. Man hat dann die Differentialgleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}, \end{cases}$$

in denen

$$(2)\qquad \begin{cases} X_x = \frac{\partial F}{\partial x_x} & Y_z = Z_y = \frac{\partial F}{\partial y_z} \\ Y_y = \frac{\partial F}{\partial y_y} & Z_x = X_z = \frac{\partial F}{\partial z_x} \\ Z_z = \frac{\partial F}{\partial z_z} & X_y = Y_x = \frac{\partial F}{\partial x_y} \end{cases}$$

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad y_z = z_y = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$y_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad z_x = x_z = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$z_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad x_y = y_x = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

ist und F eine homogene Function zweiten Grades der sechs Argumente $x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y$ mit constanten Coëfficienten

bedeutet. Diese Coëfficienten, 21 an der Zahl, sind die Constanten der Elasticität des Körpers und F ist das auf die Volumeneinheit bezogene Potential der durch die relativen Verschiebungen hervorgerufenen Kräfte.

Es handelt sich zunächst darum, festzustellen, wie man die Constanten der Elasticität zu wählen hat, wenn der elastische Körper der Aether in einem krystallinischen Mittel sein soll; hierzu führt die Betrachtung einer particulären Lösung der angegebenen Differentialgleichungen, die ebene Wellen darstellt. Es seien l, m, n die Cosinus der Winkel, welche eine Richtung (die der Wellennormale), α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche eine zweite Richtung (die der Verrückung) mit den Coordinatenaxen bildet; man setze

$$\begin{gathered} lx + my + nz = s \\ u = \alpha\sigma,\ v = \beta\sigma,\ w = \gamma\sigma \end{gathered} \tag{3}$$

und nehme σ als Function von t und s an; aus jeder der drei Differentialgleichungen für u, v, w findet man dann eine für σ; sind l, m, n beliebig gegeben, so lassen sich α, β, γ so bestimmen, dass diese drei Gleichungen für σ identisch mit einander werden. Die linken Seiten derselben sind

$$\alpha\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2},\quad \beta\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2},\quad \gamma\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}.$$

Um ihre rechten zu bilden, hat man zu beachten, dass

$$\begin{aligned} x_x &= \alpha l\frac{\partial\sigma}{\partial s} & y_z &= (\beta n + \gamma m)\frac{\partial\sigma}{\partial s} \\ y_y &= \beta m\frac{\partial\sigma}{\partial s} & z_x &= (\gamma l + \alpha n)\frac{\partial\sigma}{\partial s} \\ z_z &= \gamma n\frac{\partial\sigma}{\partial s} & x_y &= (\alpha m + \beta l)\frac{\partial\sigma}{\partial s} \end{aligned}$$

und dass jeder der Differentialquotienten von F nach x_x, y_y, .. eine lineare, homogene Function dieser Argumente ist. Jeder dieser Differentialquotienten ist daher gleich $\frac{\partial\sigma}{\partial s}$, multiplicirt mit einem constanten Factor, einem Factor, der gleich dem Werthe ist, den er selbst annimmt, wenn man in ihm

$$\begin{cases} x_x = \alpha l & y_z = \beta n + \gamma m \\ y_y = \beta m & z_x = \gamma l + \alpha n \\ z_z = \gamma n & x_y = \alpha m + \beta l \end{cases} \tag{4}$$

setzt. Diese Werthe von x_x, y_y . . mögen durch x'_x, y'_y . . bezeichnet werden und der Werth, den F bei ihnen erhält, durch F'. Man hat dann

$$\frac{\partial F}{\partial x_x} = \frac{\partial F'}{\partial x'_x}\frac{\partial \sigma}{\partial s}$$

und fünf andere Gleichungen, die dieser ähnlich sind. Hiernach ergiebt sich aus der ersten der Gleichungen 1)

$$\alpha \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \left(l \frac{\partial F'}{\partial x'_x} + m \frac{\partial F'}{\partial x'_y} + n \frac{\partial F'}{\partial x'_z} \right) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2}$$

oder

$$\alpha \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{\partial F'}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2},$$

da

$$\frac{\partial x'_x}{\partial \alpha} = l \qquad \frac{\partial x'_y}{\partial \alpha} = m \qquad \frac{\partial x'_z}{\partial \alpha} = n$$

$$\frac{\partial y'_y}{\partial \alpha} = 0 \qquad \frac{\partial y'_z}{\partial \alpha} = 0 \qquad \frac{\partial z'_z}{\partial \alpha} = 0$$

ist. Auf ähnlichem Wege findet man aus der zweiten und dritten der Gleichungen 1)

$$\beta \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{\partial F'}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2} \quad \text{und} \quad \gamma \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{\partial F'}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2}.$$

Die drei für σ abgeleiteten Gleichungen werden erfüllt durch jede Lösung der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2}, \tag{5}$$

falls

$$\frac{\partial F'}{\partial \alpha} = V^2 \alpha, \quad \frac{\partial F'}{\partial \beta} = V^2 \beta, \quad \frac{\partial F'}{\partial \gamma} = V^2 \gamma \tag{6}$$

ist, wo V^2 eine zu bestimmende Constante bedeutet. Die allgemeine Lösung der Gleichung 5) sagt aus, dass σ die Summe einer willkürlichen Function von $s - Vt$ und einer willkürlichen Function von $s + Vt$ ist; die Gleichungen 3) stellen daher zwei ebene Wellen dar, deren Normalen die Richtung (l, m, n) haben, die mit der Geschwindigkeit V, die eine in dieser Richtung, die andere in der entgegengesetzten, sich fortpflanzen, und in denen die Verrückungen in der Richtung

(α, β, γ) stattfinden. Die Gleichungen 6), welche in Verbindung mit der Gleichung

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

zur Bestimmung von α, β, γ und V dienen müssen, sind dieselben, wie diejenigen, die man aufzulösen hat, um die Hauptaxen der Fläche zweiten Grades zu ermitteln, deren Gleichung:

$$\frac{1}{r^2} = 2F'$$

ist, wenn r die Länge des Radius vector bedeutet, der die Richtung (α, β, γ) hat. Diese Fläche zweiten Grades ist ein Ellipsoid, da F nicht negativ werden kann, widrigenfalls das Gleichgewicht, das stattfindet, wenn u, v, w verschwinden, labil sein würde. Die Richtung der Verrückung kann die Richtung einer jeden der Halbaxen derselben sein; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist immer gleich dem Reciproken derselben Halbaxe.

Wenn das betrachtete Mittel ein isotropes ist, so ist das bezeichnete Ellipsoid ein Rotationsellipsoid, dessen Rotationsaxe die Wellennormale ist; eine von den drei Wellen, die in irgend einer Richtung sich fortpflanzen können, ist eine longitudinale, die beiden andern, die gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzen, sind transversale; die letzteren allein sind Lichtwellen. Bei allen Krystallen, die es giebt, ist die Doppelbrechung nur eine kleine; hierauf gestützt, darf man annehmen, dass bei jedem Krystall die Constanten der Elasticität des Aethers nur wenig von den Werthen abweichen, die sie in einem isotropen Körper haben können, und dass daher von den drei Wellen, die in ihm in einer Richtung sich fortpflanzen, die eine nahezu longitudinal ist, die beiden andern nahezu transversal sind, und dass die letzteren die Lichtwellen ausmachen. Das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, also V^2, ist im Allgemeinen aus einer kubischen Gleichung zu bestimmen; nach Fresnel sind aber die Werthe von V^2 für die beiden Lichtwellen die Wurzeln einer quadratischen Gleichung. Nach der ursprünglichen Theorie des Hrn. Neumann hat man bei passend gewähltem Coordinatensystem

$$2F = A^2 x_x^2 + B^2 y_y^2 + C^2 z_z^2 + a^2 y_z^2 + b^2 z_x^2 + c^2 x_y^2 + 2a^2 y_y z_z + 2b^2 z_z x_x + 2c^2 x_x y_y$$

und zwischen den Constanten A, B, C a, b, c die Relationen

$$(B^2 - a^2)(C^2 - a^2) = 4a^4$$
$$(C^2 - b^2)(A^2 - b^2) = 4b^4$$
$$(A^2 - c^2)(B^2 - c^2) = 4c^4.$$

Hr. Neumann hat gezeigt, dass in Folge dieser Relationen die kubische Gleichung für V^2 zerfällt in die lineare:

$$A^2 l^2 + B^2 m^2 + C^2 n^2 - V^2 = 0,$$

die sich auf die nahe longitudinale Welle bezieht, und die quadratische:

$$\frac{l^2}{a^2 - V^2} + \frac{m^2}{b^2 - V^2} + \frac{n^2}{c^2 - V^2} = 0,$$

die für die nahe transversalen Wellen gilt. Die letztere ist dieselbe, die Fresnel für die Quadrate der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden Lichtwellen aufstellt. Die Richtungen der Verrückung in diesen, die die Theorie ergiebt, stimmen mit den von Fresnel angegebenen nahe, nicht genau, überein, wenn man Schwingungsrichtung und Polarisationsrichtung als gleichbedeutend annimmt.

Aber es giebt, wie Green [1]) gefunden hat, einen Ausdruck für $2F$, der zu Resultaten führt, die in Bezug auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten und die Schwingungsrichtungen genau mit den Fresnel'schen Gesetzen übereinstimmen. Man gelangt zu demselben, wenn man die Bedingungen dafür aufsucht, dass von den drei Wellen, die in einer Richtung fortschreiten können, die eine ihre Verrückung genau parallel der Wellennormale hat. Es ergiebt sich so für ein beliebiges Coordinatensystem:

$$\begin{aligned} 2F = {} & a_0 (x_x + y_y + z_z)^2 \\ & + a_{11}(y_z^2 - 4 y_y z_z) + a_{22}(z_x^2 - 4 z_z x_x) + a_{33}(x_y^2 - 4 x_x y_y) \\ & + 2a_{23}(2 y_z x_x - y_z z_x) + 2a_{31}(2 z_x y_y - z_y x_y) + 2a_{12}(2 x_y z_z - x_z y_z). \end{aligned} \quad (7)$$

wo die Constanten a beliebige Werthe haben können. Es ist

1) Transactions of the Cambridge Philos. Soc. 1839.

leicht dieses Resultat zu verificiren und nachzuweisen, dass, wenn die Gleichung (7) besteht, in jeder Richtung genau longitudinale, ebene Wellen sich fortpflanzen können. Substituirt man nämlich in (7) die Werthe von x_x, y_y,.. aus (4), so erhält man nach leichter Umformung

$$\begin{aligned} 2F' = {} & a_0(\alpha l+\beta m+\gamma n)^2 \\ & +a_{11}(\gamma m-\beta n)^2+a_{22}(\alpha n-\gamma l)^2+a_{33}(\beta l-\alpha m)^2 \\ & +2a_{23}(\alpha n-\gamma l)(\beta l-\alpha m)+2a_{31}(\beta l-\alpha m)(\gamma m-\beta n) \\ & +2a_{12}(\gamma m-\beta n)(\alpha n-\gamma l); \end{aligned}$$

da:

$$l^2+m^2+n^2=1$$

und da jede der sechs Grössen a_{11}, a_{22},.. in dem Ausdrucke von $2F'$ mit zwei, in Bezug auf α, β, γ linearen Faktoren, die für $a=l$, $\beta=m$, $\gamma=n$ verschwinden, multiplicirt ist, so ergiebt sich hieraus für $\alpha=l$, $\beta=m$, $\gamma=n$;

$$\frac{\partial F'}{\partial \alpha}=a_0\alpha, \quad \frac{\partial F'}{\partial \beta}=a_0\beta, \quad \frac{\partial F'}{\partial \gamma}=a_0\gamma.$$

Die Gleichungen (6) werden daher durch die genannten Werthe von α, β, γ erfüllt, wenn $V^2=a_0$ gemacht wird; eine von den drei Wellen ist eine longitudinale und $\sqrt{a_0}$ ist ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Die beiden andern Wellen sind daher genau transversale und für sie ist:

$$\alpha l+\beta m+\gamma n=0; \tag{8}$$

aus dieser Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen (6) sind ihre Schwingungsrichtungen und Fortpflanzungsgeschwindigkeiten zu bestimmen. Man setze:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \gamma m-\beta n \\ \mathfrak{b} &= \alpha n-\gamma l \\ \mathfrak{c} &= \beta l-\alpha m, \end{aligned} \tag{9}$$

d. h. man bezeichne durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Cosinus der Winkel, welche die Richtung, die senkrecht auf den Richtungen (l, m, n) und (α, β, γ) ist, mit den Coordinatenaxen bildet; man setze ferner

$$2\mathfrak{F}=a_{11}\mathfrak{a}^2+a_{22}\mathfrak{b}^2+a_{33}\mathfrak{c}^2+2a_{23}\mathfrak{bc}+2a_{31}\mathfrak{ca}+2a_{12}\mathfrak{ab}, \tag{10}$$

so dass bei Rücksicht auf (8)

$$F'=\mathfrak{F} \tag{11}$$

ist. Da aus (9):

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathfrak{b}n - \mathfrak{c}m \\ \beta &= \mathfrak{c}l - \mathfrak{a}n \\ \gamma &= \mathfrak{a}m - \mathfrak{b}l \end{aligned} \tag{12}$$

folgt, so werden dann die Gleichungen (6):

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}} - V^2\mathfrak{b}\right)n - \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}} - V^2\mathfrak{c}\right)m = 0$$

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}} - V^2\mathfrak{c}\right)l - \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{a}} - V^2\mathfrak{a}\right)n = 0$$

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{a}} - V^2\mathfrak{a}\right)m - \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}} - V^2\mathfrak{b}\right)l = 0$$

oder

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{a}} = V^2\mathfrak{a} + \mu l \\ \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}} = V^2\mathfrak{b} + \mu m \\ \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}} = V^2\mathfrak{c} + \mu n, \end{cases} \tag{13}$$

wo μ eine zu bestimmende Grösse bedeutet. Diese Gleichungen in Verbindung mit

$$\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 = 1$$

und

$$l\mathfrak{a} + m\mathfrak{b} + n\mathfrak{c} = 0$$

dienen zur Bestimmung von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, V^2, μ. Es sind das dieselben Gleichungen, wie diejenigen, die man aufzulösen hat, um die Hauptaxen der Ellipse zu finden, in der das sogenannte Elasticitäts-Ellipsoid, das Ellipsoid nämlich, dessen Gleichung

$$\frac{1}{r^2} = 2\mathfrak{F} \tag{14}$$

ist, wenn r die Länge des Radius vector bedeutet, der die Richtung ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$) hat, von der durch seinen Mittelpunkt gelegten Wellenebene geschnitten wird. Es sprechen diese Gleichungen die Fresnel'schen Gesetze in Betreff der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten und Polarisationsrichtungen der beiden Lichtwellen aus, wenn man die Polarisationsrichtung und die Schwingungsrichtung als zusammenfallend annimmt.

Die in (13) vorkommende Grösse μ steht in einer gewissen Beziehung zu der Richtung des Strahles, der zur Wellennormale (l, m, n) gehört; es soll diese Beziehung abgeleitet und daher zunächst eine Definition der Strahlenrichtung gegeben werden.

In dem Mittel, in dem eine ebene Lichtwelle fortschreitet, denke man sich eine beliebige Ebene und nenne p, q, r die Cosinus der Winkel, die ihre Normale mit den Coordinatenaxen bildet; man fasse die auf die Zeiteinheit bezogene Arbeit des auf die Flächeneinheit bezogenen Druckes ins Auge, der auf ein Element dieser Ebene von der einen Seite her ausgeübt wird. Diese Arbeit ist:

$$(p X_x + q X_y + r X_z)\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$+ (p Y_x + q Y_y + r Y_z)\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$+ (p Z_x + q Z_y + r Z_z\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Berechnet man $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ aus (3) und benutzt, dass

$$\alpha X_x + \beta X_y + \gamma X_z = \frac{\partial F'}{\partial l}\frac{\partial \sigma}{\partial s}$$

$$\alpha Y_x + \beta Y_y + \gamma Y_z = \frac{\partial F'}{\partial m}\frac{\partial \sigma}{\partial s}$$

$$\alpha Z_x + \beta Z_y + \gamma Z_z = \frac{\partial F'}{\partial n}\frac{\partial \sigma}{\partial s}$$

ist, wie aus einer Rechnung sich ergiebt, die derjenigen genau entspricht, welche bei der Ableitung der Gleichung (5) durchgeführt ist, so wird dieser Ausdruck

$$\left(p\frac{\partial F'}{\partial l} + q\frac{\partial F'}{\partial m} + r\frac{\partial F'}{\partial n}\right)\frac{\partial \sigma}{\partial s}\frac{\partial \sigma}{\partial t}.$$

Nun sei S eine Richtung, die dadurch bestimmt ist, dass

$$\cos(Sx) : \cos(Sy) : \cos(Sz) = \frac{\partial F'}{\partial l} : \frac{\partial F'}{\partial m} : \frac{\partial F'}{\partial n};$$

die genannte Arbeit verschwindet dann, falls die Ebene, deren Normale die Richtung (p, q, r) hat, der Richtung S parallel ist, erhält aber in jedem andern Falle von Null verschiedene Werthe. Der Erfahrung zufolge kann die gedachte Lichtbe-

wegung auf der einen Seite einer Ebene bestehen, während auf der andern Ruhe stattfindet, falls die Ebene dem Strahle parallel ist, der der Wellenebene entspricht. Es kann die Richtung des Strahles keine andere sein, als die Richtung S.

Aus (11) und (9) folgt nun:

$$\frac{\partial F'}{\partial l} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}}\beta - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}}\gamma$$
$$\frac{\partial F'}{\partial m} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{a}}\gamma - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}}\alpha$$
$$\frac{\partial F'}{\partial n} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}}\alpha - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{a}}\beta;$$

hieraus, aus (13), (9) und den Gleichungen:

$$l = \beta\,\mathfrak{c} - \gamma\,\mathfrak{b}$$
$$m = \gamma\,\mathfrak{a} - \alpha\,\mathfrak{c}$$
$$n = \alpha\,\mathfrak{b} - \beta\,\mathfrak{a}$$

folgt weiter

$$\frac{\partial F'}{\partial l} = V^2 l - \mu\,\mathfrak{a}$$
$$\frac{\partial F'}{\partial m} = V^2 m - \mu\,\mathfrak{b}$$
$$\frac{\partial F'}{\partial n} = V^2 n - \mu\,\mathfrak{c}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit l, m, n oder quadrirt sie und addirt jedesmal, so erhält man:

$$l\frac{\partial F'}{\partial l} + m\frac{\partial F'}{\partial m} + n\frac{\partial F'}{\partial n} = V^2$$
$$\left(\frac{\partial F'}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial m}\right)^2 + \left(\frac{\partial F'}{\partial n}\right)^2 = V^4 + \mu^2.$$

Ist ε der Winkel, den der Strahl mit der Wellennormale bildet, so ergiebt sich hieraus:

$$\cos\varepsilon = \frac{V^2}{\sqrt{V^4 + \mu^2}}$$

oder, wenn das Vorzeichen von ε passend gewählt wird

$$V^2 \cos\varepsilon = \mu. \tag{15}$$

Nachdem durch die Betrachtung einer ebenen Welle die Funktion F für den Fall, dass der Körper, auf den sie sich bezieht, der Aether in einem krystallinischen Mittel ist, gefunden ist, sind auch die allgemeinen Differentialgleichungen für die Bewegung dieses Aethers bekannt. Es haben dieselben particuläre Lösungen, bei denen

$$x_x + y_y + z_z = 0,$$

d. h. die Aenderung der Dichtigkeit gleich Null ist. Nur diese Lösungen sollen hier in Betracht gezogen werden; es soll nämlich angenommen werden, dass bei der Lichtbewegung immer die Dichtigkeit ungeändert bleibt, und dass auch bei der Reflexion und Brechung des Lichts keine Bewegungen entstehen. bei denen die Dichtigkeit des Aethers sich ändert. Die Berechtigung zu dieser Annahme liegt darin, dass sie auf keinen inneren Widerspruch führt und Resultate giebt, die mit der Beobachtung näherungsweise übereinstimmen. Da das mit a_0 behaftete Glied in dem Ausdrucke von $2F$, der in (7) aufgestellt ist, mit dem Quadrate von $x_x + y_y + z_z$ multiplizirt ist, so hat es bei allen Bewegungen, bei denen die Dichtigkeit ungeändert bleibt, keinen Einfluss auf die Werthe aller Differentialquotienten von F; man darf daher hier setzen:

$$2F = a_{11}(y_z^2 - 4y_y z_z) + a_{22}(z_x^2 - 4z_z x_x) + a_{33}(x_y^2 - 4x_x y_y)$$
$$+ 2a_{33}(2y_z x_x - y_x z_x) + 2a_{31}(2z_x y_y - z_y x_y) + 2a_{12}(2x_y z_z - x_z y_z).$$

Dieser Ausdruck soll umgeformt werden. Es sei

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$
$$\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$
$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

d. h. es seien ξ, η, ζ die doppelt genommenen Componenten der Drehung eines unendlich kleinen Theiles des Aethers. Man mache ferner:

$$2G = a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{23}\eta\zeta + 2a_{31}\zeta\xi + 2a_{12}\xi\eta.$$

Dann ergiebt sich:

$$
\begin{aligned}
F = G &+ 2a_{11}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&+ 2a_{22}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\
&+ 2a_{22}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\
+ 2a_{23}&\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\
+ 2a_{31}&\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\
+ 2a_{33}&\left(\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}\right).
\end{aligned}
$$

Hierdurch ist F dargestellt, nicht als Funktion der sechs Argumente $x_x, y_y, \ldots$, sondern als eine der neun Differentialquotienten von u, v, w nach x, y, z. Bei der Bildung der Gleichungen (1) sind daher statt der Gleichungen (2) die folgenden zu benutzen:

$$
\begin{aligned}
X_x &= -\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} & Y_z &= \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}} = \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}}\\
Y_y &= \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}} & Z_x &= \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}} = \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}}\\
Z_z &= \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}} & X_y &= \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}} = \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}.
\end{aligned}
$$

Es ergiebt sich aus ihnen:

$$
(16)\quad \begin{cases}
X_x = \dfrac{\partial G}{\partial \eta} + 2a_{22}\dfrac{\partial w}{\partial x} - 2a_{23}\dfrac{\partial v}{\partial x} + 2a_{31}\dfrac{\partial v}{\partial y} - 2a_{12}\dfrac{\partial w}{\partial y}\\
Y_z = -\dfrac{\partial G}{\partial \xi} + 2a_{11}\dfrac{\partial w}{\partial y} + 2a_{23}\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2a_{31}\dfrac{\partial u}{\partial y} - 2a_{12}\dfrac{\partial w}{\partial x}\\
Z_z = -2a_{11}\dfrac{\partial v}{\partial y} - 2a_{22}\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2a_{12}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)
\end{cases}
$$

und auch:

$$
\begin{aligned}
X_x &= -\frac{\partial G}{\partial \eta} + 2a_{22}\frac{\partial u}{\partial z} - 2a_{23}\frac{\partial u}{\partial y} - 2a_{31}\frac{\partial v}{\partial y} - 2a_{12}\frac{\partial v}{\partial z}\\
Y_z &= \frac{\partial G}{\partial \xi} + 2a_{11}\frac{\partial v}{\partial z} + 2a_{23}\frac{\partial u}{\partial x} - 2a_{31}\frac{\partial v}{\partial x} - 2a_{12}\frac{\partial u}{\partial z}\\
Z_z &= -2a_{11}\frac{\partial v}{\partial y} - 2a_{22}\frac{\partial u}{\partial x} + 2a_{12}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).
\end{aligned}
$$

Benutzt man die letzten Gleichungen, um die dritte der Gleichungen (1) zu bilden, so wird diese:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial \eta}, \tag{17}$$

und auf ähnlichem Wege findet man:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial \zeta},$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial \xi}.$$

Diese Differentialgleichungen sind aus der Theorie der Elasticität bei anderer Bezeichnung und auf anderem Wege schon von Lamé [1]) abgeleitet. Die Funktion G ist dieselbe, die Mac Cullagh als Ausdruck des Potentials der auf ein Aethertheilchen ausgeübten Kräfte annimmt.

Nun sollen die Grenzbedingungen, die an der Berührungsfläche zweier verschiedener krystallinischer Mittel zu erfüllen sind, aufgestellt werden. Die Dichtigkeit des Aethers in ihnen soll als gleich angenommen und, wie bisher, $= 1$ gesetzt werden; $z = 0$ sei die Gleichung der Grenze; das Mittel, in dem z negativ ist, werde das erste, das, in dem z positiv ist, das zweite genannt. Für das erste Mittel mögen die schon eingeführten Zeichen beibehalten werden; auf das zweite sollen dieselben Zeichen, mit Strichen versehen, sich beziehen.

Als Bedingungen, die für $z = 0$ zu erfüllen sind, stellen wir zunächst die Gleichungen:

$$u = u', \quad v = v', \quad w = w' \tag{18}$$

auf. Aus der letzten von ihnen, der Gleichung (17) und der dieser entsprechenden, für w' geltenden ergiebt sich:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial G'}{\partial \zeta'} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial G'}{\partial \eta'},$$

woraus weiter folgt, dass:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial G'}{\partial \xi'}\right)dx + \left(\frac{\partial G}{\partial \eta} - \frac{\partial G'}{\partial \eta'}\right)dy$$

das vollständige Differential einer Funktion von x und y ist:

[1]) Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides

es möge diese Funktion, in der eine unbestimmt bleibende, additive Constante vorkommt, Q genannt werden, so dass:

$$(19) \qquad \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial G'}{\partial \xi'} \\ \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial \eta} - \frac{\partial G'}{\partial \eta} \end{cases}$$

ist.

Wenn auf die Elemente der Fläche $z = 0$ keine fremden Druckkräfte wirkten, d. h. keine andern, als die von der Elasticität des Aethers herrührenden, so müsste für $z = 0$ auch

$$X_z = X'_z, \quad Y_z = Y'_z, \quad Z_z = Z'_z$$

sein. Diese Gleichungen sind aber nicht verträglich mit den Gleichungen 18) und der Annahme, dass die Dichtigkeit des Aethers stets ungeändert bleibt. Wir nehmen daher an, dass die Differenzen

$$X_z - X'_z, \quad Y_z - Y'_z, \quad Z_z - Z'_z$$

für $z = 0$ nicht verschwinden; sie sind die Componenten des fremden Druckes, der auf ein Element der Fläche $z = 0$ wirkt, des Druckes, der, wie man zu sagen pflegt, von den Kräften herrührt, die die wägbaren Theile der beiden Mittel auf den Aether ausüben. Es soll die Arbeit dieses Druckes aufgesucht werden; bezogen auf die Einheit der Zeit und der Fläche ist diese:

$$(X_z - X'_z)\frac{\partial u}{\partial t} + (Y_z - Y'_z)\frac{\partial v}{\partial t} + (Z_z - Z'_z)\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Bildet man diesen Ausdruck mit Hülfe der Gleichungen (16), so zeigt er sich zusammengesetzt aus zwei Theilen, von denen der erste nach (19)

$$\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial t},$$

der andere das Doppelte von:

$$\begin{aligned} &(a_{11} - a'_{11})\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial y}\right) - (a_{21} - a'_{21})\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ &+ (a_{12} - a'_{12})\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial y}\right) - (a_{22} - a'_{22})\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ &+ (a_{13} - a'_{13})\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}\right) - (a_{23} - a'_{23})\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \end{aligned}$$

ist. Der letzte Ausdruck hat das Eigenthümliche, zu verschwinden, sobald u, v, w für $z = 0$ Functionen einer Function von x, y, t sind; und das findet statt bei den particulären Lösungen, die hier allein betrachtet zu werden brauchen. Als vierte Grenzbedingung soll angenommen werden, dass für $z = 0$

$$Q = \text{const.}$$

ist; dann verschwindet in dem eben bezeichneten Falle die Arbeit der fremden Druckkräfte und es gilt der Satz von der lebendigen Kraft, der eine der Grundannahmen bei der Theorie des Hrn. Neumann bildet. Statt der einen Gleichung $Q =$ const. können nach 19) auch die beiden

$$(20) \qquad \frac{\partial G}{\partial \xi} - \frac{\partial G'}{\partial \xi'} = 0, \qquad \frac{\partial G}{\partial \eta} - \frac{\partial G'}{\partial \eta'} = 0$$

gesetzt werden, welche aber zusammen mit der Gleichung $w = w'$ nur zwei von einander unabhängige Gleichungen ausmachen.

Nun soll eine particuläre Lösung der Gleichung 17) und der entsprechenden Gleichungen gesucht werden, die den Bedingungen 18) und 20) genügt, und die ein System solcher Wellen darstellt, wie sie einzeln im ersten Abschnitt betrachtet worden sind. Die Zahl der Wellen, welche das System bilden, bleibt vorläufig unbestimmt. Die Zeichen, welche auf die einzelnen Wellen sich beziehen, sollen die Indices 1, 2, .. erhalten, die ungestrichenen Zeichen aber, wie früher, für das erste, die gestrichenen für das zweite Mittel gelten. Wir setzen:

$$(21) \qquad \begin{cases} u_1 = \alpha_1 A_1 f\left(\dfrac{l_1 x + m_1 y + n_1 z}{V_1} - t\right) \\ v_1 = \beta_1 A_1 f\left(\dfrac{l_1 x + m_1 y + n_1 z}{V_1} - t\right) \\ w_1 = \gamma_1 A_1 f\left(\dfrac{l_1 x + m_1 y + n_1 z}{V_1} - t\right) \end{cases}$$

und ebenso:

$$u'_1 = \alpha'_1 A'_1 f\left(\frac{l'_1 x + m'_1 y + n'_1 z}{V_1} - t\right)$$
$$v'_1 = \beta'_1 A'_1 f\left(\frac{l'_1 x + m'_1 y + n'_1 z}{V_1} - t\right)$$
$$w'_1 = \gamma'_1 A'_1 f\left(\frac{l'_1 x + m'_1 y + n'_1 z}{V_1} - t\right)$$

wo f eine willkürliche Function des hinzugefügten Arguments ist, A_1, A'_1 Constanten bedeuten. Den Differentialgleichungen wird dann genügt durch

$$u = \Sigma u_1 \qquad v = \Sigma v_1 \qquad w = \Sigma w_1$$
$$u' = \Sigma u'_1 \qquad v' = \Sigma v'_1 \qquad w' = \Sigma w'_1.$$

Um die Grenzbedingungen erfüllen zu können, setzen wir fest, dass die Argumente der Function f für $z = 0$ alle einander gleich werden, d. h. dass

$$(22) \qquad \begin{cases} \frac{l_1}{V_1} = \frac{l_2}{V_2} = .. = \frac{l'_1}{V'_1} = \frac{l'_2}{V'_2} = .. \\ \frac{m_1}{V_1} = \frac{m_2}{V_2} = .. = \frac{m'_1}{V'_1} = \frac{m'_2}{V'_2} = .. \end{cases}$$

ist; die Gleichungen (18) sind dann die Gleichungen

$$(23) \qquad \begin{cases} \Sigma \alpha_1 A_1 = \Sigma \alpha'_1 A'_1 \\ \Sigma \beta_1 A_1 = \Sigma \beta'_1 A'_1 \\ \Sigma \gamma_1 A_1 = \Sigma \gamma'_1 A'_1 \end{cases}$$

und die Gleichungen 20) werden bei Rücksicht auf die Gleichungen, durch welche G, ξ, η, ζ, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{F}$ definirt sind,

$$(24) \qquad \begin{cases} \sum \frac{A_1}{V_1} \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial a_1} = \sum \frac{A'_1}{V'_1} \frac{\partial \mathfrak{F}'_1}{\partial a'_1} \\ \sum \frac{A_1}{V_1} \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial b_1} = \sum \frac{A'_1}{V'_1} \frac{\partial \mathfrak{F}'_1}{\partial b'_1}. \end{cases}$$

Dass die drei letzten von diesen fünf Bedingungen nicht unabhängig von einander sind, lässt sich leicht verificiren. Man multiplicire die einzelnen Glieder der ersten der Gleichungen (24) mit den entsprechenden Grössen $\frac{m}{V}$, die einzelnen Glieder der zweiten mit den entsprechenden Grössen $\frac{l}{V}$, was nach 22) erlaubt ist; zieht man die Resultate von einander ab, so er-

hält man die letzte der Gleichungen 23), da aus den beiden ersten der Gleichungen 13)

$$\frac{1}{V^2}\left(m\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial a} - l\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial b}\right) = \gamma$$

folgt.

Multiplicirt man die einzelnen Glieder der ersten der Gleichungen 24) mit den entsprechenden Grössen $\frac{l}{V^2}$, die einzelnen Glieder der zweiten mit den entsprechenden Grössen $\frac{m}{V^2}$, so erhält man bei Rücksicht auf die Gleichungen 13) und 15)

$$\Sigma A_1\ l_1(a_1 + l_1 \operatorname{tg} \varepsilon_1) = \Sigma A'_1\ l'_1(a'_1 + l'_1 \operatorname{tg} \varepsilon'_1)$$
$$\Sigma A_1 m_1(b_1 + m_1 \operatorname{tg} \varepsilon_1) = \Sigma A'_1 m'_1(b'_1 + m'_1 \operatorname{tg} \varepsilon'_1),$$

wo die Vorzeichen der Grössen tg ε so gewählt sein müssen, wie es 15) erfordert. Diese Form der Gleichungen 24) hat das Eigenthümliche, dass in ihr ebensowenig, wie in den Gleichungen 23) die Constanten der Elasticität des Aethers explicite vorkommen. Von dieser Form sind die von Mac Cullagh aufgestellten Grenzbedingungen.

Jetzt handelt es sich noch darum, zu ermitteln, welche Richtungen die einzelnen Wellen haben müssen, damit die Gleichungen 22) erfüllt werden. Bisher ist von den Coordinatenaxen nur die z-Axe bestimmt; es sollen die andern nun so gewählt werden, dass für eine Welle $m = 0$ ist; es ist dann für alle Wellen $m = 0$ und es kann für jede einzelne

$$(25)\quad \begin{cases} l = \sin\varphi & m = 0 & n = \cos\varphi \\ \alpha = \cos\vartheta\cos\varphi & \beta = \sin\vartheta & \gamma = -\cos\vartheta\sin\varphi \\ \mathfrak{a} = -\sin\vartheta\cos\varphi & \mathfrak{b} = \cos\vartheta & \mathfrak{c} = \sin\vartheta\sin\varphi \end{cases}$$

gesetzt werden.

Aus den Gleichungen 13) folgt, da $m = 0$ ist,

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial a} - V^2\mathfrak{a}\right)n - \left(\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial c} - V^2\mathfrak{c}\right)l = 0$$
$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial b} - V^2\mathfrak{b} = 0;$$

setzt man noch:

$$\frac{V_1}{l_1} = \frac{V_2}{l_2} = \ldots = \frac{V'_1}{l'_1} = \frac{V'_2}{l'_2} = \ldots = h,$$

so ergiebt sich hieraus:

$$(26)\quad \begin{aligned}&\left(a_{11} - 2\,a_{13}\,\mathrm{tg}\,\varphi + (a_{33} - h^2)\,\mathrm{tg}^2\varphi\right)\left(a_{22} + (a_{22} - h^2)\,\mathrm{tg}^2\varphi\right)\\ &\quad - \left(a_{12} - a_{32}\,\mathrm{tg}\,\varphi\right)^2\left(1 + \mathrm{tg}^2\varphi\right) = 0\end{aligned}$$

und:

$$(27)\quad \mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{a_{22} - h^2\sin^2\varphi}{a_{12}\cos\varphi - a_{32}\sin\varphi}.$$

Ebenso ist für das zweite Mittel:

$$(28)\quad \begin{aligned}&\left(a'_{11} - 2\,a'_{13}\,\mathrm{tg}\,\varphi' + (a'_{33} - h^2)\,\mathrm{tg}^2\varphi'\right)\left(a'_{22} + (a'_{22} - h^2)\,\mathrm{tg}^2\varphi'\right)\\ &\quad - \left(a'_{12} - a'_{32}\,\mathrm{tg}\,\varphi'\right)^2\left(1 + \mathrm{tg}^2\varphi'\right) = 0\end{aligned}$$

und:

$$(29)\quad \mathrm{tg}\,\vartheta' = \frac{a'_{22} - h^2\sin^2\varphi'}{a'_{12}\cos\varphi' - a'_{32}\sin\varphi'}.$$

Wir nehmen eine von den einzelnen Wellen als gegeben an; dann ist h gegeben, die Gleichung 26) bestimmt die Werthe von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, die Gleichung 28) die Werthe von $\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots$ und die Gleichungen 27) und 29) geben die entsprechenden Werthe von $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta'_1, \vartheta'_2, \ldots$

Sehen wir nun zu, wie viele verschiedene Wellen in jedem der beiden Mittel vorhanden sein können. Die Gleichungen (21) werden bei den jetzt eingeführten Zeichen

$$\begin{aligned}u_1 &= \cos\vartheta_1\cos\varphi_1\,A_1 f\left(\frac{x}{h} + \frac{z}{h\,\mathrm{tg}\,\varphi_1} - t\right)\\ v_1 &= \sin\vartheta_1\,A_1 f\left(\frac{x}{h} + \frac{z}{h\,\mathrm{tg}\,\varphi_1} - t\right)\\ w_1 &= \cos\vartheta_1\sin\varphi_1\,A_1 f\left(\frac{x}{h} + \frac{z}{h\,\mathrm{tg}\,\varphi_1} - t\right).\end{aligned}$$

Hebt man aus jedem dieser Ausdrücke $\cos\vartheta_1\ \cos\varphi_1$ als Faktor heraus und setzt für $\mathrm{tg}\,\vartheta_1$ den aus (27) sich ergebenden Werth, so sieht man, dass u_1, v_1, w_1, bis auf einen gemeinschaftlichen, constanten Faktor eindeutig durch $\mathrm{tg}\,\varphi_1$ bestimmt sind; einem jeden der Werthe von $\mathrm{tg}\,\varphi$, die aus (26) sich ergeben, entspricht also nur eine Welle; da diese Gleichung eine biquadratische ist, so können also vier verschiedene Wellen in dem ersten Mittel vorhanden sein. Dasselbe gilt offenbar von dem zweiten Mittel. Jede der Summen in den Gleichungen (23) und (24) ist daher aus vier Gliedern

zusammengesetzt zu denken und die Zahl der Grössen A, A' ist acht. Die genannten Gleichungen enthalten vier von einander unabhängige; die letzte der Gleichungen (24) ist in Folge davon, dass die Grössen m gleich Null sind, identisch mit der letzten der Gleichungen (23); vier von den Grössen A, A' können daher beliebig gewählt werden, die vier andern finden dann ihre Bestimmung durch (23) und (24).

Um auf Fälle zu kommen, die der Beobachtung zugänglich sind, muss man im Allgemeinen gewisse drei von den Grössen A, A' gleich Null annehmen. Es sei $\operatorname{tg} \varphi_1$ eine reelle Wurzel der biquadratischen Gleichung (26); dann kann die Welle im ersten Mittel, auf die der Index 1 sich bezieht, bezeichnet werden entweder als eine einfallende oder als eine reflektirte oder gebrochene; als eine einfallende, wenn sie angesehen werden kann als herkommend von einem unendlich entfernten Erschütterungsmittelpunkte, der in dem Mittel liegt, in dem sie sich bewegt, der also eine unendlich grosse negative z-Ordinate hat; als eine reflektirte oder gebrochene, wenn das nicht der Fall ist. Ist das Mittel ein isotropes, so ist diese Alternative leicht zu entscheiden, da dann der Erschütterungsmittelpunkt auf der rückwärts gezogenen Wellennormale liegt. In diesem Falle ist die Welle eine einfallende, wenn $h \operatorname{tg} \varphi_1$ positiv ist, eine reflektirte oder gebrochene, wenn $h \operatorname{tg} \varphi_1$ negativ ist. Dasselbe gilt auch bei einem krystallinischen Mittel, wenn $\sin {}^2\varphi_1$ unterhalb einer gewissen Grenze liegt, einer Grenze, die wenig kleiner als 1 bei allen Krystallen ist, die nur eine kleine Doppelbrechung besitzen. Allgemein wird hier aber die Natur der Welle in der genannten Hinsicht durch den Strahl bestimmt, der zu ihr gehört, danach ob dieser Stahl einen spitzen oder stumpfen Winkel mit der z-Axe bildet. Durch Betrachtungen, die an die Wellenfläche zu knüpfen sind, lässt sich beweisen, dass, wenn die Gleichung (26) vier reelle Wurzeln besitzt, zwei von ihnen einfallenden Wellen, die beiden andern reflektirten oder gebrochenen entsprechen, und dass, wenn die genannte Gleichung nur zwei reelle Wurzeln hat, eine einfallende und eine reflektirte oder gebrochene Welle vorhanden ist. Das Gleiche gilt von der Gleichung (28). Verwirklicht können im Allgemeinen allein Fälle werden, in denen nur eine

einfallende Welle existirt. Haben die beiden biquadratischen Gleichungen lauter reelle Wurzeln, so muss man daher die Amplituden von dreien der vier einfallenden Wellen, welche die vier aufgestellten Gleichungen ergeben, gleich Null annehmen. In dem Mittel, in dem die übrig bleibende einfallende Welle sich bewegt, hat man dann neben dieser noch zwei reflektirte Wellen, in dem andern Mittel zwei gebrochene.

Wenn aber die Gleichungen für $\operatorname{tg}\varphi$ und $\operatorname{tg}\varphi'$ complexe (oder rein imaginäre) Wurzeln haben, so ist neben der Rücksicht, dass nur eine einfallende Welle vorhanden sei, noch eine andere zu nehmen. Wenn solche Wurzeln da sind, so kann man Ausdrücke für u, v, w, u', v', w' genau auf demselben Wege bilden, wie wenn die beiden biquadratischen Gleichungen nur reelle Wurzeln haben, vorausgesetzt, dass die Funktion f nicht allein für reelle, sondern auch für complexe Werthe ihres Arguments bekannt ist. Diese Ausdrücke sind complex; setzt man aber ihre reellen Theile den Zeichen u, v, w, u', v', w' gleich, so erhält man wieder eine reelle Lösung der Differentialgleichungen und der Grenzbedingungen. Wir nehmen die einfallende Welle als gegeben an; dann ist der reelle Theil der Funktion f für reelle Werthe ihres Arguments auch gegeben; es handelt sich zunächst darum f selbst allgemein zu finden. Diese Aufgabe ist unbestimmt; wir machen sie zu einer bestimmten (abgesehen davon, dass eine additive, rein imaginäre Constante in f willkürlich bleibt), indem wir festsetzen, dass f für keinen Werth seines Arguments, dessen imaginärer Theil $= i$ mal einer positiven Grösse ist, unendlich werde. Nothwendig wird f dann unendlich für einen Werth seines Arguments, dessen imaginärer Theil $= i$ mal einer negativen Grösse ist, oder für mehrere solcher Werthe. In Folge dessen werden die Ausdrücke von u, v, w, u', v', w' im Allgemeinen für gewisse Werthe von x, z, t unendlich; um das zu verhindern, müssen gewisse von den Grössen A, A' gleich Null angenommen werden. Gesetzt, es sei $\operatorname{tg}\varphi_1$ eine complexe Wurzel der Gleichung (26); da diese Gleichung reelle Coëfficienten hat, so muss sie eine zweite complexe Wurzel haben, die jener conjugirt ist; diese sei $\operatorname{tg}\varphi_2$. In den Ausdrücken von u_1 v_1 w_1 kommt der Faktor

$$f\left(\frac{x}{k} - t + \frac{z}{k \operatorname{tg} \varphi_1}\right),$$

in den Ausdrücken von u_2, v_2, w_2 der Faktor

$$f\left(\frac{x}{k} - t + \frac{z}{k \operatorname{tg} \varphi_2}\right)$$

vor. Da $\operatorname{tg} \varphi_1$ und $\operatorname{tg} \varphi_2$ conjugirt sind, so sind es auch

$$\frac{1}{k \operatorname{tg} \varphi_1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{k \operatorname{tg} \varphi_2};$$

es sei der Coëfficient von i in dem ersten dieser Ausdrücke positiv, in dem zweiten negativ; da in dem Mittel, auf welches die ungestrichenen Buchstaben sich beziehen, z negative Werthe hat, so werden dann u_1, v_1, w_1 unendlich für gewisse Werthe von x, t, z, wenn A_1 nicht verschwindet, während, u_2, v_2, w_2 überall endlich bleiben, welches auch der Werth von A_2 sein möge. Um zu verhindern, dass u, v, w unendlich werden, hat man also $A_1 = 0$ zu setzen. Sind $\operatorname{tg} \varphi'_1$ und $\operatorname{tg} \varphi'_2$ zwei conjugirte, complexe Wurzeln der biquadratischen Gleichung für $\operatorname{tg} \varphi'$, und ist der imaginäre Theil von

$$\frac{1}{k \operatorname{tg} \varphi'_1}$$

$= i$ mal einer positiven Grösse, so muss man $A'_2 = 0$ machen, damit u', v', w' nicht unendlich werden, da in dem zweiten Mittel z positiv ist.

Will man die entwickelten Gleichungen auf specielle Fälle anwenden, so muss man die Constanten der Elasticität des Aethers ausdrücken durch die Längen der Hauptaxen des Elasticitätsellipsoids und die Winkel, die diese mit den Coordinatenaxen bilden. Es seien für das erste Mittel a, b, c die reciproken Halbaxen des Elasticitätsellipsoids und die folgende Tafel gebe die Cosinus der Winkel an, die diese mit den Coordinatenaxen machen.

	a	b	c
x	p_1	p_2	p_3
y	q_1	q_2	q_3
z	r_1	r_2	r_3 .

Der in (14) aufgestellten Gleichung des Elasticitätsellipsoids zufolge ist dann:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= a^2 p_1^2 + b^2 p_2^2 + c^2 p_3^2 \\
a_{22} &= a^2 q_1^2 + b^2 q_2^2 + c^2 q_3^2 \\
a_{33} &= a^2 r_1^2 + b^2 r_2^2 + c^2 r_3^2 \\
a_{23} &= a^2 q_1 r_1 + b^2 q_2 r_2 + c^2 q_3 r_3 \\
a_{31} &= a^2 r_1 p_1 + b^2 r_2 p_2 + c^2 r_3 p_3 \\
a_{12} &= a^2 p_1 q_1 + b^2 p_2 q_2 + c^2 p_3 q_3.
\end{aligned}$$

Ist das Mittel optisch einaxig und die c-Axe die optische Axe, so ergiebt sich hieraus:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= a^2 + (c^2 - a^2) p_3^2 & a_{23} &= (c^2 - a^2) q_3 r_3 \\
a_{22} &= a^2 + (c^2 - a^2) q_3^2 & a_{31} &= (c^2 - a^2) r_3 p_3 \\
a_{33} &= a^2 + (c^2 - a^2) r_3^2 & a_{12} &= (c^2 - a^2) p_3 q_3.
\end{aligned}$$

Ist das Mittel isotrop, so hat man

$$\begin{aligned}
a_{11} &= a_{22} = a_{33} \\
a_{23} &= a_{31} = a_{12} = 0
\end{aligned}$$

und als Richtungen der Hauptaxen des Elasticitätsellipsoids können irgend welche drei aufeinander senkrechte Richtungen angenommen werden.

Es soll der Fall, dass das erste Mittel ein isotropes ist, noch etwas näher betrachtet werden. Es sei φ eine Wurzel der Gleichung, in welche (26) in diesem Falle übergeht; man kann dann setzen

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \varphi & \varphi_2 &= \varphi & \varphi_3 &= \pi - \varphi & \varphi_4 &= \pi - \varphi \\
\vartheta_1 &= 0 & \vartheta_2 &= \frac{\pi}{2} & \vartheta_3 &= 0 & \vartheta_4 &= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Ist φ reell, so sind entweder die Wellen 1 und 2 einfallende und die Wellen 3 und 4 reflektirte oder gebrochene, oder es findet das Umgekehrte statt; die Wellen 1 und 3 schwingen parallel zur Einfallsebene, die Wellen 2 und 4 senkrecht zu dieser. Bei Rücksicht auf (25) werden die Gleichungen (23) und (24), wenn man noch den gemeinsamen Werth von a_{11}, a_{22} und a_{33} durch a bezeichnet,

$$(A_1 - A_3) \cos\varphi = \sum A'_1 \cos\varphi'_1 \cos\vartheta'_1$$

$$(A_1 + A_3) \sin\varphi = \sum A'_1 \sin\varphi'_1 \cos\vartheta'_1$$

$$A_2 + A_4 = \sum A'_1 \sin \vartheta'_1$$

$$(A_2 - A_4)\ \frac{a \cos \varphi}{\sin \varphi} = \sum \frac{A'_1}{\sin \varphi'_1} (a'_{11} \cos \varphi', \sin \vartheta'_1 + a'_{12} \cos \vartheta'_1 - a'_{13} \sin \varphi'_1 \sin \vartheta'_1).$$

Oft wird man von hier aus die Rechnung am bequemsten in der Weise weiterführen, dass man zunächst diese Gleichungen für die vier Fälle auflöst, dass eine von den Grössen A' gleich 1 ist, während die drei andern verschwinden; mit Hülfe der vier Werthsysteme, die man dabei für die Grössen A_1, A_2, A_3, A_4 findet, kann man dann leicht die Amplituden der reflektirten uud gebrochenen Wellen finden, die sich bilden, wenn in dem einen oder in dem andern Mittel eine gegebene einfallende Welle vorhanden ist.

Ueber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit.[1])

In ihrem Buche Treatise on natural philosophy, Oxford 1867, p. 264 haben die Herren Thomson und Tait die Aufgabe behandelt, die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit zu bestimmen. Unter den Bedingungen, unter denen sie dieselbe gelöst haben, befindet sich auch die, dass der Körper um seine Rotationsaxe nicht rotirt und diese Axe in einer festen Ebene bleibt. Ich habe gefunden, dass die Aufgabe auch ohne diese Beschränkung lösbar ist und ebenso, wie unter derselben, auf elliptische Integrale führt. Das zu zeigen ist der Zweck dieser Abhandlung.

Die Differentialgleichungen der Bewegung sollen unter den folgenden Voraussetzungen abgeleitet werden: Ein starrer Körper von beliebiger Gestalt und beliebig vertheilter Masse befindet sich in einer incompressibeln, homogenen Flüssigkeit, die ausser durch seine Oberfläche durch eine im Unendlichen liegende, geschlossene, feste Fläche begrenzt ist. Reibung

---

1) Borchardt's Journal. Bd. 71. 1869.

findet in der Flüssigkeit nicht statt. Auf den Körper wirken Kräfte, welche ein Potential besitzen, das nur von der Lage des Körpers abhängig ist. Auf die Theile der Flüssigkeit wirken keine Kräfte. Wirbelbewegungen sind in der Flüssigkeit nicht vorhanden. Die Geschwindigkeiten ändern sich überall in derselben stetig mit den Coordinaten des Ortes; durch diese Annahme wird der Fall ausgeschlossen, dass von der Oberfläche des Körpers eine Fläche ausgeht, die — ähnlich der Oberfläche eines Strahles, der in gleichartiger Flüssigkeit sich bewegt — Theile der Flüssigkeit trennt, die verschiedene Geschwindigkeiten haben. Endlich soll der Bewegungszustand des Systems aus dem Zustande der Ruhe durch Kräfte, die auf den Körper wirkten, hervorgegangen sein; diese Annahme bildet eine Beschränkung der Aufgabe in dem Falle, dass der von der Flüssigkeit erfüllte Raum ein mehrfach zusammenhängender ist, dass der Körper z. B. die Gestalt eines Ringes hat.

Um die Integration der Differentialgleichungen, die unter diesen Voraussetzungen gelten, zu ermöglichen, wird dann weiter angenommen werden, dass die Kräfte, die auf den Körper wirken, verschwinden, dass die Oberfläche des Körpers eine Rotationsfläche und die Vertheilung der Masse in ihm symmetrisch zur Rotationsaxe ist.

§. 1.

Die in Rede stehenden Differentialgleichungen sollen aus dem Hamilton'schen Principe entwickelt werden. Bezeichnet Ω das Potential der auf den Körper wirkenden Kräfte, T die lebendige Kraft des ganzen Systemes und t die Zeit, so ist nach diesem:

$$\delta \int (\Omega + T)\, dt = 0. \tag{1}$$

Es seien x, y, z die Coordinaten eines Punktes des Körpers in Bezug auf ein in diesem festes Coordinatensystem, ξ, η, ζ die Coordinaten desselben Punktes zur Zeit t in Bezug auf ein im Raume festes Coordinatensystem, und es sei weiter:

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ \eta &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ \zeta &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z. \end{aligned}$$

Die 12 Grössen α, β, γ sind dann Functionen der Zeit, um deren Bestimmung es sich handelt. Man setze ferner:

$$u = \alpha_1 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma}{dt},$$

$$v = \alpha_2 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma}{dt},$$

$$w = \alpha_3 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma}{dt},$$

$$p = \alpha_2 \frac{d\alpha_3}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta_3}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma_3}{dt},$$

$$q = \alpha_3 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_1}{dt},$$

$$r = \alpha_1 \frac{d\alpha_2}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta_2}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma_2}{dt},$$

d. h. man bezeichne durch u, v, w die Geschwindigkeiten des Anfangspunktes der x, y, z nach den Richtungen der x, y, z und durch p, q, r die Drehungsgeschwindigkeiten des Körpers um die Axen der x, y, z. Die lebendige Kraft des Körpers ist dann eine homogene Function zweiten Grades von u, v, w, p, q, r mit constanten Coëfficienten; es soll gezeigt werden, dass unter den genannten Voraussetzungen auch die lebendige Kraft der Flüssigkeit eine homogene Function zweiten Grades derselben Variabeln mit constanten Coëfficienten ist.

Zu diesem Zwecke bezeichne man durch x, y, z die Coordinaten eines Punktes des zur Zeit t von der Flüssigkeit eingenommenen Raumes in Bezug auf das im Körper feste Coordinatensystem bei der Lage, welche dieses zur Zeit t hat. Die Componenten der Geschwindigkeit, welche in diesem Punkte zur Zeit t stattfindet, nach den Axen der x, y, z sind dann den gemachten Annahmen zufolge $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, wenn φ das Geschwindigkeitspotential bedeutet, und es ist dieses eine in dem ganzen Gebiete von x, y, z stetige und eindeutige Function dieser Variabeln, die der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

genügt. Bedeutet N die Normale eines Flächenelementes, so ist ferner für alle Elemente der Fläche, welche die Flüssigkeit

im Unendlichen begrenzt, $\frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0$, und für jedes Element der Oberfläche des Körpers ist $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ = der Componente der Geschwindigkeit des anliegenden Theiles des Körpers nach der Richtung von N.

Ist die Bewegung des Körpers, d. h. sind u, v, w, p, q, r gegeben, so ist hiernach, einem bekannten Satze gemäss, φ bis auf eine willkürliche additive Constante bestimmt. Es ist also φ, abgesehn von dieser Constanten, eine Function von u, v, w, p, q, r, und die lebendige Kraft der Flüssigkeit ist gleichfalls eine Function dieser sechs Variabeln. Um nachzuweisen, dass die lebendige Kraft der Flüssigkeit eine homogene Function zweiten Grades ist, ist nur zu zeigen, dass φ einer linearen homogenen Function der mehrfach genannten Grössen gleichgesetzt werden kann. Die Richtigkeit der letzten Behauptung aber zeigt die folgende Ueberlegung.

Die Componenten der Geschwindigkeit eines Punktes des Körpers nach den Axen der ξ, η, ζ sind:

$$\frac{d\xi}{dt}, \qquad \frac{d\eta}{dt}, \qquad \frac{d\zeta}{dt},$$

also die nach den Axen der x, y, z:

$$\alpha_1 \frac{d\xi}{dt} + \beta_1 \frac{d\eta}{dt} + \gamma_1 \frac{d\zeta}{dt},$$
$$\alpha_2 \frac{d\xi}{dt} + \beta_2 \frac{d\eta}{dt} + \gamma_2 \frac{d\zeta}{dt},$$
$$\alpha_3 \frac{d\xi}{dt} + \beta_3 \frac{d\eta}{dt} + \gamma_3 \frac{d\zeta}{dt},$$

oder:

$$2) \qquad \begin{cases} u + ry - qz, \\ v + pz - rx, \\ w + qx - py, \end{cases}$$

wie aus den Gleichungen folgt:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha_1}{dt} x + \frac{d\alpha_2}{dt} y + \frac{d\alpha_3}{dt} z,$$
$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{d\beta}{dt} + \frac{d\beta_1}{dt} x + \frac{d\beta_2}{dt} y + \frac{d\beta_3}{dt} z,$$
$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} + \frac{d\gamma_1}{dt} x + \frac{d\gamma_2}{dt} y + \frac{d\gamma_3}{dt} z,$$

in Verbindung mit den Definitionsgleichungen von u, v, w, p, q, r und den Relationen, die zwischen α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3 bestehen. Die Bedingung, der φ an der Oberfläche des Körpers zu genügen hat, ist hiernach:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N} = (u + ry - qz)\cos(N,x) + (v + pz - rx)\cos(N,y) + (w + qx - py)\cos(N,z).$$

Man erfüllt daher alle für φ aufgestellten Forderungen, indem man:

$$(3) \qquad \varphi = u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + p\varphi_4 + q\varphi_5 + r\varphi_6$$

setzt und die Functionen φ_1, φ_2, ..., φ_6 so bestimmt, dass jede von ihnen den für φ angegebenen Bedingungen genügt mit Ausnahme derjenigen, die sich auf die Oberfläche des Körpers bezieht, und dass für diese Oberfläche:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial N} = \cos(N,x), & \frac{\partial \varphi_4}{\partial N} = z\cos(N,y) - y\cos(N,z), \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial N} = \cos(N,y), & \frac{\partial \varphi_5}{\partial N} = x\cos(N,z) - z\cos(N,x), \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial N} = \cos(N,z), & \frac{\partial \varphi_6}{\partial N} = y\cos(N,x) - x\cos(N,y) \end{cases}$$

ist. Diese Functionen φ_1, φ_2, ... φ_6 sind unabhängig von u, v, w, p, q, r; es kann daher φ einer linearen homogenen Function dieser Grössen gleichgesetzt werden. Ferner sind φ_1, φ_2, ... φ_6 ausser von x, y, z ausschliesslich von der Gestalt des Körpers abhängig. Daraus folgt, dass die lebendige Kraft der Flüssigkeit eine homogene Function zweiten Grades von u, v, w, p, q, r ist, deren Coëfficienten durch die Gestalt des Körpers und die Dichtigkeit der Flüssigkeit bestimmt sind.

§ 2.

Nach den gemachten Auseinandersetzungen ist die in Gleichung (1) mit T bezeichnete lebendige Kraft des Körpers und der Flüssigkeit eine homogene Function zweiten Grades von u, v, w, p, q, r mit constanten Coëfficienten; nach der Annahme ist Ω eine Function der Coordinaten α, β, γ und der Cosinus α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 α_3, β_3, γ_3. Zwischen den 18 Variabeln, von welchen hienach $\Omega + T$ abhängt, bestehn 12 Bedingungs-

gleichungen, die 6 Definitionsgleichungen für u, v, w. p, q, r nämlich und die 6 Relationen zwischen den 9 Cosinus α_1, β_1,.. Nach den Regeln der Variationsrechnung hat man, um die Gleichung (1) zu entwickeln, zu $\Omega + T$ hinzuzufügen die mit unbestimmten Faktoren multiplizirten Ausdrücke, welche den Bedingungsgleichungen zufolge gleich Null sein sollen, und, wenn S die so erhaltene Summe bedeutet, die Gleichung:

$$0 = \delta \int S\, dt$$

unter der Voraussetzung zu entwickeln, dass jene Variabeln und diese Factoren unabhängige Functionen von t sind. Die 18 Gleichungen, die man aus der Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial s} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \frac{ds}{dt}}\right)$$

erhält, wenn man hier für s der Reihe nach jene 18 Variabeln setzt, bilden in Verbindung mit den 12 Bedingungsgleichungen die gesuchte Entwicklung.

Die folgende Zusammenstellung giebt die Bedingungsgleichungen an und die entsprechenden Factoren, die eingeführt werden sollen.

Bedingungsgleichungen.	Factoren.
$\alpha_1 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma}{dt} - u = 0$	U
$\alpha_2 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma}{dt} - v = 0$	V
$\alpha_3 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma}{dt} - w = 0$	W
$\alpha_2 \frac{d\alpha_3}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta_3}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma_3}{dt} - p = 0$	P
$\alpha_3 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_1}{dt} - q = 0$	Q
$\alpha_1 \frac{d\alpha_2}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta_2}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma_2}{dt} - r = 0$	R
$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 - 1 = 0$	$\frac{1}{2}\lambda_{11}$
$\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 - 1 = 0$	$\frac{1}{2}\lambda_{22}$
$\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 - 1 = 0$	$\frac{1}{2}\lambda_{33}$

Bedingungsgleichungen.		Factoren.
$\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3$	$= 0$	$\lambda_{23} = \lambda_{32}$
$\alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1$	$= 0$	$\lambda_{31} = \lambda_{13}$
$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2$	$= 0$	$\lambda_{12} = \lambda_{21}$.

Daraus folgen diese 18 Gleichungen:

$$\frac{\partial T}{\partial u} = U, \qquad \frac{\partial T}{\partial p} = P,$$

$$\frac{\partial T}{\partial v} = V, \qquad \frac{\partial T}{\partial q} = Q,$$

$$\frac{\partial T}{\partial w} = W, \qquad \frac{\partial T}{\partial r} = R,$$

$$\frac{\partial S\Omega}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt}(\alpha_1 U + \alpha_2 V + \alpha_3 W),$$

$$\frac{\partial S\Omega}{\partial \beta} = \frac{d}{dt}(\beta_1 U + \beta_2 V + \beta_3 W),$$

$$\frac{\partial S\Omega}{\partial \gamma} = \frac{d}{dt}(\gamma_1 U + \gamma_2 V + \gamma_3 W),$$

$$\frac{\partial S\Omega}{\partial \alpha_1} + U\frac{d\alpha}{dt} + R\frac{d\alpha_2}{dt} + \lambda_{11}\alpha_1 + \lambda_{12}\alpha_2 + \lambda_{13}\alpha_3 = \frac{d}{dt}(\alpha_3 Q,$$

$$\frac{\partial S\Omega}{\partial \beta_1} + U\frac{\partial \beta}{\partial t} + R\frac{d\beta_2}{dt} + \lambda_{11}\beta_1 + \lambda_{12}\beta_2 + \lambda_{13}\beta_3 = \frac{d}{dt}(\beta_3 Q,$$

$$\frac{\partial S\Omega}{\partial \gamma_1} + U\frac{d\gamma}{dt} + R\frac{d\gamma_2}{dt} + \lambda_{11}\gamma_1 + \lambda_{12}\gamma_2 + \lambda_{13}\gamma_3 = \frac{d}{dt}(\gamma_3 Q,$$

$$\frac{\partial S\Omega}{\partial \alpha_2} + V\frac{d\alpha}{dt} + P\frac{d\alpha_3}{dt} + \lambda_{21}\alpha_1 + \lambda_{22}\alpha_2 + \lambda_{23}\alpha_3 = \frac{d}{dt}(\alpha_1 R,$$

$$\frac{\partial S\Omega}{\partial \beta_2} + V\frac{d\beta}{dt} + P\frac{d\beta_3}{dt} + \lambda_{21}\beta_1 + \lambda_{22}\beta_2 + \lambda_{23}\beta_3 = \frac{d}{dt}(\beta_1 R,$$

$$\frac{\partial S\Omega}{\partial \gamma_2} + V\frac{d\gamma}{dt} + P\frac{d\gamma_3}{dt} + \lambda_{21}\gamma_1 + \lambda_{22}\gamma_2 + \lambda_{23}\gamma_3 = \frac{d}{dt}(\gamma_1 R,$$

$$\frac{\partial S\Omega}{\partial \alpha_3} + W\frac{d\alpha}{dt} + Q\frac{d\alpha_1}{dt} + \lambda_{31}\alpha_1 + \lambda_{32}\alpha_2 + \lambda_{33}\alpha_3 = \frac{d}{dt}(\alpha_2 P,$$

$$\frac{\partial S\Omega}{\partial \beta_3} + W\frac{d\beta}{dt} + Q\frac{d\beta_1}{dt} + \lambda_{31}\beta_1 + \lambda_{32}\beta_2 + \lambda_{33}\beta_3 = \frac{d}{dt}(\beta_2 P,$$

$$\frac{\partial S\Omega}{\partial \gamma_3} + W\frac{d\gamma}{dt} + Q\frac{d\gamma_1}{dt} + \lambda_{31}\gamma_1 + \lambda_{32}\gamma_2 + \lambda_{33}\gamma_3 = \frac{d}{dt}(\gamma_2 P,$$

Die Werthe von U, V, W, P, Q, R, welche die 6 ersten Gleichungen geben, substituire man in die übrigen; die 3 folgenden erhalten dann unmittelbar eine zum weitern Gebrauche

geeignete Form, während aus den 9 letzten noch die 6 Grössen λ eliminirt werden müssen. Jene 3 Gleichungen werden:

$$(5^a)\qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial T}{\partial u}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial v}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial w}\right)=\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} \\ \frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial T}{\partial u}+\beta_2\frac{\partial T}{\partial v}+\beta_3\frac{\partial T}{\partial w}\right)=\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}, \\ \frac{d}{dt}\left(\gamma_1\frac{\partial T}{\partial u}+\gamma_2\frac{\partial R}{\partial v}+\gamma_3\frac{\partial T}{\partial w}\right)=\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma}. \end{cases}$$

Die Grössen, die auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen hier stehen, sind die Summen der Componenten der auf den Körper wirkenden Kräfte nach den Axen der ξ, η, ζ.

Multiplicirt man die Gleichungen (5^a)

mit	α_1	oder mit	α_2	oder mit	α_3
-	β_1	-	-	β_2	-	-	β_3
-	γ_1	-	-	γ_2	-	-	γ_3

und addirt sie jedesmal, so erhält man bei Rücksicht auf die Gleichungen, die zwischen diesen 9 Cosinus und den Grössen p, q, r bestehen:

$$(5^b)\qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u}=q\frac{\partial T}{\partial w}-r\frac{\partial T}{\partial v}+\alpha_1\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}+\beta_1\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}+\gamma_1\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v}=r\frac{\partial T}{\partial u}-p\frac{\partial T}{\partial w}+\alpha_2\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}+\beta_2\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}+\gamma_2\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w}=p\frac{\partial T}{\partial v}-q\frac{\partial T}{\partial u}+\alpha_3\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}+\beta_3\frac{\partial \Omega}{\partial \beta}+\gamma_3\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma}. \end{cases}$$

Die erwähnte Elimination der Grössen λ aus den 9 Gleichungen, in denen diese vorkommen, kann man bewirken, indem man die Gleichungen

mit	0	oder mit		$-\gamma_1$	oder mit			β_1
-	γ_1	-	-	0	-	-		$-\alpha_1$
-	$-\beta_1$	-	-	α_1	-	-		0
-	0	-	-	$-\gamma_2$	-	-		β_2
-	γ_2	-	-	0	-	-		$-\alpha_2$
-	$-\beta_2$	-	-	α_2	-	-		0
-	0	-	-	$-\gamma_3$	-	-		β_3
-	γ_3	-	-	0	-	-		$-\alpha_3$
-	$-\beta_3$	-	-	α_3	-	-		0

multiplizirt und jedesmal addirt. Setzt man der Kürze wegen

$$M_\xi = \gamma\frac{\partial\Omega}{\partial\beta} - \beta\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma} + \gamma_1\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_1} - \beta_1\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_1} + \gamma_2\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2} - \beta_2\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_2} + \gamma_3\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_3} - \beta_3\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_3}.$$

$$M_\eta = \alpha\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma} - \gamma\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} + \alpha_1\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_1} - \gamma_1\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1} + \alpha_2\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_2} - \gamma_2\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2} + \alpha_3\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_3} - \gamma_3\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3}.$$

$$M_\zeta = \beta\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} - \alpha\frac{\partial\Omega}{\partial\beta} + \beta_1\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1} - \alpha_1\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_1} + \beta_2\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2} - \alpha_2\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2} + \beta_3\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3} - \alpha_3\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_3}.$$

d. h. bezeichnet man durch M_ξ, M_η, M_ζ die Drehungsmomente der auf den Körper wirkenden Kräfte in Bezug auf die Axen der ξ, η, ζ; nimmt man ferner an, dass die Axen der x, y, z durch Drehung den Axen der ξ, η, ζ parallel gemacht werden können, so dass

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2, & \beta_1 &= \gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2, & \gamma_1 &= \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2,\\
\alpha_2 &= \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3, & \beta_2 &= \gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3, & \gamma_2 &= \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3,\\
\alpha_3 &= \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1, & \beta_3 &= \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1, & \gamma_3 &= \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1
\end{aligned}$$

ist, so erhält man auf dem angegebenen Wege nach einigen Transformationen und bei Rücksicht auf die Gleichungen (5a)

$$(6^a)\quad \begin{cases}
\frac{d}{dt}\left\{\begin{aligned}&(\beta_1\gamma-\gamma_1\beta)\frac{\partial T}{\partial u}+(\beta_2\gamma-\gamma_2\beta)\frac{\partial T}{\partial v}+(\beta_3\gamma-\gamma_3\beta)\frac{\partial T}{\partial w}\\ &+\alpha_1\frac{\partial T}{\partial p}\qquad+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial q}\qquad+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial r}\end{aligned}\right\} = M_\xi\\
\frac{d}{dt}\left\{\begin{aligned}&(\gamma_1\alpha-\alpha_1\gamma)\frac{\partial T}{\partial u}+(\gamma_2\alpha-\alpha_2\gamma)\frac{\partial T}{\partial v}+(\gamma_3\alpha-\alpha_3\gamma)\frac{\partial T}{\partial w}\\ &+\beta_1\frac{\partial T}{\partial p}\qquad+\beta_2\frac{\partial T}{\partial q}\qquad+\beta_3\frac{\partial T}{\partial r}\end{aligned}\right\} = M_\eta\\
\frac{d}{dt}\left\{\begin{aligned}&(\alpha_1\beta-\beta_1\alpha)\frac{\partial T}{\partial u}+(\alpha_2\beta-\beta_2\alpha)\frac{\partial T}{\partial v}+(\alpha_3\beta-\beta_3\alpha)\frac{\partial T}{\partial w}\\ &+\gamma_1\frac{\partial T}{\partial p}\qquad+\gamma_2\frac{\partial T}{\partial q}\qquad+\gamma_3\frac{\partial T}{\partial r}\end{aligned}\right\} = M_\zeta
\end{cases}$$

Die Elimination der Grössen λ aus den 9 Gleichungen, in denen sie vorkommen, lässt sich auch dadurch erreichen, dass man diese Gleichungen:

mit	0	oder mit		$-\alpha_3$	oder mit		α_2
-	0	-	-	$-\beta_3$	-	-	β_2
-	0	-	-	$-\gamma_3$	-	-	γ_2
-	α_3	-	-	0	-	-	$-\alpha_1$
-	β_3	-	-	0	-	-	$-\beta_1$
-	γ_3	-	-	0	-	-	$-\gamma_1$
-	$-\alpha_2$	-	-	α_1	-	-	0
-	$-\beta_2$	-	-	β_1	-	-	0
-	$-\gamma_2$	-	-	γ_1	-	-	0

multiplicirt und jedesmal addirt; dadurch erhält man:

$$(6^b)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} = v\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q} \\ \qquad + \alpha_2\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_3} - \alpha_3\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2} + \beta_2\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_3} - \beta_3\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_2} + \gamma_2\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma_3} - \gamma_3\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma_2}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} = w\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r} \\ \qquad + \alpha_3\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1} - \alpha_1\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_3} + \beta_3\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_1} - \beta_1\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_3} + \gamma_3\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma_1} - \gamma_1\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma_3}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} = u\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p} \\ \qquad + \alpha_1\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2} - \alpha_2\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1} + \beta_1\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_2} - \beta_2\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_1} + \gamma_1\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma_2} - \gamma_2\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma_1}. \end{cases}$$

§ 3.

Es soll jetzt die Annahme eingeführt werden, dass keine Kräfte auf den Körper wirken, das Potential Ω also gleich Null gesetzt werden kann. Die Gleichungen (5^b) und (6^b) nehmen dann die folgende, einfache Gestalt an:

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} = q\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial v}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} = r\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial w}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} = p\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial u}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} = v\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} = w\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} = u\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p}. \end{cases}$$

Man findet drei allgemeine Integrale dieser Gleichungen, indem man sie

mit u	oder mit $\frac{\partial T}{\partial u}$	oder mit $\frac{\partial T}{\partial p}$
$-v$	$-\frac{\partial T}{\partial v}$	$-\frac{\partial T}{\partial q}$
$-w$	$-\frac{\partial T}{\partial w}$	$-\frac{\partial T}{\partial r}$
$-p$	0	$-\frac{\partial T}{\partial u}$
$-q$	0	$-\frac{\partial T}{\partial v}$
$-r$	0	$-\frac{\partial T}{\partial w}$

multiplicirt und jedesmal addirt.

Erwägt man, dass:

$$2T = u\frac{\partial T}{\partial u} + v\frac{\partial T}{\partial v} + w\frac{\partial T}{\partial w} + p\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{\partial T}{\partial r}$$

und:

$$\frac{dT}{dt} \quad \frac{\partial T}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial T}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{dw}{dt} + \frac{\partial T}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial T}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial T}{\partial r}\frac{dr}{dt}$$

ist, so ergiebt das erste Faktorensystem:

$$2T = L;$$

die beiden andern ergeben:

(8)
$$\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 = M,$$

$$\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{\partial T}{\partial r} = N,$$

wo L, M, N willkürliche Constanten bedeuten.

Sechs andere Integralgleichungen des vorliegenden Problems erhält man aus den Gleichungen (5*) und (6*). Setzt man in diesen, der eingeführten Voraussetzung gemäss,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}, \frac{\partial \Omega}{\partial \beta}, \frac{\partial \Omega}{\partial \gamma}, \quad M_1, \quad M_2, \quad M_3$$

gleich Null, so folgt aus ihnen:

$$(9)\qquad \begin{cases} \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial w} = \mathrm{A}, \\ \beta_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial w} = \mathrm{B}, \\ \gamma_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial w} = \mathrm{C}, \end{cases}$$

$$(10)\qquad \begin{cases} \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial r} = A + \beta \mathrm{C} - \gamma \mathrm{B}, \\ \beta_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial r} = B + \gamma \mathrm{A} - \alpha \mathrm{C}, \\ \gamma_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial r} = \Gamma + \alpha \mathrm{B} - \beta \mathrm{A}, \end{cases}$$

wo A, B, C, A, B, Γ willkürliche Constanten bezeichnen.

Die beiden letzten der Gleichungen (8) sind Folgen der Gleichungen (9) und (10), und die Constanten M und N sind durch die Constanten A, B, C, A, B, Γ ausdrückbar. Quadrirt man nämlich die Gleichungen (9) und addirt sie, multiplicirt man dann die Gleichungen (9) mit den Gleichungen (10) und addirt sie wieder, so erhält man bei Rücksicht auf die Gleichungen (8):

$$(11)\qquad \begin{cases} \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 = M, \\ \mathrm{A}A + \mathrm{B}B + \mathrm{C}\Gamma = N. \end{cases}$$

§ 4.

Bevor vereinfachende Voraussetzungen in Bezug auf die Gestalt des Körpers und die Vertheilung der Masse in ihm eingeführt werden, möge eine particuläre Lösung der vorliegenden Differentialgleichungen angeführt werden, welche unter denselben Annahmen gilt, wie die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichungen.

Die Gleichungen (7) erfüllt man, wenn man $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ und u, v, w gleich Constanten setzt, deren Verhältnisse man passend bestimmt, nämlich so, dass

$$u : v : w = \frac{\partial T}{\partial u} : \frac{\partial T}{\partial v} : \frac{\partial T}{\partial w}$$

ist. Erwägt man, dass, wenn p, q, r verschwinden, T eine homogene Funktion zweiten Grades von u, v, w wird, und zwar eine, die stets positiv bleibt, so sieht man, dass die Be-

stimmung der Verhältnisse $u:v:w$ übereinkommt mit der Bestimmung der Hauptaxen eines gewissen Ellipsoids. Es folgt daraus mit Leichtigkeit, dass es für jeden Körper 3, und im Allgemeinen nur 3, auf einander senkrechte Richtungen giebt, in denen er, ohne sich zu drehen, in der Flüssigkeit fortschreiten kann.

§ 5.

Die Zahl der Constanten, die in dem Ausdrucke von T vorkommen, ist im Allgemeinen 21; es soll jetzt untersucht werden, wie diese Zahl sich verringert, wenn der Körper gewisse Symmetrien darbietet. Dabei soll zuerst der Theil von T ins Auge gefasst werden, den die lebendige Kraft der Flüssigkeit bildet. Das Doppelte dieser lebendigen Kraft setze man:

$$\begin{aligned} = a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{14}up + 2a_{15}uq + 2a_{16}ur \\ + a_{22}v^2 + 2a_{23}vw + 2a_{24}vp + 2a_{25}vq + 2a_{26}vr \\ + a_{33}w^2 + \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist dann, wenn die Dichtigkeit der Flüssigkeit durch ϱ bezeichnet wird:

$$= \varrho \iiint dx\,dy\,dz \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^3 \right\},$$

wo die Integration über den Raum auszudehnen ist, den die Flüssigkeit zur Zeit t erfüllt, und φ die in § 1 besprochene Funktion von x, y, z bedeutet. Substituirt man hier für φ den in Gleichung (3) angegebenen Werth, so findet man für die Coëfficienten a die folgenden Ausdrücke:

$$a_{11} = \varrho \iiint dx\,dy\,dz \left\{ \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2 \right\},$$

$$a_{12} = \varrho \iiint dx\,dy,\,dz \left\{ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \right\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder auch, wenn dS ein Element der Oberfläche des Körpers und N die nach dem Innern der Flüssigkeit gerichtete Normale desselben bedeutet:

$$(12)\qquad \begin{cases} a_{11} = -\varrho \int dS\, \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial N}, \\ a_{12} = -\varrho \int dS\, \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial N}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

Es werde nun angenommen, dass die Oberfläche des Körpers symmetrisch in Bezug auf die xz-Ebene ist, d. h. dass, wenn x, y, z die Coordinaten eines Punktes derselben sind, sie auch den Punkt x, $-y$, z enthält. Zwei Punkte, wie diese, sollen entsprechende Punkte genannt werden. In zwei entsprechenden Punkten der Oberfläche haben dann, den Gleichungen (4) zufolge, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial N}$, $\frac{\partial \varphi_3}{\partial N}$, $\frac{\partial \varphi_5}{\partial N}$ gleiche und $\frac{\partial \varphi_2}{\partial N}$, $\frac{\partial \varphi_4}{\partial N}$, $\frac{\partial \varphi_6}{\partial N}$ entgegengesetzte Werthe. Daraus folgt, dass in irgend zwei entsprechenden Punkten des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes, also auch in zwei entsprechenden Punkten der Oberfläche des Körpers φ_1, φ_3, φ_5 gleiche und φ_2, φ_4, φ_6, bei passender Bestimmung der in ihnen vorkommenden additiven Constanten, entgegengesetzte Werthe haben, und daraus ergiebt sich weiter, bei Rücksicht auf die Gleichungen (12), dass diejenigen a verschwinden, bei denen ein Index der Reihe 1, 3, 5, der andere der Reihe 2, 4, 6 angehört.

Die doppelte lebendige Kraft des Körpers ist, wenn dm ein Element seiner Masse bezeichnet, das die Coordinaten x, y, z besitzt, in Folge der Bedeutung der Ausdrücke (2):

$$= \int dm \{ (u + ry - qz)^2 + (v + pz - rx)^2 + (w + qx - py)^2 \}$$

oder:

$$= \int' dm \{ u^2 + v^2 + w^2 + (y^2 + z^2)p^2 + (z^2 + x^2)q^2 + (x^2 + y^2)r^2 + 2x(wq - vr) + 2y(ur - wp) + 2z(vp - uq) - 2yz\ qr - 2zx\ rp - 2xy\ pq \};$$

ist die Vertheilung der Masse symmetrisch zur xz-Ebene, so verschwinden hier diejenigen Glieder welche die Factoren:

$$ur - wp,\quad qr,\quad pq$$

enthalten. Setzt man jenen Ausdruck allgemein:

$$= b_{11}u^2 + 2b_{12}uv + 2b_{13}uw + 2b_{14}up + \cdots$$
$$+ \quad b_{22}v^2 + 2b_{23}vw + \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

so verschwinden daher, sobald die Masse symmetrisch zur xz-Ebene vertheilt ist, diejenigen b, bei denen ein Index der Reihe 1, 3, 5, der andere der Reihe 2, 4, 6 angehört.

Daraus folgt, dass, wenn man allgemein:

$$2T = c_{11}u^2 + 2c_{12}uv + 2c_{13}uw + 2c_{14}up + \cdots$$
$$+ \quad c_{22}v^2 + 2c_{23}vw + \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

setzt, diejenigen c gleich Null sind, bei denen ein Index der Reihe 1, 3, 5, der andere der Reihe 2, 4, 6 angehört, falls der Körper, sowohl in Bezug auf seine Gestalt, als in Bezug auf die Vertheilung der Masse in ihm, symmetrisch zur xz-Ebene ist.

Findet eine solche Symmetrie in Bezug auf die yx-Ebene oder die zy-Ebene statt, so treten an Stelle der Reihen 1, 3, 5 und 2, 4, 6 die Reihen 2, 1, 6 und 3, 5, 4 oder die Reihen 3, 2, 4 und 1, 6, 5.

Ist der Körper symmetrisch in Bezug auf die drei Coordinatenebenen, so enthält hiernach der Ausdruck von $2T$ nur die Quadrate von u, v, w, p, q, r.

Es soll nun angenommen werden, dass der Körper der Gestalt und der Vertheilung der Masse nach ein Rotationskörper ist, dessen Axe mit der x-Axe zusammenfällt. Es findet dann Symmetrie in Bezug auf die xy-Ebene und in Bezug auf die xz-Ebene statt, und daher ist

$$2T = c_{11}u^2 + c_{22}v^2 + c_{33}w^2 + c_{44}p^2 + c_{55}q^2 + c_{66}r^2$$
$$+ 2c_{26}vr + 2c_{35}wq.$$

Zwischen den hier vorkommenden Constanten bestehen aber noch einige Beziehungen. Um diese zu finden, führe man neben dem System der x, y, z noch ein zweites, im Körper festes Coordinatensystem, das der x', y', z', ein; in Bezug auf dieses sollen u', v', w', p', q', r', c'_{11}, c'_{12}, . . , dieselbe Bedeutung haben, wie u, v, w, p, q, r, c_{11}, c_{12}, . . . in Bezug auf jenes. Die beiden Coordinatensysteme sollen denselben Anfangspunkt

und dieselbe x-Axe haben, so dass, wenn x, y, z und x', y', z', sich auf denselben Punkt beziehen:

$$\begin{aligned} x &= x', \\ y &= y' \cos\vartheta + z' \sin\vartheta, \\ z &= -y' \sin\vartheta + z' \cos\vartheta \end{aligned}$$

ist. Wegen der Bedeutung der Ausdrücke (2) bestehen dann die Gleichungen:

$$\begin{aligned} u + ry - qz &= u' + r'y' - q'z', \\ v + pz - rx &= (v' + p'z' - r'x')\cos\vartheta + (w' + q'x' - p'y')\sin\vartheta, \\ w + qx - py &= -(v' + p'z' - r'x')\sin\vartheta + (w' + q'x' - p'y')\cos\vartheta, \end{aligned}$$

aus welchen folgt:

$$\begin{aligned} u &= u', & p &= p', \\ v &= v'\cos\vartheta + w'\sin\vartheta, & q &= q'\cos\vartheta + r'\sin\vartheta, \\ w &= -v'\sin\vartheta + w'\cos\vartheta, & r &= -q'\sin\vartheta + r'\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Eine Symmetrie, wie in Bezug auf die xy- und xz-Ebenen, besteht auch in Bezug auf die $x'y'$- und $x'z'$-Ebenen; es ist daher auch

$$\begin{aligned} 2T = c'_{11}u'^2 + c'_{22}v'^2 + c'_{33}w'^2 + c'_{44}p'^2 + c'_{55}q'^2 + c'_{66}r'^2 \\ + 2c'_{26}v'r' + 2c'_{35}w'q'. \end{aligned}$$

Setzt man die beiden Ausdrücke von $2T$ einander gleich und drückt die Grössen u, v, w, p, q, r durch u', v', w', p', q', r' aus, so erhält man durch Vergleichung der Coëfficienten der entsprechenden Glieder:

$$c_{22} = c_{33}, \quad c_{55} = c_{66}, \quad c_{26} + c_{35} = 0$$

und Gleichungen, die aussagen, dass die Grössen c' den entsprechenden Grössen c gleich sind. Hiernach ist:

$$2T = c_{11}u^2 + c_{22}(v^2 + w^2) + c_{44}p^2 + c_{55}(q^2 + r^2) + 2c_{26}(vr - wq).$$

Dieser Ausdruck lässt noch eine Vereinfachung zu durch eine passende Wahl des Anfangspunktes der Coordinaten auf der x-Axe. Um das zu zeigen, führe man, ähnlich wie oben, neben dem Coordinatensystem der x, y, z ein zweites, das der x', y', z', ein, das so gewählt sein soll, dass für jeden Punkt

$$x = x' + a, \quad y = y', \quad z = z'$$

ist. Bei einer ähnlichen Bezeichnung, wie sie oben gebraucht ist, hat man dann:

$$u + ry - qz = u' + r'y' - q'z',$$
$$v + pz - rx = v' + p'z' - r'x',$$
$$w + qx - py = w' + q'x' - p'y',$$

also:

$$u = u', \qquad p = p',$$
$$v = v' + r'a, \qquad q = q',$$
$$w = w' - q'a, \qquad r = r'$$

und:

$$c_{11}u^2 + c_{22}(v^2 + w^2) + c_{44}p^2 + c_{55}(q^2 + r^2) + 2c_{26}(vr - wq$$
$$= c'_{11}u'^2 + c'_{22}(v'^2 + w'^2) + c'_{44}p'^2 + c'_{55}(q'^2 + r'^2) + 2c'_{26}(v'r' - w'q'),$$

woraus folgt:

$$c_{11} = c'_{11}, \qquad c_{22} = c'_{22}, \qquad c_{44} = c'_{44},$$
$$c_{55} = c'_{55} - 2c'_{26}a + c'_{22}a^2,$$
$$c_{26} = c'_{26} - c'_{22}a.$$

Hieraus geht hervor, dass, wenn der Anfangspunkt der x beliebig gewählt ist, a so bestimmt werden kann, dass

$$c_{26} = 0,$$

also:

$$2T = c_{11}u^2 + c_{22}(v^2 + w^2) + c_{44}p^2 + c_{55}(q^2 + r^2) \tag{13}$$

wird.

Es möge bemerkt werden, dass diese Gleichung, wie aus ihrer Herleitung ersichtlich ist, auch gilt, wenn der Körper kein Rotationskörper ist, sobald er nur symmetrisch ist in Bezug auf zwei oder mehr Paare auf einander senkrechter Ebenen, die durch die x-Axe gehn; was z. B. bei einem homogenen geraden Prisma oder einer solchen Pyramide von quadratischem oder regelmässig sechseckigem Querschnitt bei passender Wahl der x-Axe stattfindet. Auch für solche Fälle werden also die Folgerungen gelten, die an die Gleichung (13) geknüpft werden sollen.

§ 6.

Den durch die Gleichung (13) bestimmten Werth von T denke man sich nun in die Gleichungen (7) substituirt. Die vierte von diesen wird dann:

$$\frac{dp}{dt} = 0 \quad \text{d. h.} \quad p = \text{const.};$$

die andern werden:

$$(14)\quad \begin{cases} c_{11}\frac{du}{dt} = -c_{22}(vr - wq), \\ c_{22}\frac{dv}{dt} = \quad c_{11}\,ur - c_{22}wp, \\ c_{22}\frac{dw}{dt} = -c_{11}\,uq + c_{22}vp, \\ c_{55}\frac{dq}{dt} = \quad (c_{11} - c_{22})uw + (c_{44} - c_{55})pr, \\ c_{55}\frac{dr}{dt} = -(c_{11} - c_{22})\,uv - (c_{44} - c_{55})pq. \end{cases}$$

An Stelle der Variabeln v, w, q, r sollen hier neue, s, σ, φ, ψ, eingeführt werden, so dass:

$$(15)\quad \begin{cases} v = s\cos\varphi, & q = \sigma\cos(\varphi + \psi), \\ w = s\sin\varphi, & r = \sigma\sin(\varphi + \psi), \end{cases}$$

also:

$$v^2 + w^2 = s^2, \quad q^2 + r^2 = \sigma^2,$$
$$vq + wr = s\sigma\cos\psi,$$
$$vr - wq = s\sigma\sin\psi$$

ist. Die erste der Gleichungen (14) wird dann:

$$(16)\qquad c_{11}\frac{du}{dt} = -c_{22}\,s\,\sigma\sin\,\psi,$$

und, da:

$$s^2\,d\varphi = -w\,dv + v\,dw$$

ist, so folgt aus der zweiten und dritten:

$$(17)\qquad c_{22}\frac{d\varphi}{dt} = -c_{11}\frac{u\sigma}{s}\cos\psi + c_{22}p.$$

Die drei Integralgleichungen (8) werden:

$$(18)\quad \begin{cases} c_{11}u^2 + c_{22}s^2 + c_{44}p^2 + c_{55}\sigma^2 = L, \\ c^2_{11}u^2 + c^2_{22}s^2 \qquad\qquad\quad = M, \\ c_{11}c_{44}up + c_{22}c_{55}\,s\,\sigma\cos\psi \quad = N, \end{cases}$$

oder:

$$(19)\quad \begin{cases} s = \sqrt{f - f'u^2}, \\ \sigma = \sqrt{g - g'u^2}, \\ s\,\sigma\cos\psi = \quad h - h'u, \end{cases}$$

wenn f, g, h, f', g', h' Constanten bedeuten, die in gewisser Weise von L, M, N, p und den Grössen c abhängen. Hieraus folgt:

$$s\sigma \sin\psi = \sqrt{(f - f' u^2)(g - g' u^2) - (h - h' u)^2};$$

die Gleichungen (16) und (17) geben daher:

$$(20) \quad . \quad c_{22}\, dt = - c_{11} \frac{du}{\sqrt{(f - f' u^2)(g - g' u^2) - (h - h' u)^2}}$$

und:

$$c^2_{22}\, d\varphi = c_{11} \frac{c_{11}\, u (h - h' u) - c_{22}\, p (f - f' u^2)}{(f - f' u^2)\sqrt{(f - f' u^2)(g - g' u^2) - (h - h' u)^2}}\, du.$$

Diese beiden Gleichungen erlauben t und φ durch elliptische Integrale als Funktionen von u darzustellen und u und φ mit Hülfe elliptischer Funktionen durch t auszudrücken. Ist das geschehen, so kann man durch Benutzung von (19) und (15) alle in (14) vorkommenden Unbekannten als Funktionen von t darstellen.

§ 7.

Hat man bei einer beliebigen Gestalt des in der Flüssigkeit bewegten Körpers u, v, w, p, q, r durch die Gleichungen (7) als Functionen von t bestimmt, so erfordert die Berechnung der eigentlichen Unbekannten des Problems, nämlich der Coordinaten α, β, γ und der Cosinus α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3 immer nur die Ausführung von Quadraturen.

Von den willkürlichen Constanten A, B, C, die in den Gleichungen (9) vorkommen, kann man zwei, etwa B und C, gleich Null setzen, ohne die Allgemeinheit der betrachteten Bewegung zu beeinträchtigen; man verfügt dadurch nur über die Richtung der ξ-Axe. Betrachtet man nämlich $\frac{\partial T}{\partial u}$, $\frac{\partial T}{\partial v}$, $\frac{\partial T}{\partial w}$ als die Componenten einer Geschwindigkeit nach den Axen der x, y, z, so zeigen die Gleichungen (9), dass die Componenten dieser Geschwindigkeit nach den Axen der ξ, η, ζ den Constanten A, B, C gleich sind; giebt man der ξ-Axe die Richtung dieser Geschwindigkeit, so wird $B = 0$ und $C = 0$. Zugleich wird nach (11):

$$A^2 = M.$$

Multipliçirt man nach dieser Festsetzung die Gleichungen (9)

mit α_1	oder mit α_2	oder mit α_3
β_1	β_2	β_3
γ_1	γ_2	γ_3

und addirt sie jedesmal, so erhält man:

$$\alpha_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial T}{\partial u}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial T}{\partial v}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{A}\frac{\partial T}{\partial w}.$$

Um für die übrigen Cosinus Ausdrücke zu finden, setze man:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \cos\theta, \\
\alpha_2 &= -\sin\Phi\sin\theta, \\
\alpha_3 &= \cos\Phi\sin\theta, \\
\beta_1 &= \sin\Psi\sin\theta, \\
\beta_2 &= \cos\Phi\cos\Psi + \sin\Phi\sin\Psi\cos\theta, \\
\beta_3 &= \sin\Phi\cos\Psi - \cos\Phi\sin\Psi\cos\theta, \\
\gamma_1 &= -\cos\Psi\sin\theta, \\
\gamma_2 &= \cos\Phi\sin\Psi - \sin\Phi\cos\Psi\cos\theta, \\
\gamma_3 &= \sin\Phi\sin\Psi + \cos\Phi\cos\Psi\cos\theta.
\end{aligned}$$

Die Winkel θ und Φ sind dann aus den Werthen von α_1, α_2, α_3 zu bestimmen, und es bleibt nur Ψ zu ermitteln. Man hat aber:

$$\operatorname{tg}\Psi = -\frac{\beta_1}{\gamma_1}$$

und, nach den Definitionsgleichungen von p, q, r:

$$\frac{d\beta_1}{dt} = \beta_3 q - \beta_2 r, \qquad \frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_3 q - \gamma_2 r;$$

mit Hülfe hiervon findet man:

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\alpha_2 q + \alpha_3 r}{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}$$

oder:

$$\frac{d\Psi}{dt} = -A\,\frac{q\frac{\partial T}{\partial v} + r\frac{\partial T}{\partial w}}{\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2}. \tag{21.}$$

Zur Bestimmung der Coordinaten β und γ führen die Gleichungen (10). Die beiden letzten von diesen geben, wenn man die in ihnen vorkommenden Constanten B und Γ gleich Null setzt, was darauf hinauskommt, dass man über die Lage der ξ-Axe verfügt:

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{1}{A}\left(\beta_1\frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2\frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3\frac{\partial T}{\partial r}\right), \\
\beta &= -\frac{1}{A}\left(\gamma_1\frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2\frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3\frac{\partial T}{\partial r}\right),
\end{aligned}$$

Die erste der Gleichungen (10) führt auf die letzte der Gleichungen (8) zurück. Die Ordinate α endlich ergiebt sich aus der Gleichung:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w$$

oder:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{A}\left(u\frac{\partial T}{\partial u} + v\frac{\partial T}{\partial v} + w\frac{\partial T}{\partial w}\right). \tag{22}$$

In dem im vorigen Paragraphen behandelten Falle, dass der Körper ein Rotationskörper ist, kann man setzen:

$$\cos\theta = \frac{1}{A} c_{11} u, \qquad \sin\theta = -\frac{1}{A} c_{22} s,$$

$$\Psi = \frac{\pi}{2} + \varphi;$$

die Gleichung (21) wird:

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{A\,k - k' u}{c_{22} f - f' u^2},$$

die Gleichung (22):

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{A}\left(c_{22} f + (c_{11} - c_{22} f')\, u^2\right)$$

oder, da nach (18) und (19):

$$f = \frac{A^2}{c_{22}^2}, \qquad f' = \frac{c_{11}^2}{c_{22}^2},$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{A}{c_{22}}\left(1 - c_{11}\,(c_{11} - c_{22})\,\frac{u^2}{A^2}\right). \tag{23}$$

Führt man nun für dt den aus (20) sich ergebenden Wert ein, so erhält man auch Ψ und α als elliptische Integrale durch u ausgedrückt.

§. 8.

Lässt man die Constanten k und k', die durch die Gleichungen (19) eingeführt sind, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Constanten p und N verschwinden, so gelangt man zu dem, im Eingange angeführten, von den Herren Thomson und Tait behandelten Falle. Es wird dann q einer willkür-

lichen Constanten gleich; setzt man diese gleich Null, d. h. verfügt man bei gegebener Anfangsbewegung in gewisser Weise über die Richtung der y-Axe, so wird:

$$w = 0, \qquad q = 0, \qquad \Phi = \frac{\pi}{2}$$

Ferner wird auch Ψ gleich einer willkürlichen Constanten; macht man diese gleich $\frac{\pi}{2}$, indem man die Richtung der η-Axe passend wählt, so hat man:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos\theta, & \beta_1 &= \sin\theta, & \gamma_1 &= 0, \\ \alpha_2 &= -\sin\theta, & \beta_2 &= \cos\theta, & \gamma_2 &= 0, \\ \alpha_3 &= 0, & \beta_3 &= 0, & \gamma_3 &= 1, \end{aligned}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{A} c_{11} u, \qquad \sin\theta = -\frac{1}{A} c_{22} v.$$

Endlich findet man:

$$\gamma = 0, \qquad \beta = -\frac{1}{A} c_{55} r,$$

während α aus Gleichung (23) zu berechnen ist.

Es hat keine Schwierigkeit für diesen Fall die in den beiden vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichungen weiter zu discutiren und durch sie die Unbekannten des Problems als elliptische Functionen der Zeit auszudrücken. Einfacher aber gelangt man zu demselben Ziele durch Betrachtungen, die sich an die Differentialgleichungen knüpfen, die in diesem Falle gelten.

Setzt man in den Gleichungen (14)

$$w = 0, \qquad p = 0, \qquad q = 0,$$

so werden sie:

$$c_{11} \frac{du}{dt} = -c_{22} vr,$$

$$c_{22} \frac{dv}{dt} = -c_{11} ur,$$

$$c_{55} \frac{dr}{dt} = -(c_{11} - c_{22}) uv.$$

Vergleicht man dieselben mit den identischen Gleichungen:

$$\frac{d \operatorname{sin\,am} \lambda t}{dt} = \lambda \cos \operatorname{am} \lambda t \, \Delta \operatorname{am} \lambda t,$$

$$\frac{d \cos \operatorname{am} \lambda t}{dt} = -\lambda \sin \operatorname{am} \lambda t \, \Delta \operatorname{am} \lambda t,$$

$$\frac{d \Delta \operatorname{am} \lambda t}{dt} = -\lambda \varkappa^2 \sin \operatorname{am} \lambda t \cos \operatorname{am} \lambda t,$$

in denen $\varkappa$ den Modul der elliptischen Funktionen bedeutet, so sieht man, dass bei passender Wahl des Anfangspunktes der Zeit die Grössen u, v, r die Werthe

$$l \sin \operatorname{am} \lambda t, \qquad m \cos \operatorname{am} \lambda t, \qquad n \Delta \operatorname{am} \lambda t$$

annehmen müssen, wenn die Constanten passend bestimmt werden. Diese Werthe können unter jene Grössen so vertheilt werden, dass alle Constanten reell sind und $\varkappa$ ein echter Bruch ist. Um das zu bewirken, gehe man von den Gleichungen

$$c_{11} u^2 + c_{22} v^2 + c_{55} r^2 = L,$$
$$c_{11} u^2 + c_{22}^2 v^2 \qquad\quad = M$$

aus, in welche sich durch die jetzt eingeführten Annahmen die Gleichungen (18) verwandeln, und welche Integrale der jetzt vorliegenden Differentialgleichungen sind. Bedenkt man, dass, wenn die genannte Absicht erreicht ist, $\cos^2 \operatorname{am}$ und $\Delta^2 \operatorname{am}$ abnehmen, wenn $\sin^2 \operatorname{am}$ wächst, so folgt aus der zweiten von diesen Gleichungen, dass eine von den beiden Grössen u oder r durch $\sin \operatorname{am}$ ausgedrückt werden muss, weil ihr zufolge u und v^2 in entgegengesetztem Sinne sich gleichzeitig ändern. Aus den beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$(24) \qquad \begin{cases} c_{11} (c_{22} - c_{11}) u^2 + c_{22} c_{55} r^2 = \text{Const} \\ \text{und:} \\ c_{22} (c_{11} - c_{22}) v^2 + c_{11} c_{55} r^2 = \text{Const.} \end{cases}$$

Da nun c_{11}, c_{22}, c_{55} positive Grössen sind, so folgt aus derselben Eigenschaft der in Rede stehenden elliptischen Funktionen, dass u durch $\sin \operatorname{am}$ ausgedrückt werden muss, wenn $c_{22} > c_{11}$, und v, wenn $c_{11} > c_{22}$ ist. Jeder dieser beiden Fälle theilt sich wieder in zwei.

Ist u durch $\sin \operatorname{am}$ ausgedrückt, also $c_{22} > c_{11}$, so kann durch $\cos \operatorname{am}$ und r durch $\Delta \operatorname{am}$ auszudrücken sein oder umgekehrt. Maassgebend ist dabei, dass $\cos^2 \operatorname{am}$ für gewisse Werthe des reellen Arguments verschwindet, $\Delta^2 \operatorname{am}$ aber nicht.

Bezeichnen v_1 und r_1 die Werthe, die v und r zu einer beliebig gewählten Zeit besitzen, so ist nach (24):

$$-c_{22}(c_{22}-c_{11})v^2+c_{11}c_{55}r^2=-c_{22}(c_{22}-c_{11})v_1^2+c_{11}c_{55}r_1^2.$$

Es kann hiernach v^2 verschwinden und r^2 kann nicht verschwinden, sobald der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung positiv ist; das Umgekehrte findet statt, sobald dieser Ausdruck negativ ist; im ersten Falle ist v, im zweiten r durch cos am auszudrücken.

Eine ähnliche Betrachtung ist auf den Fall, dass $c_{11}>c_{22}$ ist, anwendbar.

Es sollen für die vier Fälle, die hiernach zu unterscheiden sind, die Formeln angegeben werden, welche die Unbekannten des Problems in reeller Form als Functionen der Zeit darstellen. Dabei sollen durch u_0, v_0, r_0 die Werthe von u, v, w für $t=0$ bezeichnet werden. Eine von den Grössen u_0, v_0 ist dann Null, die andere und r_0 sind den Grössen m, n gleich, da, wenn das Argument verschwindet, sin am $=0$ und cos am $=\Delta$ am $=1$ ist.

Fall 1.

Wenn $c_{22}>c_{11}$ und $c_{11}c_{55}r_1^2>c_{22}(c_{22}-c_{11})v_1^2$, so ist:

$$u=l\sin\operatorname{am}\lambda t, \qquad c_{11}l=-\frac{c_{22}v_0r_0}{\lambda},$$

$$v=v_0\cos\operatorname{am}\lambda t, \qquad c_{22}v_0=-\frac{c_{11}lr_0}{\lambda},$$

$$r=r_0\Delta\operatorname{am}\lambda t, \qquad c_{55}r_0=-\frac{(c_{22}-c_{11})lr_0}{\lambda\varkappa^2},$$

$$\varkappa^2=\frac{c_{22}(c_{22}-c_{11})v_0^2}{c_{11}c_{55}r_0^2},$$

$$\lambda=r_0\sqrt{\quad},$$

$$l=-\frac{c_{22}}{c_{11}}v_0\sqrt{\quad},$$

$$A=c_{22}r_0\sqrt{\quad},$$

$$\theta=-\frac{\pi}{2}-\operatorname{am}\lambda t,$$

$$\beta=-\frac{c_{11}r_0}{c_{22}v_0}\Delta\operatorname{am}\lambda t,$$

$$\alpha = \frac{r_0}{r_0}\left\{\left(1 + \frac{c_{33}\,r_0^2}{c_{22}\,v_0^2}\right)\lambda t - \frac{c_{33}\,r_0^2}{c_{22}\,v_0^2}\,E(\lambda t)\right\},$$

wo:

$$E(u) = \int_0^u \Delta^2 \operatorname{am} u\, du$$

und $\alpha = 0$ für $t = 0$ angenommen ist.

Fall 2.

Wenn $c_{22} > c_{11}$ und $c_{22}(c_{22} - c_{11})\,r_1^2 > c_{11}\,c_{33}\,r_1^2$, so ist:

$$u = l \sin \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{11}\,l = -\frac{c_{22}\,v_0\,r_0}{\lambda},$$

$$v = v_0\,\Delta \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{22}\,v_0 = -\frac{c_{11}\,l\,r_0}{\lambda\varkappa^2}.$$

$$r = r_0 \cos \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{33}\,r_0 = -\frac{(c_{22} - c_{11})\,l\,r_0}{\lambda}.$$

$$\varkappa^2 = \frac{c_{11}\,c_{33}\,r_0^2}{c_{22}(c_{22} - c_{11})\,v_0^2},$$

$$\lambda = \frac{r_0}{\varkappa},$$

$$l = -\varkappa\frac{c_{22}}{c_{11}}\,v_0,$$

$$\mathrm{A} = c_{22}\,v_0,$$

$$\cos\theta = -\varkappa \sin \operatorname{am} \lambda t, \qquad \sin\theta = -\Delta \operatorname{am} \lambda t,$$

$$\beta = -\frac{c_{33}\,r_0}{c_{22}\,r_0} \cos \operatorname{am} \lambda t,$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{c_{22}\,c_{33}}{c_{11}(c_{22} - c_{11})}}\left(\lambda t - \frac{c_{22} - c_{11}}{c_{22}}\,E\,\lambda t\right).$$

Fall 3.

Wenn $c_{11} > c_{22}$ und $c_{22}\,c_{33}\,r_1^2 > c_{11}\,(c_{11} - c_{22})\,u_1^2$, so ist:

$$u = u_0 \cos \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{11}\,u_0 = \frac{c_{22}\,l\,r_0}{\lambda},$$

$$v = l \sin \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{22}\,l = \frac{c_{11}\,u_0\,r_0}{\lambda},$$

$$r = r_0\,\Delta \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{33}\,r_0 = \frac{(c_{11} - c_{22})\,u_0\,l}{\lambda\varkappa^2}.$$

$$\varkappa^2 = \frac{c_{11}(c_{11} - c_{22})\,u_0^2}{c_{22}\,c_{33}\,r_0^2},$$

$$\lambda = r_0,$$
$$l = \frac{c_{11}}{c_{22}} u_0,$$
$$\mathrm{A} = c_{11} u_0,$$
$$\theta = -\operatorname{am} \lambda t,$$
$$\beta = -\frac{c_{55} r_0}{c_{11} u_0} \Delta \operatorname{am} \lambda t,$$
$$\alpha = \frac{u_0}{r_0} \left\{ \left(1 + \frac{c_{55} r_0^2}{c_{11} u_0^2}\right) \lambda t - \frac{c_{55} r_0^2}{c_{11} u_0^2} E(\lambda t) \right\}.$$

Fall 4.

Wenn $c_{11} > c_{22}$ und $c_{11}(c_{11} - c_{22}) u_1^2 > c_{22} c_{55} r_1^2$, so ist:

$$u = u_0 \Delta \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{11} u_0 = \frac{c_{22} l r_0}{\lambda \varkappa^2},$$
$$v = l \sin \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{22} l = \frac{c_{11} u_0 r_0}{\lambda},$$
$$r = r_0 \cos \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{55} r_0 = \frac{(c_{11} - c_{22}) u_0 l}{\lambda},$$

$$\varkappa^2 = \frac{c_{22} c_{55} r_0^2}{c_{11}(c_{11} - c_{22}) u_0^2},$$
$$\lambda = \frac{r_0}{\varkappa},$$
$$l = \varkappa \frac{c_{11} u_0}{c_{22}},$$
$$\mathrm{A} = c_{11} u_0,$$
$$\cos\theta = \Delta \operatorname{am} \lambda t, \qquad \sin\theta = -\varkappa \sin \operatorname{am} \lambda t,$$
$$\beta = -\frac{c_{55} r_0}{c_{11} u_0} \cos \operatorname{am} \lambda t,$$
$$\alpha = \sqrt{\frac{c_{11} c_{55}}{c_{22}(c_{11} - c_{22})}} \left\{ \lambda t - \frac{c_{11} - c_{22}}{c_{11}} E(\lambda t) \right\}.$$

§. 9.

Noch ein zweiter specieller Fall des hier behandelten Problems möge erwähnt werden.

Die Differentialgleichungen, die aus (14) durch die Substitution (15) entstehen, und die oben nur theilweise angegeben sind, sind vollständig diese:

Für die Bewegung eines Lichtmittelpunktes in einer Fläche

$$\frac{c_{11}}{\varepsilon} = -\,c_{\cdot\cdot} \sin \psi,$$

$$\frac{c_{\cdot\cdot}}{\varepsilon} = \quad c \sin \psi$$

$$\frac{c_{\cdot\cdot}}{\varepsilon} = -\,c \quad - c_{\cdot\cdot} \sin \psi,$$

$$\frac{c_{\cdot\cdot}}{\varepsilon} = -\,c \quad \frac{c}{\varepsilon} \cos \psi - c_{\cdot\cdot}\, \gamma,$$

$$c_{\cdot\cdot}\, c_{\cdot\cdot} \frac{c_{\cdot\cdot}}{\varepsilon} = \varepsilon \cos \psi \quad c_{\cdot\cdot} \frac{c}{\varepsilon} - c_{\cdot\cdot} \quad - c_{\cdot\cdot} \frac{\gamma}{\varepsilon} - c_{\cdot\cdot}\, c_{\cdot\cdot}^{2}$$

Eine partikuläre Lösung derselben erhält man, wenn man γ gleich einer Konstanten σ setzt, die der Gleichung

$$\sigma\, c_{\cdot\cdot}\, c_{\cdot\cdot} \frac{c}{\varepsilon} - c_{\cdot\cdot} \quad - c_{\cdot\cdot} \frac{\gamma}{\varepsilon} = c_{\cdot\cdot}\, c_{\cdot\cdot}^{2}$$

genügen muß.

$$\varphi = \psi - \frac{c \sigma}{c_{\cdot\cdot}\, \varepsilon}\, t$$

wird. Man hat dann weiter:

$$\mathbf{A} = \sqrt{c_{11}^{2} u^{2} + c_{22}^{2} s^{2}},$$

$$\cos \eta = \frac{c_{11} u}{\mathbf{A}}, \qquad \sin \eta = -\frac{c_{22} s}{\mathbf{A}},$$

$$\Psi = \frac{\pi}{2} + \varphi,$$

$$\Psi = -\frac{\mathbf{A} \sigma}{c_{22}\, \varepsilon}\, t,$$

$$\alpha = \frac{1}{\mathbf{A}} (c_{11} u^{2} + c_{22} s^{2})\, t,$$

$$\beta = \frac{1}{\mathbf{A}^{2}} (c_{11}\, c_{55}\, u \sigma - c_{22}\, c_{44}\, s p) \cos \Psi$$

$$\gamma = \frac{1}{\mathbf{A}^{2}} (c_{11}\, c_{55}\, u \sigma - c_{22}\, c_{44}\, s p) \sin \Psi.$$

Aus diesen Ausdrücken von α, β, γ folgt, dass der Anfangspunkt der x, y, z mit gleichbleibender Geschwindigkeit eine Schraubenlinie durchläuft, deren Axe die ξ-Axe ist. Nennt man R den Radius der Cylinderfläche, auf der die Schraubenlinie liegt, so ist:

$$R = \pm \frac{1}{\mathbf{A}^{2}} (c_{11}\, c_{55}\, u \sigma - c_{22}\, c_{44}\, s p).$$

oder wegen der Relation, die zwischen u, s, p, σ bestehen soll:

$$R = \pm \frac{1}{A^2} c_{22} (c_{11} - c_{22}) \frac{u s^2}{\sigma}.$$

Die Geschwindigkeitscomponente des genannten Punktes senkrecht zur ξ-Axe ist daher:

$$\pm \frac{1}{A} (c_{11} - c_{22}) u s.$$

Bezeichnet man durch μ die Tangente des Winkels, den die Richtung eines Elementes der Schraubenlinie mit der Richtung der ξ-Axe bildet, so ist hiernach

$$\pm \mu = \frac{(c_{11} - c_{22}) u s}{c_{11} u^2 + c_{22} s^2}.$$

Soll μ einen gegebenen Werth haben, so ist das Verhältniss $u : s$ aus dieser Gleichung zu bestimmen; dieselbe hat zwei reelle Wurzeln, sobald

$$\mu^2 < \frac{(c_{11} - c_{22})^2}{4 c_{11} c_{22}}.$$

Ist weiter der Radius R gegeben, so dient die für diesen aufgestellte Gleichung zur Bestimmung von $\sigma : s$. Die zwischen u, s, p, σ angenommene Relation lehrt dann $p : u$ kennen, so dass die Verhältnisse der genannten vier Grössen bestimmt sind. Diese können selbst berechnet werden, sobald noch die Geschwindigkeit, mit der die Schraubenlinie durchlaufen wird, gegeben ist. Man sieht, dass die Realität ihrer Werthe allein durch die Ungleichheit bedingt ist, die erfüllt sein muss, damit das Verhältniss $s : u$ reell ist.

Die in diesem Paragraphen angegebenen Resultate sind aus den Differentialgleichungen (14) hergeleitet; sie lassen sich auch herleiten aus den Integralgleichungen, die im §. 6 entwickelt sind. Zu diesem Zwecke hat man die Relationen zwischen den Constanten der Integration aufzustellen, die erfüllt sein müssen, damit die Gleichung für u, die man erhält, wenn man den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in Gleichung (20) gleich Null setzt, zwei gleiche Wurzeln hat, die dem Anfangswerthe von u gleich sind.

Ueber die Kräfte, welche zwei unendlich dünne, starre Ringe in einer Flüssigkeit scheinbar auf einander ausüben können. [1])

Auf einen starren Körper, der in einer bewegten Flüssigkeit sich befindet, werden von dieser Druckkräfte ausgeübt, die im Allgemeinen sich nicht aufheben. Ist in der Nähe des Körpers ein zweiter vorhanden, so wird dieser von Einfluss auf die Bewegung der Flüssigkeit, also auch auf die Druckkräfte sein, die auf den ersten wirken. In einem Falle, in dem diese Druckkräfte sich aufheben, sobald der zweite Körper in die Unendlichkeit gerückt ist, sonst aber von Null verschiedene Resultanten haben, wird man sagen dürfen, dass der zweite Körper auf den ersten scheinbar Kräfte ausübt, die diesen Resultanten gleich sind. Ein solcher Fall findet statt, wenn die beiden Körper unendlich dünne Ringe sind und die Flüssigkeit die allgemeinste Bewegung hat, die sie haben kann, während sie in der Unendlichkeit ruht.

Genauer präcisirt sind die Voraussetzungen, welche hier zu Grunde gelegt werden sollen, diese: Die Flüssigkeit ist unzusammendrückbar und ohne Reibung; sie ist vollständig begrenzt durch die Oberflächen der beiden Ringe und eine im Unendlichen liegende, geschlossene, feste Fläche; auf ihre Theile wirken keine Kräfte; diese Theile rotiren nicht und haben Geschwindigkeiten, die sich überall stetig im Raume ändern. In Bezug auf die Gestalt der Ringe wird angenommen werden, dass ein Jeder von ihnen eine Mittellinie hat, die eine beliebig gestaltete geschlossene Curve ist, und dass die auf dieser Mittellinie senkrechten Querschnitte Kreise von einem unendlich kleinen, constanten Radius sind, deren Mittelpunkte in der Mittellinie liegen.

Unter diesen Voraussetzungen wird bewiesen werden, dass die beiden Ringe scheinbar Kräfte aufeinander ausüben, die denjenigen gleich sind, mit welchen sie aufeinander wirken würden, wenn zwei elektrische Ströme in ihnen flössen.

---

[1]) Borchardt's Journal Bd. 71, 1869.

Bei den gemachten Festsetzungen giebt es für die Bewegung der Flüssigkeit ein Geschwindigkeitspotential; es möge dieses durch φ bezeichnet werden, die Zeit durch t, die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes des zur Zeit t von der Flüssigkeit erfüllten Raumes durch x, y, z, der Druck durch p, die Dichtigkeit durch ϱ; dann sind:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

die Componenten der Geschwindigkeit zur Zeit t im Punkte (x, y, z) und es ist:

$$\frac{p}{\varrho} = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right).$$

Dabei ist φ eine in dem Gebiete seiner Argumente stetige, aber im Allgemeinen vielwerthige Funktion von x, y, z, t. Sind φ' und φ'' zwei Werthe von φ für dieselben Werthe von x, y, z, t und ist

$$\varphi' - \varphi'' = \varkappa,$$

so ist $\varkappa$ unabhängig von x, y, z, da die Geschwindigkeiten einwerthig sein müssen, und auch unabhängig von t, da der Druck einwerthig sein muss; es ist $\varkappa$ also eine Constante.

Dass φ mehrwerthig sein kann, ist eine Folge davon, dass der von der Flüssigkeit erfüllte Raum ein mehrfach, und zwar dreifach, zusammenhängender ist. Man denke sich diesen Raum in einen einfach zusammenhängenden durch zwei Querschnitte verwandelt; als solche mögen zwei Flächen genommen werden, von denen die erste vollständig begrenzt wird durch eine Linie, die auf der Oberfläche des ersten Ringes der Mittellinie dieses parallel verläuft, die zweite durch eine Linie, die in gleicher Weise auf der Oberfläche des zweiten Ringes gezogen ist. Dazu, dass es solche Flächen giebt, wird erfordert, dass die Ringe sich nicht gegenseitig umschlingen. Der Fall, dass dieses geschieht, soll von der Betrachtung ausgeschlossen werden, obwohl auch in ihm, wie sich leicht erweisen lässt, der zu beweisende Satz seine Gültigkeit behält. In dem, auf die angegebene Weise gebildeten, einfach zusammenhängenden Raume ist φ einwerthig, hat aber auf beiden Seiten eines jeden Querschnitts im Allgemeinen verschiedene Werthe. Für

den ersten Querschnitt sei die Differenz dieser Werthe $\varkappa_1$, für den zweiten $\varkappa_2$, wobei dann nach der vorher gemachten Bemerkung $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ Constanten sind.

Die Bedingungen, denen die Funktion φ nun zu genügen hat, sind diese:

1) In dem ganzen Gebiete von x, y, z ist

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0,$$

oder, wie hierfür gesetzt werden soll,

$$\Delta\varphi=0.$$

2) Bei dem Durchgange durch den ersten Querschnitt ändert sich φ sprungweise um $\varkappa_1$, bei dem Durchgange durch den zweiten um $\varkappa_2$.

3) Bedeutet N die nach dem Innern der Flüssigkeit gerichtete Normale eines Elementes der Grenzflächen derselben, so ist für alle Punkte der Oberfläche eines jeden Ringes $\frac{\partial\varphi}{\partial N}$ gleich der Componente der Geschwindigkeit des anliegenden Theiles des Ringes nach der Richtung von N.

4) Für die Punkte der im Unendlichen liegenden Grenzfläche der Flüssigkeit ist $\frac{\partial\varphi}{\partial N}=0$.

Diese Bedingungen bestimmen die Funktion φ vollständig bis auf eine additive von x, y, z unabhängige Grösse, sobald die Lagen und Geschwindigkeiten der beiden Ringe und die Werthe der beiden Constanten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ gegeben sind. Es folgt das durch eine bekannte Schlussweise aus der bekannten Gleichung

$$\iiint dx\,dy\,dz\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)=-\iint dS\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial N},$$

in der dS ein Element der Grenze des Gebietes von x, y, z bedeutet, wenn man erwägt, dass der Theil des hier vorkommenden Doppelintegrals, der sich auf die beiden Seiten eines der beiden Querschnitte bezieht,

$$=\varkappa\iint dS\frac{\partial\varphi}{\partial N}$$

ist, wo dem $\varkappa$ der Index 1 oder 2 zu geben und die Integration nur über die eine Seite des Querschnitts auszudehnen ist.

Um einen Ausdruck zu finden, der den für φ aufgestellten Bedingungen genügt, bezeichne man mit U_1 und U_2 die Potentiale zweier elektrischer Ströme, die die Mittellinien der beiden Ringe mit den Intensitäten $\frac{\varkappa_1}{4\pi}$ und $\frac{\varkappa_2}{4\pi}$ durchfliessen, in Bezug auf einen Magnetpol, der sich im Punkte (x, y, z) befindet und eine Menge magnetischer Flüssigkeit, die der Einheit gleich ist, enthält. Es sind dann bekanntlich U_1 und U_2 die scheinbaren Grössen zweier von den Mittellinien der beiden Ringe begrenzten Flächen von dem Punkte (x, y, z) aus gesehen, multiplizirt mit $\frac{\varkappa_1}{4\pi}$ und $\frac{\varkappa_2}{4\pi}$. Setzte man $\varphi = U_1 + U_2$, so würde man den Bedingungen 1) und 2) genügen. Man mache nun

$$\varphi = U_1 + U_2 + \psi,$$

so ist ψ eine in dem ganzen von der Flüssigkeit erfüllten Raume einwerthige und stetige Funktion, die der Differentialgleichung $\Delta\psi = 0$ genügt, also als ein Potential von Massen angesehen werden kann, die theils auf den Ringoberflächen theils auf der äusseren Grenzfläche der Flüssigkeit angeordnet sind. Um die Bedingung auszusprechen, die ψ an den Ringoberflächen zu erfüllen hat, drücke man die Lage eines Punktes, der unendlich nahe an der Oberfläche eines der Ringe liegt, durch drei Coordinaten aus, die s, r, ϑ genannt werden und folgendermassen definirt sein sollen. Durch den Punkt lege man eine Ebene senkrecht zur Mittellinie des Ringes; s sei der Bogen dieser Linie zwischen ihrem Schnittpunkte mit der genannten Ebene und einem festen Punkte; r der Abstand desselben Schnittpunktes von dem fraglichen Punkte und ϑ der Winkel, den die Linie r bildet mit der in der Schmiegungsebene von ds liegenden Normale dieses Elementes. Ist A die Componente der Geschwindigkeit des Punktes der Mittellinie, der durch den Werth von s bestimmt ist, senkrecht zu ds, und bildet die Richtung dieser Componente mit der Linie, von der aus der Winkel ϑ gezählt wird, den Winkel α, so soll der Bedingung 3) zufolge für die Oberfläche des Ringes

$$\frac{\partial\varphi}{\partial N} = A \cdot \cos(\vartheta - \alpha)$$

sein. Für die Oberfläche des ersten Ringes ist $\frac{\partial U_1}{\partial N} = 0$, für

die des zweiten $\frac{\partial U_2}{\partial N} = 0$; da ferner $\frac{\partial U_1}{\partial x}$, $\frac{\partial U_1}{\partial y}$, $\frac{\partial U_1}{\partial z}$ für die Punkte in der Nähe des zweiten Ringes und $\frac{\partial U_1}{\partial x}$, $\frac{\partial U_1}{\partial y}$, $\frac{\partial U_1}{\partial z}$ für die Punkte in der Nähe des ersten endliche Werthe haben, so ist für beide Oberflächen:

$$\frac{\partial (U_1 + U_2)}{\partial N} = B \cos (\vartheta - \beta),$$

wo B und β, ebenso wie A und α, von s abhängen und endlich sind. Für ψ ergiebt sich hieraus die Bedingung, dass für die Oberfläche eines jeden Ringes

$$\frac{\partial \psi}{\partial N} = A \cos (\vartheta - \alpha) - B \cos (\vartheta - \beta),$$

d. h.

$$= C \cos (\vartheta - \gamma)$$

ist, wo C endliche Werthe besitzt. An der im Unendlichliegenden Grenzfläche der Flüssigkeit muss nach der Bedingung (4):

$$\frac{\partial \psi}{\partial N} = - \frac{\partial (U_1 + U_2)}{\partial N}$$

sein.

Um hiernach ψ zu bestimmen, setze man

$$\psi = V + W,$$

indem man unter V ein Potential von Massen versteht, die auf den Ringoberflächen liegen, unter W ein Potential von Massen, die auf der äusseren Grenzfläche der Flüssigkeit sich befinden. Für die Punkte dieser Grenzfläche ist:

$$\frac{\partial W}{\partial N} = - \frac{\partial (V + U_1 + U_2)}{\partial N};$$

bezeichnet man mit dS ein Element derselben Fläche, so muss

$$\int dS \frac{\partial W}{\partial N} = 0$$

sein; es ist aber:

$$\int dS \frac{\partial (U_1 + U_2)}{\partial N} = 0,$$

da nach einem bekannten, von Ampère aufgestellten Satze U_1 und U_2 sich als Potentiale von Massen, deren Summe gleich Null ist, darstellen lassen; es ist also auch:

$$\int dS \frac{\partial V}{\partial N} = 0,$$

d. h. es ist auch V ein Potential von Massen, deren Summe gleich Null ist. Bezeichnet L eine unendlich grosse Länge von der Ordnung der Dimensionen der Grenzfläche, so ist an dieser hiernach:

$$\frac{\partial W}{\partial N} = \frac{a}{L^3}.$$

wo a eine endliche Grösse bedeutet. Von der Grenzfläche soll vorausgesetzt werden, dass, wenn man in ihrer Gleichung

$$x = L\xi, \qquad y = L\eta, \qquad z = L\zeta$$

macht, eine Gleichung zwischen ξ, η, ζ entsteht, deren sämmtliche Constanten endlich sind; unter dieser Voraussetzung sind die Differentialquotienten von W nach x, y, z in dem ganzen Gebiete von x, y, z, also auch im Endlichen von derselben oder einer niederen Ordnung als $\frac{\partial W}{\partial N}$ an der Grenzfläche; wie man sieht, wenn man in die Gleichungen, aus denen W zu bestimmen ist, ξ, η, ζ an Stelle von x, y, z einführt. In der Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial N} = -\frac{\partial W}{\partial N} + C\cos(\vartheta - \gamma),$$

die an den Ringoberflächen zu erfüllen ist, ist daher $\frac{\partial W}{\partial N}$ unendlich klein und man kann bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen zur Bestimmung von V die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial N} = C\cos(\vartheta - \gamma)$$

benutzen. Verfügt man über die in W enthaltene willkürliche additive Constante in passender Weise, so ist ferner W überall unendlich klein, und man kann daher

$$\psi = V$$

und

$$\varphi = U_1 + U_2 + V$$

setzen.

Um das Potential V zu finden, soll zunächst das Potential einer Masse, die auf einer geschlossenen Linie angeordnet ist, in Bezug auf einen Punkt, der dieser unendlich nahe liegt,

untersucht werden. Es sei ϱ der kürzeste Abstand des Punktes von der Linie, s der Bogen der Linie zwischen dem einen Endpunkte von ϱ und einem festen Punkte, ϑ der Winkel zwischen der Richtung von ϱ und der in der Schmiegungsebene liegenden Normale von ds. Man führe ein rechtwinkliges Coordinatensystem ein, dessen Anfangspunkt der durch den Werth von s bestimmte Punkt der mit Masse belegten Linie, desen x-Axe die Tangente, dessen y-Axe die in der Schmiegungsebene liegende Normale von ds ist, und nenne x, y, z die Coordinaten des Punktes, zu dem man kommt, wenn man $s + \sigma$ aus s werden lässt. $M d\sigma$ bezeichne die Masse, die auf dem Elemente $d\sigma$ sich befindet. Es soll angenommen werden, dass die Gestalt der Linie und die Vertheilung der Masse keine Unstetigkeiten darbietet, der Art, dass für hinreichend kleine Werthe von σ

$$\begin{aligned} M &= m + n\sigma \\ x &= \sigma + a\sigma^2, \\ y &= b\sigma^2, \\ z &= c\sigma^2 \end{aligned}$$

ist, wo m eine endliche Constante, n, a, b, c endliche Grössen bedeuten. Man bezeichne ferner durch l eine Länge, die unendlich klein, aber gegen ϱ unendlich gross ist, und durch P_l das Potential der Linie mit Ausschluss des Theiles, der von $\sigma = -l$ bis $\sigma = l$ reicht; heisst P das gesuchte ganze Potential, so ist dann:

$$P = \int_{-l}^{+l} \frac{(m + n\sigma)\, d\sigma}{\sqrt{(\sigma + a\sigma^2)^2 + (\varrho\cos\vartheta - b\sigma^2)^2 + (\varrho\sin\vartheta - c\sigma^2)^2}} + P_l.$$

Man sieht zunächst, dass bei Vernachlässigung einer unendlich kleinen Grösse in diesem Integrale $n = 0$ gesetzt werden kann; denn der Factor von $n\,d\sigma$ unter dem Integralzeichen kann nur unendlich wenig grösser als 1 sein, giebt also, mit $d\sigma$ multiplicirt und zwischen den unendlich nahen Grenzen $-l$ und l integrirt, etwas unendlich Kleines. Die reciproke Wurzelgrösse, die unter dem Integralzeichen vorkommt, lässt sich ferner schreiben:

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\varrho^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2a\sigma^3-2\varrho\sigma^2(b\cos\vartheta+c\sin\vartheta)+(a^2+b^2+c^2)\sigma^4}{\sigma^2+\varrho^2}}}$$

oder, da die unter dem zweiten Wurzelzeichen zu 1 addirte Grösse unendlich klein ist:

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\varrho^2}}-\tfrac{1}{2}(1+\varepsilon)\frac{2a\sigma^3-2\varrho\sigma^2(b\cos\vartheta+c\sin\vartheta)+(a^2+b^2+c^2)\sigma^4}{(\sigma^2+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}}$$

wo ε eine unendlich kleine Grösse bedeutet. Das zweite von diesen beiden Gliedern kann eine gewisse endliche Grenze nicht überschreiten und giebt daher, mit $d\sigma$ multiplicirt und zwischen $\sigma = -l$ und $\sigma = l$ integrirt, etwas unendlich Kleines. Daraus folgt dann, dass bei Vernachlässigung einer unendlich kleinen Grösse:

$$P = m\int_{-l}^{l}\frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^2+\varrho^2}} + P_l,$$

d. h.

$$= m\lg\frac{\sqrt{l^2+\varrho^2}+l}{\sqrt{l^2+\varrho^2}-l} + P_l,$$

oder auch:

$$= -2m\lg\frac{\varrho}{l} + P_l$$

ist. Da P von l unabhängig sein muss, so muss es auch $2m\lg l + P_l$ sein; bezeichnet man diese Summe durch p, so hat man also:

$$P = -2m\lg\varrho + p,$$

wo p bis auf unendlich kleine Grössen von ϱ unabhängig und endlich ist.

Aus der Gleichung:

$$\varrho\frac{\partial P}{\partial\varrho} = \int_{-l}^{l}\frac{\varrho(\varrho-\sigma)(b\cos\vartheta+c\sin\vartheta)(m+\varrho\sigma)\,d\sigma}{(\varrho+a\sigma^2)^2+(\varrho\cos\vartheta-b\sigma^2)^2+(\varrho\sin\vartheta-c\sigma^2)^2} + \varrho\frac{\partial P_l}{\partial\varrho}$$

kann man durch Betrachtungen derselben Art beweisen, dass bis auf eine unendlich kleine Grösse

$$\varrho\frac{\partial P}{\partial\varrho} = -2m$$

Es ist von selbst klar, dass diese Resultate auch gelten, wenn die mit Masse belegte Linie aus zwei oder mehr getrennten, geschlossenen Linien besteht.

Nun kehre man zur Betrachtung der beiden Ringe zurück. Die Werthe der Grössen s, r, ϑ, welche auf die oben angegebene Weise die Lage eines Punktes in der Nähe ihrer Oberflächen bestimmen, bezeichne man für Punkte der Oberflächen selbst durch s, r', ϑ', wo dann also r' den Radius ihrer Querschnitte bedeutet. Die Oberflächen denke man sich mit Masse der Art bedeckt, dass auf das Flächenelement $ds\, r'\, d\vartheta'$ die Masse $\mu\, ds\, d\vartheta'$ kommt, und nehme μ als eine endliche und stetige Function von s und ϑ' an. Das Potential dieser Massenvertheilung nenne man Ω; es ist dann:

$$\Omega = \int_0^{2\pi} P\, d\vartheta',$$

wenn $P\, d\vartheta'$ das Potential des Streifens, welcher dem Elemente $d\vartheta'$ entspricht, bedeutet. Für Punkte, die unendlich nahe an einer Ringoberfläche liegen, hängt P in der vorher erörterten Weise von ϱ ab, wenn:

$$\varrho = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r\cos(\vartheta' - \vartheta)}$$

gesetzt wird; es ist:

$$\Omega = -2\int_0^{2\pi} \mu \lg \sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r\cos(\vartheta' - \vartheta)}\, d\vartheta' + \omega,$$

wo

$$\omega = \int_0^{2\pi} p\, d\vartheta'.$$

Man setze nun, was erlaubt ist:

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 \cos(\vartheta' - \delta_1) + \mu_2 \cos 2(\vartheta' - \delta_2) + \ldots,$$

$$\lg \sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r\cos(\vartheta' - \vartheta)}$$
$$= \lg r - \frac{r'}{r}\cos(\vartheta' - \vartheta) - \tfrac{1}{2}\frac{r'^2}{r^2}\cos 2(\vartheta' - \vartheta) - \ldots;$$

es ergiebt sich dann:

$$\Omega = \omega - 4\pi\mu_0 \lg r + 2\pi\mu_1 \frac{r'}{r} \cos(\vartheta - \delta_1) + \frac{2\pi}{2} \mu_2 \frac{r'^2}{r^2} \cos 2(\vartheta - \delta_2) + \ldots$$

Was den Werth von ω anbetrifft, so ist dieser von μ_1, μ_2, ... unabhängig und verschwindet, sobald μ_0 für alle Werthe von s verschwindet; es folgt das daraus, dass p unendlich wenig sich ändert, wenn die Linie, auf welche diese Grösse sich bezieht, in ihrer Gestalt und Lage unendlich wenig geändert wird, und dass daher bei der Berechnung von ω die Massen, die in den Ringoberflächen liegen, in den Mittellinien concentrirt gedacht werden können.

Man hat weiter:

$$r \frac{\partial \Omega}{\partial r} = \int_0^{2\pi} \varrho \frac{\partial P}{\partial \varrho} \frac{r(r - r' \cos(\vartheta' - \vartheta))}{\varrho^2} d\vartheta;$$

bei Vernachlässigung einer unendlich kleinen Grösse aber ist:

$$\varrho \frac{\partial P}{\partial \varrho} = -2\mu;$$

unter der Voraussetzung, dass $\frac{r'}{r}$ um etwas Endliches kleiner als 1 ist, ist ferner:

$$\frac{r(r - r' \cos(\vartheta' - \vartheta))}{\varrho^2}$$

endlich, und daher unter derselben Voraussetzung:

$$r \frac{\partial \Omega}{\partial r} = -2 \int_0^{2\pi} \mu \frac{r(r - r' \cos(\vartheta - \vartheta'))}{\varrho^2} d\vartheta'$$

oder, da:

$$\frac{r(r - r' \cos(\vartheta' - \vartheta))}{\varrho^2} = 1 + \frac{r'}{r} \cos(\vartheta' - \vartheta) + \frac{r'^2}{r^2} \cos 2(\vartheta' - \vartheta) + \ldots,$$

$$r \frac{\partial \Omega}{\partial r} = -4\pi\mu_0 - 2\pi\mu_1 \frac{r'}{r} \cos(\vartheta - \delta_1) - 2\pi\mu_2 \frac{r'^2}{r^2} \cos 2(\vartheta - \delta_2) - \ldots.$$

Ist der Werth gegeben, dem $r\frac{\partial \Omega}{\partial r}$ sich nähert, wenn r dem r' sich nähert, so bestimmt diese Gleichung die Grössen μ und δ, und aus diesen lässt sich dann Ω berechnen.

Für das Potential V sollte nun für $r = r'$

$$r\frac{\partial V}{\partial r} = r'\, C.\cos(\vartheta - \gamma)$$

sein; es ist daher für unendlich kleine Werthe von r

$$V = -\frac{r'^2 C}{r}\cos(\vartheta - \gamma),$$

und in endlicher Entfernung von den Ringen ist $V = 0$.

Berücksichtigt man, dass C eine endliche Grösse ist, so folgt hieraus, dass V überall in der Flüssigkeit und die Differentialquotienten von V in endlicher Entfernung von den Ringen unendlich klein sind.

Der für φ gefundene Werth soll nun benutzt werden, um die lebendige Kraft der Flüssigkeit, die T genannt werden möge, zu berechnen. Es ist:

$$T = \frac{\varrho}{2}\iiint dx\, dy\, dz \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right)$$

oder:

$$= -\frac{\varrho}{2}\int dS\, \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial N},$$

d. h.:

$$= -\frac{\varrho}{2}\int dS\, U_1 \frac{\partial U_1}{\partial N} - \frac{\varrho}{2}\int dS\, U_2 \frac{\partial U_2}{\partial N} - \frac{\varrho}{2}\int dS\, V \frac{\partial V}{\partial N}$$
$$- \varrho \int dS\, U_1 \frac{\partial U_2}{\partial N} - \varrho \int dS\, U_1 \frac{\partial V}{\partial N} - \varrho \int dS\, U_2 \frac{\partial V}{\partial N},$$

wo die Integrationen nach dS über die Oberflächen der beiden Ringe und die beiden Seiten der Querschnitte auszudehnen sind, durch welche der von der Flüssigkeit erfüllte Raum zu einem einfach zusammenhängenden gemacht ist. Die beiden ersten dieser sechs Integrale sind unabhängig von der Lage und der Bewegung der beiden Ringe; ihre Summe bezeichne man durch K; das dritte, das fünfte und das sechste sind unendlich klein, da $\frac{\partial V}{\partial N}$ nur auf unendlich kleinen Theilen der

Flächen, über die zu integriren ist, endlich, sonst unendlich klein ist, da V überall unendlich klein ist und U_1 und U_2 überall endlich sind. Mithin ist

$$T = K - \varrho \int dS\, U_1 \frac{\partial U_2}{\partial N}.$$

Ueber die Oberflächen der beiden Ringe genommen, ist das allein übrig gebliebene Integral auch unendlich klein, da $\frac{\partial U_2}{\partial N}$ an der Oberfläche des ersten Ringes endlich, an der des zweiten gleich Null ist; über die beiden Seiten des zweiten Querschnittes ausgedehnt, ist dasselbe Integral gleich Null, denn hier hat $\frac{\partial U_2}{\partial N}$ entgegengesetzte und U_1 gleiche Werthe. Es braucht also die Integration nur über den ersten Querschnitt ausgedehnt zu werden. Bezeichnet man durch dS_1 ein Element desselben und durch N_1 die eine Normale dieses, so ist hiernach, da $\frac{\partial U_2}{\partial N}$ auf beiden Seiten von dS_1 entgegengesetzte Werthe und U_1 Werthe hat, die um $\varkappa_1$ verschieden sind,

$$T = K - \varrho\, \varkappa_1 \int dS_1 \frac{\partial U_2}{\partial N_1}.$$

Da die Grenzlinie des Querschnittes von der Mittellinie des Ringes nur unendlich wenig absteht, so kann man hier dS_1 auch definiren als ein Element einer durch die Mittellinie des ersten Ringes begrenzten Fläche. Nach dem Ampèreschen Satze, auf welchen oben bereits hingewiesen wurde, ist das in der angegebenen Weise genommene Integral aber nichts Anderes, als das Potential zweier elektrischen Ströme, die die Mittellinien der beiden Ringe durchfliessen, in Bezug auf einander. Sind ds_1 und ds_2 zwei Elemente dieser Mittellinien, r ihre Entfernung, (ds_1, ds_2) der Winkel, den ihre Richtungen mit einander bilden, so ist das Potential zweier Ströme, die mit der Intensität 1 die Mittellinien durchfliessen, in Bezug auf einander:

$$= \iint \frac{ds_1\, ds_2}{r} \cos(ds_1, ds_2)$$

und:

$$T = K - \frac{\varkappa_1 \varkappa_2 \varrho}{4\pi} \iint \frac{ds_1\, ds_2}{r} \cos(ds_1, ds_2).$$

Hieraus folgt nun unmittelbar der im Eingange ausgesprochene Satz. Denkt man sich nämlich die Ringe durch Kräfte, die man auf sie wirken lässt, irgend wie bewegt, und bezeichnet durch δT den Zuwachs, den dabei T in einem Zeitelement erfährt, so ist δT gleich dem Moment der Druckkräfte, welche die Ringe auf die Flüssigkeit ausüben, für die in dem Zeitelement geschehene Verrückung, und also $-\delta T$ das entsprechende Moment der Druckkräfte, welche umgekehrt die Flüssigkeit auf die Ringe ausübt. Nach dem für T gefundenen Ausdrucke ist dieses Moment so gross, wie das der Kräfte, mit welchen zwei elektrische Ströme auf einander wirken, die die Mittellinien der Ringe mit den Intensitäten $\varkappa_1 \sqrt{\frac{\varrho}{4\pi}}$ und $\varkappa_2 \sqrt{\frac{\varrho}{4\pi}}$ durchfliessen, für dieselbe Verrückung; d. h. die Ringe üben scheinbar dieselben Kräfte auf einander aus, wie diese elektrischen Ströme oder auch wie die elektrischen Ströme, die mit den genannten Intensitäten die Ringe selbst durchfliessen.

Bei dem Beweise dieses Satzes ist, um die Darstellung zu erleichtern, vorausgesetzt, dass die Querschnitte der Ringe Kreise von demselben Radius sind; der Satz gilt aber auch, wenn diese Querschnitte von anderer Gestalt sind, sobald sie nur unendlich kleine Dimensionen haben.

Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen.[1])

Herr Helmholtz hat in seiner Mittheilung „über discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen“[2]) zum ersten Male die Gestalt eines freien Flüssigkeitsstrahles in einem speciellen Falle theoretisch bestimmt. Die von ihm dabei benutzte Methode lässt sich, wie hier gezeigt werden soll, leicht so verallgemeinern, dass sie zur Lösung derselben Aufgabe für eine grosse Zahl von Fällen führt.

---

1) Borchardt's Journal. Bd. 70. 1869.

2) Monatsberichte der Berl. Akad. April 1868.

Es wird vorausgesetzt, dass die Flüssigkeit incompressibel ist, dass keine äusseren Kräfte auf sie wirken, dass ihre Theilchen nicht rotiren, dass die Strömungen stationäre sind, und endlich, dass die Bewegung überall parallel einer festen Ebene ist.

Nennt man x und y die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes des von der strömenden Flüssigkeit erfüllten Raumes, parallel dieser Ebene, und φ das Geschwindigkeitspotential in diesem Punkte, so ist φ eine Function von x und y, die der Gleichung:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

genügt. Dabei sind $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ die Geschwindigkeiten parallel den Axen der x und der y, und, ist p der Druck, ϱ die Dichtigkeit, so ist weiter

$$p = c - \frac{\varrho}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right),$$

wo c eine Constante bedeutet. Hat die strömende Flüssigkeit eine freie Grenze, so muss diese einer Strömungslinie entsprechen, und es muss für sie der Druck ein constanter sein. Die zweite von diesen Bedingungen wird, wenn man die in Betracht kommenden Einheiten passend wählt:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 1.$$

Der partiellen Differentialgleichung für φ wird genügt, wenn man:

$$z = x + iy, \qquad \omega = \varphi + i\psi,$$

wo:

$$i = \sqrt{-1},$$

und ω gleich irgend einer Function von z setzt. Dabei ist die Gleichung einer Strömungscurve:

$$\psi = \text{const.},$$

und es ist:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\frac{\partial x}{\partial\varphi}}{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2},$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\frac{\partial y}{\partial q}}{\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2},$$

$$\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2},$$

wenn man auf den rechten Seiten dieser Gleichungen x und y als Functionen von q und ψ dargestellt annimmt. Die Bedingungen für eine freie Grenze des Strahles sind dann die, dass für sie:

$$\psi = \text{const.}$$

und:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 = 1$$

ist. Es handelt sich darum, solche Functionen ω von z zu finden, dass diesen Bedingungen genügt wird.

Zu diesem Zwecke setze man:

$$\frac{dz}{d\omega} = f(\omega) + i f(\omega) f(-\omega) - 1,$$

und wähle die Function $f(\omega)$ so, dass sie für einen gewissen Werth von ψ und für ein gewisses Intervall von q reell ist und zwischen -1 und $+1$ liegt. Für diesen Werth von ψ und dieses Intervall von q ist dann:

$$\frac{\partial x}{\partial q} = f(\omega), \qquad \frac{\partial y}{\partial q} = 1 - f(\omega) f(-\omega),$$

also:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 = 1;$$

d. h. die dem Werthe von ψ entsprechende Strömungslinie kann in dem dem Intervalle von q entsprechenden Stücke eine freie Grenze der bewegten Flüssigkeit bilden. Giebt es mehrere Werthe von ψ, für welche $f(\omega)$ die genannte Eigenschaft besitzt, so können alle Strömungslinien, welche diesen entsprechen, freie Grenzen sein.

Bei einer bestimmten Annahme über $f(\omega)$ ist ω durch

die für $\frac{dz}{d\omega}$ aufgestellte Gleichung im Allgemeinen als eine mehrwerthige Funktion von z definirt. Es soll das Gebiet von z, d. h. der von der bewegten Flüssigkeit erfüllte Raum, so abgegrenzt werden, dass innerhalb desselben ein Zweig von ω nicht in andere übergeht; dieser Zweig stellt dann eine mögliche Flüssigkeitsbewegung dar. Der genannte Zweck wird erreicht, wenn das Gebiet von ω auf passende Weise begrenzt wird.

In Bezug auf die Begrenzung des Gebietes von ω werde zunächst festgesetzt, dass sie eine in sich zurückkehrende, sich nicht schneidende Linie ist, die aus Theilen besteht, für welche ψ constante Werthe hat, und aus Theilen, für welche φ einen unendlich grossen positiven oder einen unendlich grossen negativen Werth besitzt.

Innerhalb des Gebietes von ω soll $f(\omega)$ eine einwerthige Function von ω sein. Hat man für $f(\omega)$ einen Ausdruck angenommen, der eine mehrwerthige Function darstellt, so sollen daher aus den Verzweigungspunkten derselben Schnitte gezogen sein, für welche ψ constante Werthe hat.

Weiter soll auch $\sqrt{f(\omega)f(\omega)-1}$ zu einer einwerthigen Function von ω gemacht werden, indem aus denjenigen Punkten, für welche $f(\omega) = \pm 1$ ist, Schnitte gelegt werden, für welche ψ constante Werthe hat. Für einen Punkt des Gebietes von ω kann dann noch über das Vorzeichen der Wurzelgrösse verfügt werden. Sind Punkte vorhanden, für welche $f(\omega)$ unendlich oder unendlich gross[1]) ist, so soll für einen dieser Punkte

$$\sqrt{f(\omega)f(\omega)-1} = +f(\omega)$$

gemacht und vorausgesetzt werden, dass für sie alle dieselbe Gleichung besteht.

Ferner werde angenommen, dass die Function $f(\omega)$ nur in ihren Verzweigungspunkten unendlich wird, wenn sie es überhaupt wird; und auch hier nur so, dass, wenn $f(\omega_0)$ unendlich ist,

[1]) Ich nenne unendlich das Reciproke von Null, unendlich gross das Reciproke einer unendlich kleinen Grösse.

$$(\omega - \omega_0) f(\omega)$$

sich der Null nähert, wenn ω dem Werthe ω_0 sich nähert.

Innerhalb des bezeichneten Gebietes von ω ist dann z eine einwerthige Function dieser Variablen, und zwar eine, die nirgend unendlich wird.

Nun betrachte man ω als Function von z. Das Gebiet von z, welches dem angenommenen Gebiete von ω entspricht, erstreckt sich nicht durch die Unendlichkeit und ist begrenzt durch eine in sich zurücklaufende Linie, die zusammengesetzt ist aus den Linien, deren Gleichungen $\varphi = -\infty$ und $\varphi = +\infty$ sind, und aus Strömungslinien; ein gewisser Theil der letzteren kann als freie Grenze der bewegten Flüssigkeit, der andere als feste Wand angesehen werden. Innerhalb dieses Gebietes von z hat ω keine Verzweigungspunkte, da $\frac{dz}{d\omega}$ in keinem Punkte desselben verschwindet. Unter der Bedingung, dass die Grenze des Gebietes von z sich selbst nicht schneidet, ist daher innerhalb desselben ω eine einwerthige Function von z. Es ist dieselbe vollkommen bestimmt, sobald man noch einen Werth von z als entsprechend einem gewissen Werthe von ω festsetzt.

Ein Beispiel, welches eine Verallgemeinerung des von Herrn Helmholtz behandelten Falles bildet, erhält man, wenn man

$$f(\omega) = k + e^{-\omega}$$

setzt, wo k — wie auch in den folgenden Beispielen — einen positiven echten Bruch bezeichnet, und das Gebiet von ω durch die Linien

$$\psi = 0, \qquad \varphi = -\infty,$$
$$\psi = \pi, \qquad \varphi = +\infty$$

begrenzt.

Der für $f(\omega)$ angenommene Ausdruck ist einwerthig; die Verzweigungspunkte von $f(\omega) f'(\omega) - 1$, welche nicht ausserhalb des bezeichneten Gebietes liegen, sind die Punkte:

$$\varphi = -\log(1-k), \qquad \psi = 0,$$
$$\varphi = -\log(1+k), \qquad \psi = \pi;$$

sie liegen in der Grenze dieses Gebietes, und es darf deshalb dasselbe nicht durch Schnitte weiter begrenzt werden.

Die Gleichungen der Grenze des Gebiets von ω sind zugleich die Gleichungen der Grenze des Gebietes von z. Nimmt man an, dass

$$\text{für} \quad \varphi = -\log(1+k) \quad \text{und} \quad \psi = \pi$$
$$x = 0 \qquad\qquad \text{und} \quad y = 0$$

ist, so sind diese Gleichungen entwickelt die folgenden.

Für $\psi = \pi$ und $\varphi < -\log(1+k)$ ist:

$$x = \int_{-\log(1+k)}^{\varphi} \left(k - e^{-\varphi} - \sqrt{(k-e^{-\varphi})^2 - 1}\right) d\varphi,$$
$$y = 0,$$

wo die Wurzel — wie auch später jede Wurzel aus einer positiven Grösse — positiv genommen werden soll. Durch diese Gleichungen wird die positive Hälfte der x-Axe dargestellt; dieselbe ist als feste Wand anzunehmen: an sie schliesst sich im Anfangspunkte der Coordinaten eine freie Grenze; für diese, nämlich für $\psi = \pi$ und $\varphi > -\log(1+k)$, ist

$$x = \int_{-\log(1+k)}^{\varphi} (k - e^{-\varphi})\, d\varphi,$$

$$y = -\int_{-\log(1+k)}^{\varphi} \sqrt{1-(k-e^{-\varphi})^2}\, d\varphi.$$

Ferner findet man für $\psi = 0$ und $\varphi < -\log(1-k)$

$$x = \int_{-\log(1-k)}^{\varphi} \left(k + e^{-\varphi} + \sqrt{(k+e^{-\varphi})^2 - 1}\right) d\varphi + a,$$
$$y = b$$

und für $\psi = 0$ und $\varphi > -\log(1-k)$

$$x = \int_{-\log(1-k)}^{\varphi} (k + e^{-\varphi})\, d\varphi + a,$$

$$y = -\int_{-\log(1-k)}^{\varphi} \sqrt{1-(k+e^{-\varphi})^2}\, d\varphi + b,$$

wo

$$a = k \log \frac{1+k}{1-k} - 2 - \pi\sqrt{1-k^2},$$

$$b = -2\pi k.$$

Der erste Theil der Strömungslinie $\psi = 0$, der eine der x-Axe parallele, bis zum Punkte $x = a$, $y = b$ gehende Gerade ist, ist als feste Wand, der zweite Theil als freie Grenze des austretenden Strahles anzusehen.

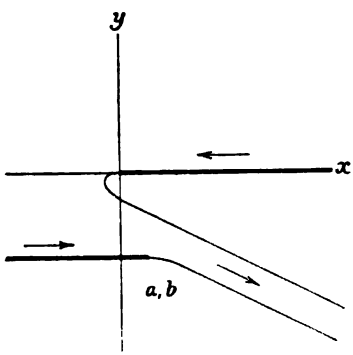


Fig. 18.

Der ungefähre Verlauf der Linien $\psi = \pi$ und $\psi = 0$ ist in Fig. 18 dargestellt.

Die Vervollständigung der Begrenzung des Gebietes von z wird gebildet durch die Linie $\varphi = -\infty$, d. h.

$$x = 2k\varphi - 2e^{-\varphi}\cos\psi + a_1,$$
$$y = 2k\psi + 2e^{-\varphi}\sin\psi + b_1$$

und die Linie $\varphi = +\infty$, d. h.

$$x = k\varphi + \sqrt{1-k^2}\,\psi + a_2,$$
$$y = k\psi - \sqrt{1-k^2}\,\varphi + b_2,$$

wo a_1, b_1, a_2, b_2 Constanten sind, deren Werthe leicht angebbar und theiweise benutzt sind bei der Berechnung von a und b. Die erste von diesen beiden Linien lässt sich bezeichnen als ein Halbkreis, der mit einem unendlich grossen Radius um den Anfangspunkt der Coordinaten beschrieben ist; die zweite ist eine Gerade, die in unendlich grosser Entfernung vom Anfangspunkte senkrecht zum Strahle steht; der Strahl bildet hier mit der positiven x-Axe einen Winkel, dessen Cosinus $= k$ ist.

Lässt man $k = 1$ werden, so wird a unendlich, der Punkt (a, b) rückt in die Unendlichkeit; das Gebiet von ω kann man dann durch die Linien $\psi = \pi$ und $\psi = -\pi$ statt durch die Linien $\psi = \pi$ und $\psi = 0$ begrenzen; dadurch kommt man zu

dem von Herrn Helmholtz behandelten Falle, auf den Fig. 19 sich bezieht.

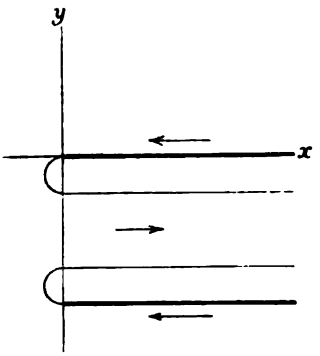


Fig. 19.

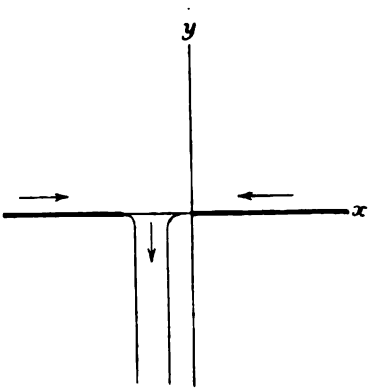


Fig. 20.

Macht man $k = 0$, so wird $b = 0$; die Begrenzung der bewegten Flüssigkeit ist dann die Fig. 20 dargestellte.

Als ein zweites Beispiel möge der Fall behandelt werden, dass:

$$f(\omega) = k + \frac{1}{\sqrt{w}}$$

ist und das Gebiet von ω sich nach allen Richtungen ins unendlich Grosse erstreckt.

Um $f(\omega)$ zu einer einwerthigen Funktion zu machen, lege man von dem Punkte $\omega = 0$ aus einen Schnitt, für den $\psi = 0$ und $\varphi > 0$ ist, und setze fest, dass für $\varphi = +0$ und $\psi = +0$ der reelle Theil von $\sqrt{\omega}$ positiv ist. Die Verzweigungspunkte von $\sqrt{f(\omega) f(\omega) - 1}$ sind die Punkte, für welche

$$\omega = 0, \frac{1}{\sqrt{w}} = 1 - k, \frac{1}{\sqrt{w}} = -(1 + k)$$

ist; sie liegen alle auf dem schon gezogenen Schnitte, erfordern also nicht die Legung neuer Schnitte. Was das Vorzeichen von $\sqrt{f(\omega) f(\omega) - 1}$ betrifft, so muss dasselbe nach den gemachten Festsetzungen so bestimmt werden, dass der reelle

Theil dieser Wurzelgrösse für $\varphi = +0$ und $\psi = -0$ positiv ist. Endlich werde angenommen, dass ω und z gleichzeitig verschwinden.

Zur Grenze des Gebietes von z gehört die Linie, für welche $\psi = 0$ und $\varphi > 0$ ist. Diese Linie setzt sich aus mehreren Theilen zusammen, die zu unterscheiden sind. Für $\psi = +0$ und $0 < \varphi < \frac{1}{(1-k)^2}$ ist:

$$x = \int_0^{\varphi} \left(k + \frac{1}{\sqrt{\varphi}} - \sqrt{\left(k + \frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)^2 - 1} \right) d\varphi,$$

$$y = 0,$$

für $\psi = -0$ und $0 < \varphi < \frac{1}{(1-k)^2}$

$$x = \int_0^{\varphi} \left(k - \frac{1}{\sqrt{\varphi}} - \sqrt{\left(k - \frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)^2 - 1} \right) d\varphi,$$

$$y = 0.$$

Diese Gleichungen stellen einen Theil der x-Axe dar, welcher als feste Wand anzunehmen ist. Benutzt man, dass

$$\int \sqrt{\left(k + \frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)^2 - 1}\, d\varphi$$

$$= \frac{(1-k^2)\sqrt{\varphi} - k}{1-k^2} \sqrt{(k\sqrt{\varphi} + 1)^2 - \varphi} + \frac{1}{(1-k^2)^{\frac{3}{2}}} \arcsin\left((1-k^2)\sqrt{\varphi} - k\right)$$

ist, so findet man für die Endpunkte dieses Theiles

$$x = 2\,\frac{1+k-k^2}{(1-k)(1-k^2)} + \frac{1}{(1-k^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin k\right)$$

und

$$x = -2\,\frac{1-k-k^2}{(1+k)(1-k^2)} - \frac{1}{(1-k^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin k\right),$$

wo $\arcsin k$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ zu wählen ist.

Für $\psi = +0$ und $\varphi > \frac{1}{(1-k)^2}$ ist

$$\frac{dx}{d\varphi} = k + \frac{1}{\sqrt{\varphi}}, \quad \frac{dy}{d\varphi} = -\sqrt{1 - \left(k + \frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)^2},$$

und für $\psi = -0$ und $\varphi > \frac{1}{(1+k)^2}$

$$\frac{dx}{d\varphi} = k - \frac{1}{\sqrt{\varphi}}, \quad \frac{dy}{d\varphi} = -\sqrt{1 - \left(k - \frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)^2}.$$

Die Linien, welche durch die Integrale dieser Gleichungen dargestellt werden, wenn man die Integrationsconstanten so bestimmt, dass sie von den eben bezeichneten Endpunkten der festen Wand ausgehen, sind freie Grenzen der bewegten Flüssigkeit. Die übrigen Grenzen des Gebietes von z liegen im unendlich Grossen, wie daraus hervorgeht, dass für $\omega = \infty$

$$\frac{dz}{d\omega} = k - i\sqrt{1 - k^2}$$

ist; diese Gleichung zeigt zugleich, dass in unendlich grosser Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten die Strömung mit der Geschwindigkeit 1 in einer Richtung geschieht, die mit der x-Axe einen Winkel bildet, dessen Cosinus $= k$ ist.

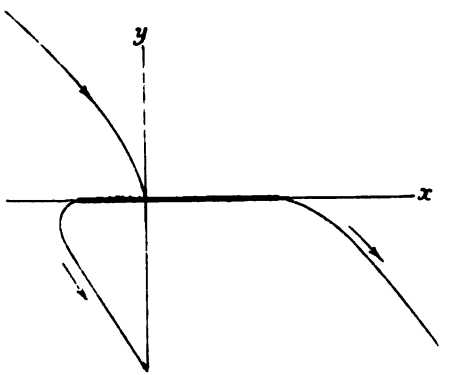


Fig. 21.

Fig. 21 veranschaulicht die Grenzen des Gebietes von z; ausser diesen ist in ihr noch die Strömungslinie, für die $\psi = 0$ und $\varphi < 0$ ist, angegeben.

Noch ein Beispiel möge angeführt werden. Es sei:

$$f(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 - e^{-\omega}}},$$

und es variire ψ von $-\pi$ bis $+\pi$, φ von $-\infty$ bis $+\infty$.

Von dem Punkte $\omega = 0$ aus lege man einen Schnitt, für den $\psi = 0$, $\varphi > 0$ ist, und setze fest, dass für $\varphi = +0$ und $\psi = +0$ der reelle Theil von $f(\omega)$ positiv ist. Die Verzweigungspunkte von $\sqrt{f(\omega) f(\omega) - 1}$ sind die beiden Punkte:

$$\omega = 0 \quad \text{und} \quad \omega = -\log(1-k^2),$$

die beide auf dem gezogenen Schnitte sich befinden. Das Vorzeichen der Wurzelgrösse $\sqrt{f(\omega)f(\bar{\omega})-1}$ ist dadurch bestimmt, dass ihr reeller Theil für $\varphi = +0$ und $\psi = +0$ positiv sein soll. Endlich setze man fest, dass ω und z gleichzeitig verschwinden.

Zur Grenze des Gebietes von z gehört zunächst die Linie, für welche $\psi = 0$, $\varphi > 0$ ist. Diese setzt sich aus den folgenden Theilen zusammen.

Für $\psi = +0$ und $0 < \varphi < -\log(1-k^2)$ ist:

$$x = \int_0^{\varphi} \left(\frac{k}{\sqrt{1-e^{-\varphi}}} + \sqrt{\frac{k^2}{1-e^{-\varphi}} - 1} \right) d\varphi,$$

$$y = 0,$$

für $\psi = -0$ und $0 < \varphi < -\log(1-k^2)$

$$x = -\int_0^{\varphi} \left(\frac{k}{\sqrt{1-e^{-\varphi}}} + \sqrt{\frac{k^2}{1-e^{-\varphi}} - 1} \right) d\varphi,$$

$$y = 0.$$

Diese Gleichungen stellen einen Theil der x-Axe dar, der als feste Wand anzunehmen ist. An ihn schliessen sich als freie Grenzen der bewegten Flüssigkeit die Linien, für welche:

$$\psi = +0, \qquad \varphi > -\log(1-k^2),$$

also:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{k}{\sqrt{1-e^{-\varphi}}}, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = -\sqrt{1-\frac{k^2}{1-e^{-\varphi}}}$$

und:

$$\psi = -0, \qquad \varphi > -\log(1-k^2),$$

also:

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{k}{\sqrt{1-e^{-\varphi}}}, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = -\sqrt{1-\frac{k^2}{1-e^{-\varphi}}}$$

ist. Die übrigen Grenzen des Gebietes von z sind die Linien $\psi = -\pi$, $\psi = +\pi$, $\varphi = -\infty$, $\varphi = +\infty$.

Für $\psi = -\pi$ ist:

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{k}{\sqrt{1+e^{-\varphi}}}, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = -\sqrt{1-\frac{k^2}{1+e^{-\varphi}}},$$

für $\psi = +\pi$:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{k}{\sqrt{1+e^{-\varphi}}}, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = -\sqrt{1-\frac{k^2}{1+e^{-\varphi}}};$$

diese beiden Strömungslinien sind in ihrer ganzen Ausdehnung freie Grenzen.

Für $\varphi = -\infty$ ist $\frac{dz}{d\omega} = -i$,

für $\varphi = +\infty, \psi < 0$: $\frac{dz}{d\omega} = -k - i\sqrt{1-k^2}$,

und für $\varphi = +\infty, \psi > 0$: $\frac{dz}{d\omega} = \quad k - i\sqrt{1-k^2}$.

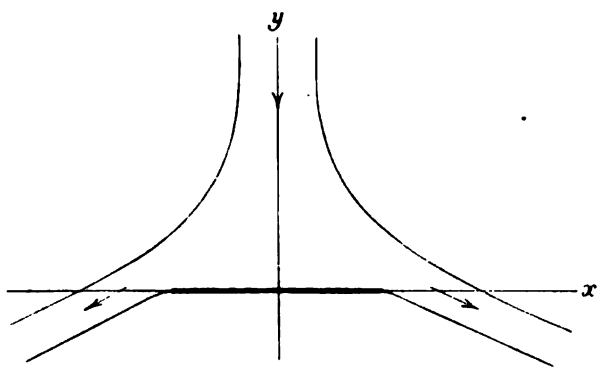


Fig. 22.

Für $\varphi = -\infty$ ist hiernach $y = +\infty$, und die Strömung geschieht mit der Geschwindigkeit 1 in der Richtung der negativen y-Axe; für $\varphi = +\infty$ ist $x = \mp\infty$, $y = -\infty$, und die Strömung geschieht mit der Geschwindigkeit 1 in einer Richtung, die mit der positiven x-Axe einen Winkel bildet, dessen Cosinus $\mp k$ ist.

In Fig. 22 sind die Grenzen der bewegten Flüssigkeit für diesen Fall dargestellt.

Ueber stehende Schwingungen einer schweren Flüssigkeit. [1])

Unter den wenigen Flüssigkeitsbewegungen, für welche man die Differentialgleichungen bisher hat integriren können, nehmen eine wesentliche Stelle die unendlich kleinen Schwingungen ein, die eine schwere, nicht reibende, incompressible Flüssigkeit in einem verticalen, cylindrischen oder prismatischen Gefässe mit horizontalem Boden ausführen kann. Die Schwingungen einer solchen Flüssigkeit in einem Gefässe, dessen Boden nicht horizontal ist, sind meines Wissens bis jetzt nicht behandelt. Es sollen im Folgenden einige hierher gehörige Fälle, und zwar Fälle, in denen der Boden aus einer schiefen Ebene oder aus zwei schiefen Ebenen gebildet ist, erörtert werden. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Bewegung nur von einer horizontalen Ordinate abhängt, die Flüssigkeit also in einer Richtung durch zwei parallele, verticale Wände begrenzt ist.

Es sei x die horizontale Ordinate eines Punktes, die diesen Wänden parallel ist, z die verticale Ordinate und φ das Geschwindigkeitspotential in diesem Punkte zur Zeit t; dann ist:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0,$$

oder:

$$\varphi = F(z + ix) + G(z - ix), \tag{1}$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist und F und G Functionszeichen sind. Die Functionen F und G müssen conjugirt sein, da φ reell ist. Die freie Oberfläche der Flüssigkeit weiche unendlich wenig von der Ebene $z = 0$ ab, die positive z-Axe sei abwärts gekehrt und g bezeichne die Beschleunigung eines frei fallenden Körpers, dann ist für $z = 0$:

$$g\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

und $\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ ist die Tiefe eines Punktes der freien Oberfläche unter einer festen horizontalen Ebene.

---

[1]) Monatsbericht der Akad. d. Wiss. zu Berlin vom 15. Mai 1879.

Nun werde vorausgesetzt, dass φ gleich

$$\sin n t \pi,$$

multiplizirt mit einem von t unabhängigen Faktor ist, wobei dann n die Zahl der einfachen Schwingungen bedeutet, die jedes Flüssigkeitstheilchen in der Zeiteinheit ausführt. Es ist dann:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -n^2 \pi^2 \varphi,$$

also für $z = 0$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -a\varphi, \text{ wo } a = \frac{n^2\pi^2}{g}. \tag{2}$$

Setzt man hier den Werth von φ aus der Gleichung (1) ein und bezeichnet durch F' und G' die Differentialquotienten von F und G nach ihren Argumenten, so erhält man:

$$F'(ix) + G'(-ix) = -a\big(F(ix) + G(-ix)\big).$$

Diese Gleichung braucht nur für reelle Werthe von x erfüllt zu werden, und zwar für solche, die Punkten der freien Flüssigkeitsoberfläche entsprechen; das kann aber nur geschehen, wenn sie auch für jeden complexen Werth von x erfüllt wird. Bezeichnet daher u eine complexe Variable, so muss allgemein

$$F'(u) + G'(-u) = -a\big(F(u) + G(-u)\big),$$

oder auch

$$\frac{d}{du}\big(F(u) - G(-u)\big) = -a\big(F(u) + G(-u)\big) \tag{3}$$

sein.

Es ist nun noch die Bedingung aufzustellen, der an der nicht freien Flüssigkeitsoberfläche, abgesehen von den der xz-Ebene parallelen Wänden, zu genügen ist. Diese Bedingung ist die, dass diese Oberfläche die Flächen

$$\varphi = \text{const.}$$

senkrecht schneidet, dass also für jeden zusammenhängenden Theil derselben

$$F(z + ix) - G(z - ix) = \text{const.}$$

ist. Es soll angenommen werden, dass die ganze nicht freie Oberfläche zusammenhängend ist; der Werth der zuletzt eingeführten Constanten kann dann ohne Beschränkung der All-

gemeinheit beliebig gewählt, die Bedingung also dahin ausgesprochen werden, dass für die nicht freie Oberfläche

$$F(z + ix) - G(z - ix) = 0 \tag{4}$$

ist.

Die nicht freie Oberfläche sei nun die Ebene:

$$\frac{z}{x} = \operatorname{tg} \alpha$$

oder, wenn man:

$$x = \varrho \cos \vartheta \qquad z = \varrho \sin \vartheta$$

setzt, die Ebene:

$$\vartheta = \alpha$$

und die Flüssigkeit befinde sich auf der Seite dieser Ebene nach der die positive x-Axe gekehrt ist, d. h. sie erfülle den Raum, für den

$$\vartheta < \alpha$$

ist. Die Gleichung (4) wird dann:

$$F(\varrho i e^{-i\alpha}) - G(-\varrho i e^{+i\alpha}) = 0.$$

Diese Gleichung, die zunächst nur für positive reelle Werthe von ϱ erfüllt zu werden braucht, muss eben deswegen auch für complexe gelten; bezeichnet u wiederum eine complexe Variable, und setzt man:

$$e^{-i\alpha} = \beta,$$

so hat man daher:

$$G(u) = F(-\beta u), \tag{5}$$

und in Folge der Gleichung (3):

$$\frac{d}{du}(F(u) - F(\beta u)) = -\alpha(F'(u) + F'(\beta u)). \tag{6}$$

Es sei α mit π commensurabel und:

$$\alpha = \frac{m}{n}\pi,$$

wo m und n zwei ganze Zahlen sind, die keinen gemeinsamen Faktor haben, also:

$$\beta = e^{-i\frac{2m}{n}\pi}.$$

Es ist dann β eine primitive $n$te Wurzel der Einheit und unter einer sogleich abzuleitenden Bedingung lässt sich der Gleichung (6) genügen durch

$$(7)\quad F(u) = A_0 e^{\lambda a u} + A_1 e^{\beta \lambda a u} + A_2 e^{\beta^2 \lambda a u} + \ldots A_{n-1} e^{\beta^{n-1} \lambda a u},$$

wo λ eine willkürliche Constante ist, A_0, A_1, ... Constanten sind, deren Verhältnisse auf passende Weise bestimmt werden müssen. Setzt man nämlich diesen Ausdruck von F in die Gleichung (6), so erhält man die folgenden Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
\lambda(A_0 - A_{n-1}) &= -(A_0 + A_{n-1}) \\
\beta\lambda(A_1 - A_0) &= -(A_1 + A_0) \\
\beta^2\lambda(A_2 - A_1) &= -(A_2 + A_1) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\beta^{n-1}\lambda(A_{n-1} - A_{n-2}) &= -(A_{n-1} + A_{n-2})
\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
A_0(\lambda + 1) &= A_{n-1}(\lambda - 1) \\
A_1(\beta\lambda + 1) &= A_0(\beta\lambda - 1) \\
A_2(\beta^2\lambda + 1) &= A_1(\beta^2\lambda - 1) \qquad (8) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_{n-1}(\beta^{n-1}\lambda + 1) &= A_{n-2}(\beta^{n-1}\lambda - 1).
\end{aligned}$$

Multiplicirt man sie mit einander, so erhält man:

$$\lambda^n - (-1)^n = \lambda^n - 1,$$

da:

$$1, \beta, \beta^2, \ldots \beta^{n-1}$$

die Wurzeln der Gleichung:

$$\lambda^n - 1 = 0$$

sind. Es folgt daraus, dass, wenn n ungerade ist, die Gleichungen (8) nicht bestehen können, ohne dass alle A verschwinden; wenn n gerade ist, aber diese Gleichungen bei einem beliebigen Werthe von λ und einem beliebigen Werthe einer der Grössen A erfüllt werden können. Demgemäss soll n als gerade angenommmen werden.

Die Hälfte der Glieder des in (7) für F aufgestellten Ausdrucks verschwindet, wenn man λ einer ganzen Potenz von β

gleichsetzt. Wählt man eine andere Potenz, so erhält man einen nur scheinbar verschiedenen Ausdruck für F. Man muss

$$\lambda = \beta^{\frac{n}{2}} = -1;$$

es verschwinden dann die A, deren Index $\frac{n}{2}$ oder grösser als $\frac{n}{2}$ ist, A_0 kann beliebig gewählt werden, es ist:

$$A_1 = A_0 \frac{\beta + 1}{\beta - 1}$$

$$A_2 = A_1 \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2 - 1}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{\frac{n}{2}-1} = A_{\frac{n}{2}-2} \frac{\beta^{\frac{n}{2}-1} + 1}{\beta^{\frac{n}{2}-1} - 1}$$

und:

$$F(u) = A_0 e^{-\alpha u} + A_1 e^{-\beta\alpha u} - \cdots + A_{\frac{n}{2}-1} e^{-\beta^{\frac{n}{2}-1}\alpha u}.$$

Statt der Constanten A mögen hier Constanten B durch Gleichungen:

$$A_0 = B_0 e^{-i\pi\frac{n-2}{8}}$$

$$A_1 = B_1 e^{-i\pi\frac{n-6}{8}}$$

$$A_2 = B_2 e^{-i\pi\frac{n-10}{8}}$$

$$A_{\frac{n}{2}-1} = B_{\frac{n}{2}-1} e^{i\pi\frac{n-2}{8}}$$

eingeführt werden; man hat dann:

$$\begin{aligned} F(u) = {} & B_0 e^{-\alpha u - i\pi\frac{n-2}{8}} \\ & + B_1 e^{-\beta\alpha u - i\pi\frac{n-6}{8}} \\ & + B_2 e^{-\beta^2\alpha u - i\pi\frac{n-10}{8}} \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & + B_{\frac{n}{2}-1} e^{-\beta^{\frac{n}{2}-1}\alpha u + i\pi\frac{n-2}{8}}, \end{aligned} \tag{9}$$

hier ist B_0 willkürlich und

$$B_1 = B_0 \operatorname{cotg} \alpha$$
$$B_2 = B_0 \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} 2\alpha$$
$$B_3 = B_0 \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} 2\alpha \operatorname{cotg} 3\alpha$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$B_{\frac{n}{2}-1} = B_0 \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} 2\alpha \ldots \operatorname{cotg}\left(\tfrac{n}{2}-1\right)\alpha;$$

woraus folgt:

$$B_0 = \pm B_{\frac{n}{2}-1}\ ,\ B_1 = \pm B_{\frac{n}{2}-2}\ ,\ B_2 = \pm B_{\frac{n}{2}-3}\ ,\ \ldots$$

wo die Zeichen $-$ gelten, wenn $\frac{n}{2}$ und zugleich $\frac{m+1}{2}$ gerade ist, während in allen anderen Fällen die Zeichen $+$ zu nehmen sind. Bildet man nach (5) und (9) den Ausdruck von $G(v)$ und kehrt die Reihenfolge der Glieder um, so erhält man hiernach:

$$\begin{aligned}
\pm G(v) = {} & B_0 e^{-av + ix\frac{n-2}{8}} \\
& + B_1 e^{-a\frac{v}{\beta} + ix\frac{n-6}{8}} \\
& + B_2 e^{-a\frac{v}{\beta^2} + ix\frac{n-10}{8}} \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
& + B_{\frac{n}{2}-1} e^{-a\frac{v}{\beta^{\frac{n}{2}-1}} - ix\frac{n-2}{8}},
\end{aligned}$$

wo über das Doppelzeichen nach derselben Regel zu entscheiden ist. Nach (1) ist

$$\varphi = F(u) + G(v),$$

wenn:

$$u = z + ix\ ,\ v = z - ix$$

gesetzt wird, und $F(u)$ und $G(v)$ sind conjugirt. Die Exponenten in den entsprechenden Gliedern der für diese Functionen aufgestellten Ausdrücke sind conjugirt; daraus folgt, dass B_0 reell sein muss, wenn nicht $\frac{n}{2}$ und $\frac{m+1}{2}$ gerade sind, rein imaginär, wenn diese beiden Zahlen gerade sind. In beiden Fällen ist φ gleich dem Doppelten des reellen Theiles des in (9) für $F(u)$ aufgestellten Ausdrucks.

Führt man statt x und z wieder die Polarcoordinaten ϱ und ϑ ein, so hat man:

$$u = \varrho(\sin\vartheta + i\cos\vartheta)$$
$$\beta u = \varrho\left(\sin(2\alpha+\vartheta) + i\cos(2\alpha+\vartheta\right),$$
$$\beta^2 u = \varrho\left(\sin(4\alpha+\vartheta) + i\cos(4\alpha+\vartheta)\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\beta^{\frac{n}{2}-1} u = \varrho\left(\sin((n-2)\alpha+\vartheta) + i\cos((n-2)\alpha-\vartheta\right).$$

Man ersieht hieraus, dass im Allgemeinen bei den aufgestellten Formeln φ unendlich wird innerhalb des von Flüssigkeit erfüllten Raumes, in dem ϱ von 0 bis Unen ϑ von 0 bis α variirt; nur, wenn:

$$m = 1 \quad , \quad \alpha = \frac{\pi}{n}$$

ist, findet dieses nicht statt und für $\varrho = \infty$ wird, wenn $2B_0 = 1$ macht,

$$2F(z+ix) = e^{-az-i\left(ax+\pi\frac{n-2}{n}\right)}$$
$$\varphi = e^{-az}\cos\left(ax+\pi\tfrac{n-2}{n}\right).$$

Bei beliebigen Werthen von x und z hat man dann

für $n = 2$:

$$2F(z+ix) = e^{-a(z+ix)}$$
$$\varphi = e^{-az}\cos ax;$$

für $n = 4$:

$$2F(z+ix) = \frac{1-i}{\sqrt{2}} e^{-az-iax} + \frac{1+i}{\sqrt{2}} e^{-ax+iax}$$
$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-az}(\cos ax - \sin ax) + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ax}(\cos az - \sin az);$$

für $n = 6$:

$$2F(z+ix) = -ie^{-a\,z+ix} + \sqrt{3}\, e^{-\frac{a}{2}(z+x\sqrt{3})+i\frac{a}{2}(x\sqrt{3}-z)} + ie^{\frac{a}{2}(z-x\sqrt{3})+i\frac{a}{2}(x+z\sqrt{3})},$$

$$F(z+ix) - G(z-ix) = 0$$

ist. Nach der Gleichung (5), in der für β sein Werth $-i$ zu setzen ist, wird diese Bedingung:

$$F(u) = F\big(-u+2c(1+i)\big).$$

Diese Gleichung (7) ist hier:

$$F(u) = A_0 e^{\lambda a u} + A_1 e^{-i\lambda a u} + A_2 e^{-\lambda a u} + A_3 e^{i\lambda a u} \tag{10}$$

und zwischen den Constanten A hat man die Gleichungen:

$$\begin{cases} A_1(-i\lambda+1) = A_0(-i\lambda-1) \\ A_2(-\lambda+1) \;\; = A_1(-\lambda-1) \\ A_3(i\lambda+1) \;\; = A_2(i\lambda-1); \end{cases} \tag{11}$$

die neue, eben abgeleitete Bedingung giebt zwei Gleichungen, nämlich:

$$A_2 = A_0 e^{\lambda a 2c(1+i)}$$

und:

$$A_3 = A_1 e^{\lambda a 2c(1-i)}.$$

Diese fünf Gleichungen reichen gerade aus zur Bestimmung der fünf Grössen A_1, A_2, A_3, λ, a. Durch Elimination der drei ersten erhält man:

$$e^{\lambda a 2c(1+i)} = \frac{(1+\lambda)(1+i\lambda)}{(1-\lambda)(1-i\lambda)},$$

$$e^{\lambda a 2c(1-i)} = \frac{(1+\lambda)(1-i\lambda)}{(1-\lambda)(1+i\lambda)}.$$

Multiplizirt man diese Gleichungen einmal, dividirt sie das andere Mal und zieht jedesmal die Quadratwurzel, so sieht man, dass entweder:

$$e^{2\lambda ac} = \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \text{ und } e^{i2\lambda ac} = \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda},$$

oder:

$$e^{2\lambda ac} = -\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \text{ und } e^{i2\lambda ac} = -\frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}$$

sein muss. Man setze:

$$\lambda ac = p,$$

so hat man im ersten Falle die Gleichungen:

$$e^{2p} = \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \qquad e^{i2p} = \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda},$$

oder:

$$\lambda = \operatorname{tg} p \qquad e^{2p} = \operatorname{tg}\left(p + \tfrac{\pi}{4}\right),$$

im zweiten:

$$e^{2p} = -\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \qquad e^{i2p} = -\frac{1+i\lambda}{1-i\lambda},$$

oder:

$$\lambda = -\operatorname{cotg} p \qquad e^{2p} = \operatorname{cotg}\left(p + \tfrac{\pi}{4}\right).$$

Die beiden transcendenten Gleichungen, deren einer p genüg muss, lassen sich in die eine:

$$\cos 2p \frac{e^{2p} + e^{-2p}}{2} = 1$$

zusammenfassen, welches die Gleichung ist, die die Schwingu zahlen eines elastischen, an beiden Enden freien Stabes b stimmt. Die Wurzeln derselben sind bekannt; aus di Wurzeln findet man hier die Schwingungszahlen der Flü keitsmasse, nämlich die Werthe der Grösse a (die den Q draten der Schwingungszahlen proportional sind) im ersten beiden unterschiedenen Fälle durch die Gleichung:

$$ac = \frac{p}{\operatorname{tg} p},$$

im zweiten durch die Gleichung:

$$ac = -p \operatorname{tg} p.$$

Die Gleichung $e^{2p} = \operatorname{tg}\left(p + \frac{\pi}{4}\right)$ hat zunächst die dreifa Wurzel $p = 0$; bei dem Probleme des elastischen, schwingen Stabes hat dieselbe keine Bedeutung, da sie dort einer unen lich grossen Schwingungsdauer entspricht; anders ist es hi für $p = 0$ wird hier

$$ac = 1;$$

der hierdurch bestimmte Werth von a bezieht sich auf vorher erörterten Schwingungen, bei denen die Oberfläche Flüssigkeit stets eben bleibt. Die folgenden Wurzeln der g nannten Gleichung für p sind etwas kleiner als:

$$\frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \ldots$$

Die Genauigkeit dieser Näherungswerthe ist um so grösser, je grösser ihre Ordnungszahl; schon bei dem ersten ist sie bedeutend, es ist nämlich:

$$\frac{5\pi}{4} = 3{,}92699,$$

während der entsprechende Werth von p

$$= 3{,}92660$$

ist.

Die Gleichung $e^{2p} = \operatorname{cotg}\left(p + \frac{\pi}{4}\right)$ hat die einfache Wurzel $p = 0$, die aber einer unendlichen Schwingungsdauer entspricht; ihre folgenden Wurzeln sind etwas grösser als:

$$\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \ldots.$$

Die erste von ihnen ist genauer

$$2{,}36502,$$

während

$$\frac{3\pi}{4} = 2{,}35620$$

ist.

Nennt man die Schwingungsart, bei der die Oberfläche der Flüssigkeit eine Ebene bleibt, die erste und setzt ihre Schwingungszahl = 1, so sind hiernach die Schwingungszahlen der Schwingungsarten ungerader Ordnungszahl:

$$1 \ , \ 1{,}9824 \ , \ 2{,}6586 \ , \ 3{,}1953,$$

und die der Schwingungsarten gerader Ordnungszahl:

$$1{,}5243 \ , \ 2{,}3448 \ , \ 2{,}9393.$$

Neben der Schwingungszahl sind für jede der möglichen Schwingungsarten von Interesse gewisse ausgezeichnete Punkte der Oberfläche, die Knoten nämlich, d. h. die Punkte, in denen die vertikale Bewegung Null ist, und die Bäuche, in denen die vertikale Bewegung ein Maximum ist, die Tangente an die Oberfläche also horizontal bleibt. Um diese zu finden, muss der Ausdruck von φ aufgestellt werden.

Für die Schwingungsarten ungerader Ordnungszahl sind die Gleichungen (11):

$$A_1 = -e^{i2p} A_0 \ , \ A_2 = -e^{2p} A_1 \ , \ A_3 = -e^{-i2p} A_2 .$$

nach (10) ist also, wenn man über die willkürliche Constante A_0 auf gewisse Weise verfügt:

$$2iF(u) = e^{p\left(\frac{u}{c}-1-i\right)} - e^{-ip\left(\frac{u}{c}-1-i\right)} + e^{-p\left(\frac{u}{c}-1-i\right)} - e^{ip\left(\frac{u}{c}-1-i\right)},$$

oder kürzer:

$$iF(u) = \cos p\left(\frac{ui}{c} + 1 - i\right) - \cos p\left(\frac{u}{c} - 1 - i\right),$$

und nach (5):

$$iG(v) = -\cos p\left(\frac{vi}{c} - 1 - i\right) + \cos p\left(\frac{v}{c} - 1 + i\right).$$

Um $i\varphi$ zu erhalten, hat man diese beiden Gleichungen zu addiren und $u = z + ix$, $v = z - ix$ zu setzen. Man braucht φ nur für die Oberfläche kennen zu lernen, man kann also $z = 0$ setzen; überdies möge:

$$\frac{x}{c} = 1 - \xi$$

gemacht werden; es ergiebt sich dann:

$$i\varphi = \cos p(\xi - i) - \cos p(1 + i\xi) - \cos p(\xi + i) + \cos p(1 - i\xi),$$

oder:

$$\varphi = (e^p - e^{-p}) \sin p\,\xi + \sin p\,(e^{p\xi} - e^{-p\xi}).$$

Nach der transcendenten Gleichung, der p genügt, ist:

$$\frac{e^p - e^{-p}}{2} = \frac{\sin p}{\sqrt{\cos 2p}},$$

wo das Vorzeichen der Quadratwurzel mit dem Vorzeichen von $\sin p$ übereinstimmen muss; abgesehen von einem constanten Factor hat man daher auch:

$$\varphi = \sin p\,\xi + \sqrt{\cos 2p}\ \frac{e^{p\xi} - e^{-p\xi}}{2}.$$

In den Knoten ist $\varphi = 0$, in den Bäuchen $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0$, d. h.

$$0 = \cos p\,\xi + \sqrt{\cos 2p}\ \frac{e^{p\xi} + e^{-p\xi}}{2}.$$

Für die Schwingungsarten gerader Ordnungszahl ist:

$$A_1 = A_0 e^{i2p} \ , \ A_2 = A_1 e^{2p} \ , \ A_3 = A_2 e^{-i2p}$$

und daher, wenn man wiederum über A_0 auf gewisse Weise verfügt:

$$2F(u) = e^{p\left(\frac{u}{c}-1-i\right)} + e^{-ip\left(\frac{u}{c}-1-i\right)} + e^{-p\left(\frac{u}{c}-1-i\right)} + e^{ip\left(\frac{u}{c}-1-i\right)}$$

oder

$$F(u) = \cos p\left(\frac{ui}{c} + 1 - i\right) + \cos p\left(\frac{u}{c} - 1 - i\right)$$

$$G(v) = \cos p\left(\frac{vi}{c} - 1 - i\right) + \cos p\left(\frac{v}{c} - 1 + i\right)$$

und für die Oberfläche:

$$\varphi = \cos p(\xi - i) + \cos p(1 + i\xi) + \cos p(\xi + i) + \cos p(1 - i\xi)$$

oder

$$\varphi = (e^p + e^{-p}) \cos p\,\xi + \cos p\,(e^{p\xi} + e^{-p\xi}).$$

Es ist aber

$$\frac{e^p + e^{-p}}{2} = \frac{\cos p}{\sqrt{\cos 2p}},$$

wo das Vorzeichen der Wurzelgrösse mit dem von $\cos p$ übereinstimmen muss. Abgesehen von einem constanten Factor hat man daher auch

$$\varphi = \cos p\,\xi + \sqrt{\cos 2p}\,\frac{e^{p\xi} + e^{-p\xi}}{2}.$$

Auch hier ist in den Knoten $\varphi = 0$, in den Bäuchen $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0$, d. h.

$$0 = \sin p\,\xi - \sqrt{\cos 2p}\,\frac{e^{p\xi} - e^{-p\xi}}{2}.$$

Die folgende Tafel enthält für die einzelnen Schwingungsarten die Ordnungszahl, die Schwingungszahl und die Werte von ξ, die den Knoten und Bäuchen entsprechen.

Ordnungszahl	Schwingungszahl	Knoten	Bäuche
1	1	0	
2	1,5243	$\pm$ 0,55170	0
3	1,9824	0	$\pm$ 0,3[illegible]
		$\pm$ 0,73580	
4	2,3448	$\pm$ 0,28838	0
		$\pm$ 0,81111	$\pm$ 0,560[illegible]
5	2,6586	0	$\pm$ 0,2226[illegible]
		$\pm$ 0,44644	$\pm$ 0,6577[illegible]
		$\pm$ 0,85310	

Versuche über stehende Schwingungen des Wassers.[1]

In den Monatsberichten der Berl. Akad. vom Mai 187[illegible] hat einer von uns die Theorie der stehenden Schwingungen entwickelt, die eine schwere Flüssigkeit in einem prismatischen Gefässe ausführen kann, dessen verticaler Querschnitt aus zu geraden Linien besteht, die miteinander einen rechten Winkel bilden und gleich geneigt gegen die Verticale sind. Wir haben einige der dort abgeleiteten Resultate, namentlich einige [illegible]

[1] G. Kirchhoff und G. Hansemann, Wied. Ann. Bd. 10. 1880.

[2] S. oben p. 428.

dort berechneten Schwingungsdauern durch Messungen zu prüfen gesucht. Die Schwingungen der Flüssigkeit wurden dadurch hervorgerufen und unterhalten, dass das prismatische Gefäss unter dem Einfluss electromagnetischer Kräfte Schwingungen um seine Kante als Axe ausführte. Die Dauer dieser Schwingungen konnte innerhalb gewisser Grenzen geändert und gemessen werden; ausserdem liess sich ihre Amplitude und die Amplitude der Wasserfläche in ihrer Mitte messen. Das Verhältniss dieser beiden Amplituden zeigte für gewisse Werthe der Schwingungsdauer stark ausgesprochene Maxima; diese Werthe mussten nahe übereinstimmen mit den Schwingungsdauern der Schwingungsarten ungerader Ordnungszahl, welche an dem angeführten Orte gefunden sind. Will man mit grösserer Genauigkeit die Resultate der Theorie mit denen der Beobachtung vergleichen, so stösst man auf Schwierigkeiten, da in der Theorie weder die Bewegung des Gefässes noch die Reibung der Flüssigkeit bis jetzt berücksichtigt werden kann; es ist nur der Weg offen, der so häufig eingeschlagen werden muss: für den Fall, der vorliegt, Formeln als gültig anzunehmen, die für einen Fall, der ähnlich zu sein scheint, und dessen Theorie durchgeführt werden kann, sich ergeben. Um solche Formeln zu finden, haben wir die Wassermasse uns ersetzt gedacht durch ein Pendel, auf welches eine dämpfende Kraft wirkt, das trotzdem aber in periodischer Bewegung infolge davon bleibt, dass seine Axe von einem zweiten Pendel getragen wird, dessen Schwingungen durch geeignete Kräfte gleichmässig erhalten werden. Sehr einfache Betrachtungen führen dann zu einer Gleichung zwischen dem Verhältniss der Amplituden beider Pendel und der Schwingungsdauer; sind die in dieser Gleichung vorkommenden Constanten aus Beobachtungen bestimmt, so kann man aus ihnen die Schwingungsdauer finden, die das erste Pendel haben würde, wenn es keiner dämpfenden Kraft unterworfen, und seine Axe fest wäre.

Man denke sich ein Pendel, welches um eine horizontale Axe unter dem Einfluss geeigneter Kräfte Schwingungen ausführt. Dieses Pendel trage die seiner eigenen Axe parallele Axe eines andern Pendels, auf welches die Schwere und eine dämpfende Kraft wirkt. Es sei m die Masse des letzteren, ξ

die vertical nach unten gekehrte, η die auf den Drehungsaxen senkrechte, horizontale Ordinate eines Punktes seiner Axe zur Zeit t; die Bewegung desselben relativ gegen ein Axensystem, dessen Anfangspunkt dieser Punkt ist, und dessen Axenrichtungen mit den Richtungen von ξ und η zusammenfallen, ist dann die gleiche, wie wenn dieses Axensystem ruhte, neben den vorhandenen Kräften aber auf den Schwerpunkt des Pendels noch eine Kraft wirkte, deren Componenten $-m\frac{d^2\xi}{dt^2}$ und $-m\frac{d^2\eta}{dt^2}$ sind. Ist der Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsaxe des Pendels l, sein Trägheitsmoment K, u der Winkel, um den es sich zur Zeit t aus seiner Gleichgewichtslage gedreht hat, und nimmt man die dämpfende Kraft als proportional mit $\frac{du}{dt}$ an[1]), so ist daher:

$$\frac{K}{lm}\frac{d^2u}{dt^2} = \left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - g\right)\sin u + \frac{d^2\eta}{dt^2}\cos u - \varkappa\frac{du}{dt},$$

wo g die Intensität der Schwere und $\varkappa$ eine Constante bezeichnet. Bedeutet ferner λ den Abstand der Drehungsaxen beider Pendel voneinander und v den Winkel, den die durch diese gelegte Ebene zur Zeit t bildet mit der verticalen, durch die feste Axe gehenden Ebene, so ist, wenn der Anfangspunkt der ξ und η in der festen Axe angenommen wird:

$$\xi = \lambda\cos v, \qquad \eta = \lambda\sin v.$$

Setzt man sowohl u als v als unendlich klein voraus, so hat man daher:

$$\frac{K}{lm}\frac{d^2u}{dt^2} = -gu + \lambda\frac{d^2v}{dt^2} - \varkappa\frac{du}{dt}.$$

Diese Gleichung möge geschrieben werden:

---

[1]) Treffender wäre es, die dämpfende Kraft als proportional mit der relativen Geschwindigkeit der beiden Pendel anzunehmen; beide Annahmen müssen zu nahe gleichen Resultaten führen, wenn die Amplitude des Pendels mit fester Axe klein ist gegen die Amplitude des anderen, was hier vorausgesetzt werden kann; die im Texte genannte Annahme ist gewählt, weil für sie die nöthigen numerischen Rechnungen leichter sind.

$$\alpha^2 \frac{d^2u}{dt^2} + 2\beta \frac{du}{dt} + u = N \frac{d^2v}{dt^2},$$

wo dann α, β, N gewisse Constanten bedeuten, von denen die erste die Schwingungsdauer bestimmt, die das Pendel mit der beweglichen Axe haben würde, wenn es keiner Dämpfung unterworfen und seine Axe fest wäre; diese Schwingungsdauer ist nämlich:

$$= \alpha\pi,$$

Nun werde angenommen, dass die Schwingungen des Pendels mit der festen Axe der Gleichung:

$$v = B \cos nt$$

gemäss geschehen, und dass auch u periodisch geworden ist. Es muss dann:

$$u = A' \cos nt + A'' \sin nt$$

sein, und es müssen die Constanten B, A', A'' den Gleichungen genügen:

$$A'(\alpha^2 n^2 - 1) - A'' 2\beta n = BNn^2,$$
$$A' 2\beta n + A''(\alpha^2 n^2 - 1) = 0.$$

Quadrirt und addirt man diese Gleichungen und setzt dann:

$$A'^2 + A''^2 = A^2,$$

bezeichnet also durch A die Amplitude des Pendels mit der beweglichen Axe, so erhält man:

$$A^2 \left((\alpha^2 n^2 - 1)^2 + 4\beta^2 n^2\right) = B^2 N^2 n^4.$$

Das ist die Beziehung zwischen dem Amplitudenverhältniss $A:B$ und der Schwingungsdauer $\frac{\pi}{n}$. Setzt man:

$$\frac{1}{n^2} = x \text{ und } \frac{B}{A} = y$$

so ist sie:

$$N^2 y^2 = (\alpha^2 - x)^2 + 4\beta^2 x$$

und stellt, wenn man x und y als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes ansieht, eine Hyperbel dar. Kennt man drei oder mehr zusammengehörige Werthepaare von x und y,

so kann man die drei in ihr vorkommenden Constanten berechnen, also auch die Schwingungsdauer $\alpha\pi$ ermitteln.

Diese Formeln haben wir auch bei unseren Versuchen über die Schwingungen des Wassers benutzt, um die Schwingungsdauern zu berechnen, die ihm zukommen würden, wenn das Gefäss stillstände und Reibung nicht vorhanden wäre.

Das prismatische Gefäss *A*, Taf. IV Fig. 1 war aus vier Glasplatten von 6^{mm} Dicke zusammengekittet, von denen zwei Quadrate und zwei gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke bildeten; die Seiten jener waren etwa 200^{mm} lang. Mit seinem unteren Theile war das Glasgefäss in ein aus Messingplatten zusammengesetztes Hohlprisma gekittet, das zwei Stahlschneiden trug, deren nach unten gekehrte Schärfen in die Verlängerungen der Linie fielen, die die untere Kante des das Glasgefäss erfüllenden Wassers ausmachte. Diese Schneiden ruhten auf stählernen Lagern, die auf einem sehr festen Tische — dem Gestelle einer kleinen eisernen Drehbank — befestigt waren, und bildeten die Drehungsaxe für ein Federpendel, von dem das mit Wasser gefüllte Gefäss ein Theil war. Es trug dieses einen nach unten gehenden Messingstab *B* mit einem Bleigewicht, dessen Grösse ausreichte, um das Umstürzen des mit Wasser gefüllten Gefässes zu verhindern. Durch eine Durchbohrung des Messingstabes war ein dünnerer Eisenstab *CD* geführt, der bei *C* aufwärts gebogen und mit einer Feder verbunden war, deren zweites Ende bei *E* an dem Tische so befestigt war, dass ihre Ebene durch die genannte Drehungsaxe ging. Eine zweite Feder *F* verband den Messingstab *B* mit einem Holzstabe, der bei *G* ein Laufgewicht trug; durch Verschiebung dieses oder durch Hinzufügung kleiner Gewichtsstücke zu demselben konnte die Schwingungsdauer des ganzen Systemes geändert werden. Oberhalb des Laufgewichtes war auf jeder Seite des Holzstabes eine kleine Eisenplatte befestigt, die einem davor aufgestellten Elektromagneten als Anker diente. Bei den Schwingungen wurde der Strom einer Kette abwechselnd durch den Draht des einen und den des andern

Elektromagneten geleitet, indem von den Enden eines mit dem Holzstabe verbundenen Drahtes *HH* bald das eine, bald das andere in ein darunter befindliches Quecksilbernäpfchen tauchte. Die Bildung von Funken in diesen war durch eine, als Nebenschliessung eingeschaltete Zersetzungszelle verhindert. Waren die Schwingungen stationär geworden, so wurde durch Herstellung eines Contactes eine zweite Kette in Thätigkeit gesetzt, deren Strom vermöge eines dritten, an dem Holzstabe befestigten Armes und eines entsprechenden Quecksilbernäpfchens abwechelnd unterbrochen und geschlossen wurde. Dieser Strom ging durch einen Siemens'schen Chronographen *J* und erzeugte auf dem Papierstreifen dieses Marken, aus denen die Schwingungsdauer später ermittelt werden konnte. Um die Amplitude des Gefässes messen zu können, hatten wir an dem schon erwähnten Eisenstabe bei *D* ein verticales Glasplättchen befestigt, das ein mit einem horizontalen, feinen Spalt versehenes Staniolblatt trug. Auf der einen Seite dieses war eine Lampe, auf der andern ein mit einem Ocularmikrometer versehenes Mikroskop aufgestellt, das auf der Zeichnung sichtbar, dessen Träger aber nicht dargestellt ist. Zur Beobachtung der Bewegung der Wasseroberfläche diente ein, mit einem horizontalen, durch eine Glasflamme erleuchteten Spalt versehener Collimator *K* und ein Fernrohr *L*, welches dem Beobachter das an der Wasserfläche erzeugte Spiegelbild des Spaltes zeigte. Die Axen von Fernrohr und Collimator schnitten sich in einem Punkte der Wasserfläche; um die Linie, die durch diesen Punkt in der Richtung der Drehungsaxe des Gefässes ging, waren beide drehbar, und der Winkel, um den das Fernrohr gedreht wurde, liess sich an einer Kreistheilung ablesen. Ausserdem konnten Fernrohr und Collimator zusammen, horizontal und senkrecht auf der Drehungsaxe des Gefässes, längs einer Scala verschoben werden. Der Regel nach befand sich vor dem Objectiv des Fernrohrs oder des Collimators ein Schirm mit einem schmalen, horizontalen Schlitz in seiner Mitte, der von den Strahlen, die der Lichtspalt aussendete, nur diejenigen hindurchliess, die an einem schmalen Theile der Wasserfläche reflektirt wurden. Das Gesichtsfeld des Fernrohrs war durch zwei in der Ebene des Fadenkreuzes be-

findliche Schirme oben und unten gradlinig begrenzt. Sollte die Amplitude des Theiles der Wasserfläche, der in der Axe des Fernrohrs lag, gemessen werden, so wurde dieses zunächst bei ruhendem Wasser so eingestellt, dass von dem Spiegelbilde des leuchtenden Spaltes an der einen Grenze des Gesichtsfeldes eben eine Spur noch wahrnehmbar war, und dann, nachdem die Schwingungen hervorgerufen waren, so gedreht, dass an derselben Grenze auch jetzt nur noch Spuren von Licht aufblitzten. Der Drehungswinkel des Fernrohrs war dann dem Winkel gleich, durch den der beobachtete Theil der Wasserfläche bei einer Schwingung sich drehte, also gleich dem Doppelten seiner Amplitude.

Um eine vollkommene Benetzung der Gefässwände zu sichern, war dem Wassser etwas Kalilauge zugesetzt.

Bei den langsamsten Schwingungen der prismatischen Wassermasse bleibt der Theorie zufolge die Oberfläche eine Ebene und die Schwingungsdauer ist gleich der Schwingungsdauer eines einfachen Pendels, dessen Länge der halben Länge der Oberfläche gleich ist. War die Schwingungsdauer diesem Werthe nahe gleich gemacht, so blieb auch die Wasseroberfläche nahe eben, ausser in der Nähe der Gefässwände, wo sie durch Capillarität gekrümmt war; es zeigte sich das an den Spiegelbildern, die sie erzeugte, welche scharf und unverzerrt waren. Die Beobachtungen mit dem Fernrohre konnten hier bei freien Objectiven ausgeführt werden.

Die folgende Zusammenstellung giebt die Zahl n der in einer Minute ausgeführten Schwingungen, die in Graden ausgedrückten Amplituden der Wasserfläche, A, und des Gefässes, B, und die Verhältnisse beider, y, wie sie in einem Beobachtungssatze bei verschiedener Grösse des an dem Holzstabe befindlichen Gewichtes gefunden wurden.

Tabelle I.

Nr.	n	A	B	y beobachtet	y berechnet	Differenzen
1	160,1	2,20°	0,129°	0,0587	0,0591	−0,0004
2	160,9	2,43	0,125	0,0517	0,0515	+0,0002
3	161,6	2,78	0,122	0,0438	0,0446	−0,0008
4	162,2	3,10	0,122	0,0392	0,0396	−0,0004
5	162,9	3,45	0,118	0,0341	0,0339	+0,0002
6	163,2	3,90	0,110	0,0282	0,0302	−0,0020
7	168,5	3,73	0,064	0,0171	0,0193	−0,0022
8	168,6	3,55	0,071	0,0201	0,0200	+0,0001
9	169,0	3,28	0,075	0,0230	0,0237	−0,0007
10	169,7	3,00	0,083	0,0276	0,0288	−0,0012
11	168,9	3,30	0,077	0,0234	0,0223	+0,0011
12	168,4	3,53	0,069	0,0197	0,0185	+0,0012
13	168,0	3,75	0,064	0,0170	0,0159	+0,0011
14	167,8	3,93	0,060	0,0152	0,0147	+0,0005
15	167,4	4,05	0,956	0,0138	0,0125	+0,0013
16	167,2	4,15	0,048	0,0116	0,0115	+0,0001
17	167,1	4,20	0,044	0,0106	0,0111	−0,0005
18	161,1	2,53	0,129	0,0512	0,0498	+0,0014
19	160,3	2,25	0,131	0,0583	0,0569	+0,0014

Aus den Werthen von n und y sind die Constanten der aufgestellten Hyperbelgleichung so berechnet, dass die Summe der Quadrate der Fehler der Werthe von y zu einem Minimum gemacht ist. So ergab sich:

$$\alpha = 0{,}006\,006, \qquad \beta = 0{,}000\,041\,23, \qquad N = 0{,}000\,050\,86.$$

Um zu zeigen, inwieweit die Beobachtungen durch die Hyperbelgleichung bei diesen Werthen der Constanten dargestellt werden, sind die aus ihr berechneten Werthe von y in der „y berechnet“ überschriebenen Columne angegeben und die übrig bleibenden Differenzen hinzugefügt. Aus dem Werthe von α ergibt sich $\frac{1}{\alpha}$, d. h. die Schwingungszahl für eine Minute bei der langsamsten Schwingungsart der Wassermasse in dem Falle, dass das Gefäss ruht und keine Reibung stattfindet:

$$= 166{,}5.$$

Eine zweite ähnliche Versuchsreihe führte zu genau demselben Zahlenwerth; eine dritte ergab 166,4.

Die Länge der Wasserfläche, wenn ihre Höhe einer gewissen Marke entsprach, was bei allen Versuchen der Fall war,

betrug 256,9 mm; ein Pendel, dessen Länge die Hälfte ist, führt in einer Minute

$$166{,}9$$

Schwingungen aus, eine Zahl, die mit den aus den Beobachtungen hergeleiteten in befriedigender Uebereinstimmung ist.

Die folgende Tabelle giebt in ähnlicher Weise die Resultate der Beobachtungen an, die wir angestellt haben in Bezug auf die dritte, am Eingange erwähnten Orte behandelten Schwingungsart.

Tabelle II.

Nr.	n	A	B	$\frac{1}{n}$ beobachtet	$\frac{1}{n}$ berechnet	Differenz
1	322,4	1,75°	0,152°	0,0869	0,0896	− 0,0027
2	327,9	2,40	0,155	0,0647	0,0627	+ 0,0020
3	334,8	2,78	0,155	0,0559	0,0584	− 0,0025
4	342,4	1,73	0,157	0,0898	0,0891	+ 0,0007
5	339,0	1,98	0,147	0,0743	0,0731	+ 0,0012
6	336,9	2,15	0,136	0,0631	0,0648	− 0,0017
7	334,6	2,18	0,127	0,0584	0,0581	+ 0,0003
8	332,5	2,20	0,126	0,0571	0,0553	+ 0,0018
9	329,8	2,35	0,137	0,0584	0,0572	+ 0,0012
10	327,2	2,03	0,137	0,0676	0,0652	+ 0,0024
11	332,7	2,95	0,155	0,0527	0,0554	− 0,0027

Dabei fand sich:

$$\alpha = 0{,}003\,014, \qquad \beta = 0{,}000\,070\,71, \qquad N = 0{,}000\,007\,[illegible],$$

also:

$$\frac{1}{n} = 331{,}8.$$

Die entwickelte Theorie hat die entsprechende Schwingungszahl:

$$166{,}9 \,.\, 1{,}9824 = 330{,}9$$

ergeben. Aber diese Theorie hat nicht Rücksicht nehmen können auf die Capillarität, die, wie zuerst W. Thomson, später Koláček gezeigt hat, einen merklichen Einfluss auf die Wellenbewegung des Wassers auszuüben im Stande ist. Wenn das Wasser in horizontaler Richtung unbegrenzt ist, überall dieselbe Tiefe hat und stehende Schwingungen ausführt, deren von Knoten zu Knoten gemessene und in Millimetern

ausgedrückte Wellenlänge durch λ bezeichnet wird, so bringt nach Koláček[1]) die Capillarität eine Verkleinerung der Schwingungsdauer hervor, die nahe:

$$1{,}5\left(\frac{50}{\lambda}\right)^2 \text{ Procent}$$

beträgt. Mit einer solchen Bewegung wird näherungsweise die betrachtete Bewegung der prismatischen Wassermasse in genügender Entfernung von den Gefässwänden übereinstimmen; für sie ergiebt sich aus den Knoten:

$$\lambda = 0{,}736 \,.\, 128{,}4 = 94{,}52$$

und aus den Bäuchen:

$$\lambda = 0{,}766 \,.\, 128{,}4 = 98{,}35.$$

Nimmt man für λ einen Mittelwerth an, so findet man hiernach die theoretische Schwingungszahl für eine Minute bei der dritten Schwingungsart mit Rücksicht auf die Capillarität

$$= 332{,}2,$$

während unsere Beobachtungen sie 331,8 ergeben haben.

Auch in Bezug auf die Lage der Bäuche haben wir Messungen ausgeführt. In dem ideellen Falle, auf den die entwickelte Theorie sich bezieht, sind die Bäuche die Stellen, in denen die Richtung der Wasserfläche ungeändert bleibt. Solche Stellen giebt es in dem Falle, der bei den Versuchen verwirklicht ist, nicht; es gelten hier als Bäuche die Stellen, in denen die Aenderung der Richtung der Wasserfläche ein Minimum ist. Bei jedem der Versuche, die in der vorigen Tabelle aufgeführt sind, sind diese Stellen aufgesucht; auf jeder Seite der Mitte der Wasserfläche fand sich ein Bauch; der Abstand der beiden Bäuche von einander zeigte sich als abhängig von der Schwingungszahl n und liess sich in befriedigender Weise als eine lineare Funktion von n darstellen, nämlich wenn 1^{mm} als Längeneinheit angenommen wird, durch den Ausdruck:

$$506{,}18 - 1{,}2202\, n.$$

Die folgende Tabelle giebt die Werthe von n und die beob-

1) Koláček, Wied. Ann. 5, S. 429. 1878.

achteten, sowie die hiernach berechneten Werthe der [illegible] standes an.

Tabelle III.

Nr.	n	Abstand der Bäuche beobachtet	Abstand der Bäuche berechnet	Differenzen
		mm	mm	
1	322,4	112,0	112,8	−0,8
2	327,9	105,6	106,0	−0,4
3	334,8	97,0	97,6	−0,6
4	342,4	89,6	88,4	+1,2
5	339,0	92,2	92,6	−0,4
6	336,9	95,0	95,0	0,0
7	334,6	98,4	97,8	+0,6
8	332,5	100,4	100,4	0,0
9	329,8	103,8	103,8	0,0
10	327,2	108,2	107,0	+1,2
11	332,7	99,4	100,2	−0,8

Setzt man in jenen Ausdruck für n den oben gefun[illegible] Werth 331,8, so ergiebt sich der Abstand der beiden B[illegible] von einander

$$= 101{,}3.$$

Nach der entwickelten Theorie sollte derselbe:

$$= 0{,}7665 \,.\, 128{,}4 = 98{,}4 \text{ sein.}$$

Auf ähnliche Weise, wie die dritte, haben wir an[illegible] fünfte Schwingungsart behandelt. Die Beobachtungsre[illegible] aus denen die Schwingungszahl abgeleitet ist, sind:

Tabelle IV.

Nr.	n	A	B	ν beobachtet	ν berechnet	Differ[illegible]
1	458,0	1,77	0,211	0,119	0,116	[illegible]
2	455,0	1,85	0,203	0,110	0,107	[illegible]
3	451,5	1,80	0,185	0,103	0,102	[illegible]
4	449,1	1,83	0,185	0,101	0,102	[illegible]
5	446,5	1,58	0,170	0,108	0,105	[illegible]
6	444,7	2,03	0,220	0,109	0,109	[illegible]
7	442,1	1,82	0,215	0,118	0,118	[illegible]
8	447,5	2,05	0,210	0,103	0,104	[illegible]
9	453,7	1,93	0,195	0,101	0,105	[illegible]
10	460,3	1,53	0,185	0,121	0,124	[illegible]

Hieraus hat sich ergeben:

$$\alpha = 0{,}002\,224, \qquad \beta = 0{,}000\,070\,86, \qquad N = 0{,}000\,003\,089,$$

$$\frac{1}{\alpha} = 449{,}7.$$

Nach der entwickelten Theorie sollte die Schwingungszahl $\frac{1}{\alpha}$

$$= 166{,}9 \,.\, 2{,}6586 = 443{,}8$$

sein; dieses Resultat ist zu corrigiren wegen des Einflusses der Capillarität. Aus den inneren Knoten findet sich:

$$\lambda = 0.446 \,.\, 128{,}4 = 57{,}27$$

und aus den inneren Bäuchen:

$$\lambda = 0{,}445 \,.\, 128{,}4 = 57{,}15;$$

der eine wie der andere dieser Werthe giebt den corrigirten theoretischen Werth von $\frac{1}{\alpha}$

$$= 448{,}9.$$

Bäuche giebt es bei dieser Schwingungsart zwei innere und zwei äussere. Die Abstände der inneren von einander und der äusseren von einander, wie sie gefunden wurden bei den verschiedenen Schwingungszahlen, sind in Tab. V angegeben:

Tabelle V.

Nr.	n	Abstand der inneren Bäuche			Abstand der äusseren Bäuche		
		beobachtet	berechnet	Differenzen	beobachtet	berechnet	Differenzen
		mm	mm		mm	mm	
1	458,0	56,2	56,8	−0,7	161,2	160,8	+0,4
2	455,0	56,6	56,4	+0,2	164,0	164,4	−0,4
3	451,5	56,2	56,0	+0,2	168,4	168,8	−0,4
4	449,1	55,6	55,8	−0,2	171,6	171,6	0,0
5	446,5	55,6	55,4	+0,2	174,8	174,8	0,0
6	444,7	55,2	55,2	0,0	176,6	176,8	−0,2
7	442,1	54,6	54,8	−0,2	180,4	180,0	+0,4
8	447,5	55,6	55,6	0,0	173,6	173,6	0,0
9	453,7	56,8	56,4	+0,4	166,0	166,0	0,0
10	460,3	57,2	57,2	0,0	158,4	158,0	+0,4

Die berechneten Werthe dieser Abstände sind berechnet nach den Ausdrücken:

$$0{,}47828 + 0{,}12306\,n \quad \text{und} \quad 711{,}54 - 1{,}2023\,n.$$

Setzt man hier für n 449,7, so ergeben sie:

55,8 und 170,9,
während die Abstände nach der entwickelten Theorie sein sollten:
57,2 und 169,0.

Ueber einen Satz der mechanischen Wärmetheorie, und einige Anwendungen desselben.[1])

Thomson hat in seiner Abhandlung *On the quantities of mechanical energy contained in a fluid . .* [2]) einen Satz von grosser Fruchtbarkeit ausgesprochen, der aus den beiden Sätzen, welche die Grundlage der mechanischen Wärmetheorie bilden, folgt. Ich will diesen Satz in etwas anderer Form hier ableiten und ihn auf einige Erscheinungen hier anwenden, die, so viel mir bekannt ist, noch nicht vom Standpunkt der mechanischen Wärmetheorie betrachtet sind, nämlich auf die Absorption eines Gases und die Auflösung eines Salzes in Wasser.

Führt man einen Körper aus einem Zustande in einen anderen über, indem man seine Temperatur und den Druck, unter dem er steht, ändert, so giebt er dabei eine positive oder negative Wärmemenge ab und leistet eine positive oder negative äussere Arbeit. Die Summe der geleisteten äusseren Arbeit und der, mit dem mechanischen Aequivalent der Wärmeeinheit multiplicirten, abgegebenen Wärmemenge soll die der gedachten Ueberführung entsprechende Wirkungsgrösse genannt werden.

Wenn die lebendige Kraft der sichtbaren Bewegung beim Endzustande eben so gross ist, wie beim Anfangszustande, so ist nach dem ersten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie die Wirkungsgrösse unabhängig von dem Wege, auf dem die Ueberführung geschieht, und allein bedingt durch den End- und Anfangszustand.

Es soll nun angenommen werden, dass die Ueberführung in einer solchen Weise geschieht, dass die lebendige Kraft der sichtbaren Bewegung immer eine unendlich kleine ist, und dass ferner der Zustand des Körpers in jedem Augenblicke eindeu-

[1]) Pogg. Ann. Bd. 103. 1858.
[2]) Phil. Mag. 4, Vol. 9, p. 523.

tig bestimmt ist durch die jedesmaligen Werthe zweier unabhängigen Variabeln, die man durch Aenderungen der Temperatur und des Druckes nach Willkür verkleinern oder vergrössern kann. Die eine von diesen beiden Variabeln soll die Temperatur selbst sein, gemessen an einem, aus einem vollkommenen Gase gebildeten, Luftthermometer; diese Temperatur möge durch t bezeichnet werden. Die zweite der beiden Variabeln soll späterer Verfügung vorbehalten bleiben; sie möge x genannt werden.

Das Volumen des Körpers sei v, sein Druck p und die Wärmemenge, welche ihm von Aussen zugeführt werden muss, wenn x um dx und t um dt wachsen sollen,

$$X dx + T dt;$$

wo v, p, X und T Functionen von x und t bedeuten. Bezeichnet man die gesammte Wärmenge durch dQ und das mechanische Aequivalent der Wärmeeinheit durch k so ist die Wirkungsgrösse, die dem Processe entspricht, durch den x um dx und t um dt vergrössert wird,

$$= p dv - k dQ.$$

Lässt man den Körper einen Kreisprocess durchlaufen — mit anderen Worten: ändert man x und t so, dass, wenn man diese Variabeln zu Coordinaten eines Punktes macht, eine geschlossene Curve entsteht, — so ist die diesem Processe entsprechende Wirkungsgrösse $= 0$; d. h. betrachtet man x und t als die Coordinaten eines Punktes, so verschwindet das Integral:

$$\int p dv - k dQ,$$

wenn es über irgend eine geschlossene Curve ausgedehnt wird. Da dasselbe sich schreiben lässt:

$$\int \left(p \frac{\partial v}{\partial x} - k X\right) dx + \left(p \frac{\partial v}{\partial t} - k T\right) dt,$$

so folgt hieraus, dass:

$$(1) \qquad \begin{cases} p \frac{\partial v}{\partial x} - k X = \frac{\partial W}{\partial x} \\ p \frac{\partial v}{\partial t} - k T = \frac{\partial W}{\partial t} \end{cases}$$

sein muss, wo W eine Funktion von x und t bedeutet.

Kennte man diese Function, so wäre es leicht die Wirkungsgrösse für die Ueberführung des Körpers aus einem Zustande in einen zweiten anzugeben; denn es ist diese Wirkungsgrösse:

$$= W_2 - W_1,$$

wenn W_2 und W_1 die Werthe von W für den End- und den Anfangszustand bezeichnen. Ich will aus diesem Grunde die Funktion W die Wirkungsfunction für den betrachteten Körper nennen. Es ist $-W$ dasselbe, was Thomson a. a. O. *the mechanical energy of a body in a given state* nennt.

Der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie lehrt nun die Wirkungsfunction bis auf eine additive Constante wirklich kennen, sobald p und v als Functionen von x und t gegeben sind, und ausserdem T für einen Werth von x als Function von t gegeben ist.

Bezeichnet $-a$ die Temperatur des absoluten 0 Punktes (die nahe $-273°$ C. ist), so ist nach dem genannten Satze für jeden Kreisprocess, den man den Körper durchlaufen lässt

$$\int \frac{dQ}{a+t} = 0.$$

Setzt man in diese Gleichung für dQ seinen Werth, so folgt aus ihr:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{X}{a+t}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T}{a+t}\right),$$

und substituirt man nun für X und T ihre Werthe, die aus den Gleichungen (1) sich ergeben, so erhält man:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = (a+t)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + p\frac{\partial v}{\partial x},$$

oder auch:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = (a+t)\frac{\partial p}{\partial x} - t\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Bezeichnet x_0 einen willkürlich gewählten Werth von x und W_0 die Function von t, in welche W für $x = x_0$ übergeht, so ist hiernach:

[1]) Clausius Pogg. Ann. Bd. 94, S. 481, Thomson, *Transact. of the royal society of Edinburgh*, vol. 21, part 1, p. 126.

$$(2) \qquad W = W_0 + (a+t)^2 \int_{x_0}^{x} dx \left(\frac{\partial \frac{p}{a+t}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \frac{p}{a+t}}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

wo bei der Integration t als Constante zu betrachten ist.

Bezeichnen ferner p_0, v_0, T_0 die Functionen von t, in welche p, v, T für $x = x_0$ übergehn, so folgt aus der zweiten der Gleichungen (1) falls x_0 nicht von t abhängig ist:

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} = p_0 \frac{dv_0}{dt} - k T_0,$$

und durch Integration hieraus:

$$(3) \qquad W_0 = \int^{t} dt \left(p_0 \frac{dv_0}{dt} - k T_0 \right),$$

wo die untere Grenze des Integrals willkürlich ist. Setzt man diesen Werth von W_0 in die Gleichung (2), so erhält man W bis auf eine additive Constante, die willkürlich bleibt, ausgedrückt durch p, v und T_0.

Die Gleichungen (2) und (3) sprechen den Satz aus, den ich ableiten wollte, und den ich nun auf einige specielle Fälle anwenden will.

Die Wirkungsfunction für die Masseneinheit Wasser in ihren verschiedenen Zuständen.

Es soll zunächst die Wirkungsfunction für die Masseneinheit Wasser in ihren verschiedenen Zuständen entwickelt werden, so weit ihre Kenntniss bei den im Eingange dieses Aufsatzes bezeichneten Untersuchungen nöthig ist.

Es werde zuerst angenommen, dass der Druck, unter dem die Wassermasse steht, grösser ist, als der Druck des Wasserdampfes im Maximum der Dichtigkeit bei der stattfindenden Temperatur. Die Temperatur soll nicht unter den Eispunkt sinken. Die ganze Wassermasse ist dann tropfbar flüssig. Für diesen Fall soll $x = p$ gewählt werden. Dadurch geht die allgemeine Gleichung für W über in die folgende:

$$W = p_0 v_0 - k \int_{0}^{t} T_0 \, dt + \int_{p_0}^{p} dp \left((a+t) \frac{\partial v}{\partial t} + p \frac{\partial v}{\partial p} \right) + \text{Const.},$$

wo p_0 einen willkürlich gewählten constanten Druck bezeichnen soll; T_0 ist dann die specifische Wärme des Wassers bei dem

constanten Drucke p_0 und v_0 das Volumen der Massenei-
Wasser bei demselben Drucke; T_0 und r_0 sind Functionen v

Die Temperatur t möge nach den Graden der hun-
hergen Thermometerscale gezählt werden und Einheit
Wärmemenge möge die Wärmemenge sein, die die Ma-
heit Wasser von 0°C. auf 1°C. erwärmt. In dem A-
rucke von W sollen Glieder vernachlässigt werden, wel-
unendlich klein gegen das mechanische Aequivalent d-
Wärmemenge betrachtet werden dürfen. Wenn der Dr
ein mässiger bleibt — was vorausgesetzt werden soll —,
wird man dann bei der Bildung des Ausdrucks von W
der Zusammendrückbarkeit des Wassers absehen und v
unabhängig von p betrachten können. Man erhält hierdur

$$W = p_0 v - k \int_0^t T_0 \, dt + (a+t) \frac{dv}{dt} p - p_0 + \text{Const.}$$

Weiter wird man auch ohne merklichen Fehler von der A
hängigkeit des Volumens von der Temperatur absehen
setzen dürfen:

$$W = -k \int_0^t T_0 \, dt + \text{Const.}$$

Macht man die willkürliche Constante, die in dieser Gleic
vorkommt, $= 0$, und bezeichnet die specifische Wärme
Wassers durch c, so erhält man also für die Massenei
Wasser, so lange dieselbe tropfbar flüssig ist:

(4) $$W = -k \int_0^t c \, dt.$$

Handelt es sich um einen anderen, tropfbar flüssigen
festen Körper, so wird man in ähnlicher Weise set
dürfen:

(5) $$W = -k \int_0^t c \, dt,$$

wo c die Wärmecapacität des Körpers bedeutet; di
Ausdruck will ich für das Product aus der Masse und
specifischen Wärme gebrauchen.

Wird der Druck, unter dem die Wassermasse steht, mehr und mehr verkleinert, so tritt eine Dampfbildung ein, sobald derselbe gleich dem Drucke des Dampfes im Maximum der Dichtigkeit bei der stattfindenden Temperatur geworden ist. Durch unendlich kleine Aenderungen des Druckes kann man dann nach Willkür die Masse des Dampfes vergrössern oder verkleinern. Man lasse nun in der Gleichung (2) x die Masse des gebildeten Dampfes bedeuten; es ist dann p unabhängig von x und die genannte Gleichung giebt daher:

$$W = W_0 - (a+t)^2 (v - v_0) \frac{d\frac{p}{a+t}}{dt}.$$

Die Grösse x_0, von welcher W_0 und v_0 abhängen, und welche beliebig gewählt werden kann, soll gleich 0 gesetzt werden; dann wird X_0 gleich dem in der Gleichung (4) angegebenen Werthe von W, und v_0 wird gleich dem Volumen der Masseneinheit tropfbar flüssigen Wassers. Bezeichnet man dieses Volumen durch s, das Volumen der Masseneinheit Dampf im Maximum der Dichtigkeit bei der Temperatur t durch σ und den Druck dieses Dampfes durch π_1, so ergiebt sich also:

$$W = -k\int_0^t c\,dt - (a+t)^2(\sigma - s)x \frac{d\frac{\pi_1}{a+t}}{dt}. \tag{6}$$

Diese Gleichung gilt so lange, bis alles Wasser verdampft, d. h. $x = 1$ geworden ist. Findet dieses statt, so kann der Druck weiter verkleinert werden. Für den Fall, dass dieses geschieht, soll in den Gleichungen (2) und (3) $x = v$ gemacht werden; dieselben geben dann:

$$W = -k\int^t T_0\,dt - (a+t)^2 \int_{v_0}^{v} dv \frac{\partial\frac{p}{a+t}}{\partial t}. \tag{7}$$

Hier soll $v_0 = \nu$ gesetzt werden, wo ν ein so grosses Volumen ist, dass für Werthe von v in der Nähe von ν der Dampf bei den vorkommenden Werthen von t sich schon wie ein vollkommnes Gas verhält, d. h. dem Mariotte'schen Gesetze folgt, den Ausdehnungscoëfficienten $\frac{1}{a}$ und eine constante spe-

cifische Wärme hat. Es ist dann T_0 die specifische Wärme bei constantem Volumen des Dampfes in dem bezeichneten Zustande der Verdünnung. Nennt man diese specifische Wärme γ, und π die Function von v und t, welche bei dem nicht im Maximum der Dichtigkeit befindlichen Dampfe den Druck darstellt, so ist also:

$$W = K - k\gamma t + (a+t)^2 \int_v^{\infty} dv \, \frac{\partial \frac{\pi}{a+t}}{\partial t} \quad , \tag{8}$$

wo K eine Constante bedeutet. Den Werth dieser Constanten lernt man kennen, wenn man bedenkt, dass der Ausdruck von W in der Gleichung (8), wenn man in ihm $v = \sigma$ setzt, gleich werden muss dem Ausdrucke von W in der Gleichung (6), wenn man hier $x = 1$ macht. Es ergiebt sich hieraus:

$$\left\{ \begin{array}{l} K = k\left(\gamma t - \int_0^t c\,dt\right) \\ \qquad - (a+t)^2 \left\{ (\sigma - s) \, \frac{d\frac{\pi_1}{a+t}}{dt} + \int_{\sigma}^{\infty} dv \, \frac{\partial \frac{\pi}{a+t}}{\partial t} \right\}, \end{array} \right. \tag{9}$$

wo t jeden beliebigen Werth haben kann.

Wenn v einen Werth hat, der gross genug ist, dass für ihn schon der Dampf sich wie ein vollkommenes Gas verhält, so ist:

$$\pi = \frac{R(a+t)}{v} \, ,$$

wo R eine Constante bedeutet; das nach v zu nehmende Integral in der Gleichung (8) verschwindet dann und es wird einfach:

$$W = K - k\gamma t \, . \tag{10}$$

Die Grösse K lässt sich hiernach, wenn man sich an die Gleichung (4) erinnert, definiren als die Wirkungsgrösse für den Uebergang der Masseneinheit Wasser von 0° in Dampf von derselben Temperatur und einer Verdünnung, bei der der Dampf sich schon wie ein vollkommnes Gas verhält.

Die Gleichung (9), welche den Werth von K angiebt, lässt sich noch auf eine andere Form bringen, welche eine interessante Folgerung erlaubt.

Regnault hat die Wärmemenge λ bestimmt, die der Masseneinheit Wasser zugeführt werden muss, um sie von 0^0 auf die Temperatur t zu bringen und bei dieser Temperatur in Dampf vom Maximum der Dichtigkeit zu verwandeln. Die bei diesem Processe geleistete äussere Arbeit ist

$$= \pi_1 (\sigma - s),$$

und daher die demselben entsprechende Wirkungsgrösse

$$= \pi_1 (\sigma - s) - k\lambda.$$

Dieselbe Wirkungsgrösse ist aber auch der Werth, welchen der Ausdruck von W in der Gleichung (6) für $x = 1$ annimmt, da ja die Wirkungsfunction für tropfbar flüssiges Wasser von $0^0 = 0$ gemacht ist. In Folge hiervon lässt sich die Gleichung (9) schreiben:

$$K = k(\gamma t - \lambda) + (\sigma - s)\pi_1 - (a + t)^2 \int_s^{\sigma} dv \frac{\partial \frac{\pi}{a+t}}{\partial t}.$$

Nun hat Clausius[1]) nachgewiesen, dass die Abweichungen vom Mariotte'schen Gesetz beim Wasserdampf im Maximum der Dichtigkeit bei Temperaturen in der Nähe von 0^0 nur unbedeutend sind; man kann daraus schliessen, dass bei diesen niedrigen Temperaturen der Wasserdampf bis zu seiner Condensation sich nahe wie ein vollkommnes Gas verhält und daher das in dem Ausdrucke von K vorkommende Integral sehr klein ist. Vernachlässigt man dasselbe und vernachlässigt man auch noch s gegen σ, so erhält man:

$$K = k(\gamma t - \lambda) + \sigma\pi_1.$$

Differenzirt man diese Gleichung nach t und berücksichtigt dabei, dass, wenn der Wasserdampf bis zu seiner Condensation sich wie ein vollkommnes Gas verhält:

$$\sigma\pi_1 = R(a + t)$$

ist, so ergiebt sich:

---

[1]) Pogg. Ann. Bd. 79, S. 516.

$$\gamma + \frac{R}{k} = \frac{d\lambda}{dt}.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung ist nach einem von Clausius bewiesenen Satze[1] nichts anderes als die specifische Wärme bei constantem Druck des hinreichend ausgedehnten Wasserdampfs. Diese specifische Wärme ist also der Werth, den $\frac{d\lambda}{dt}$ für niedere Temperaturen annimmt. Es bringt mit sich, dass dieser Differentialquotient für alle Temperaturen constant ist.

Nun ist nach Regnault:

$$\lambda = 606.5 + 0{,}305\,t,$$

also der betrachtete Differentialquotient nicht allein für niedere Temperaturen, sondern für alle constant und $= 0{,}305$. Dieser Zahlenwerth weicht aber erheblich ab von dem Werthe, den Regnault durch directe Versuche für die specifische Wärme des Wasserdampfes bei constantem Druck gefunden hat[2], nämlich dem Werthe 0,475. Dieser Mangel an Uebereinstimmung kann entweder darin liegen, dass der Wasserdampf, dessen specifische Wärme Regnault bestimmt hat, der Condensation zu nahe gewesen ist, als dass er dieselbe specifische Wärme besitzen hätte, wie der sehr ausgedehnte Dampf, oder darin, dass auch bei niederen Temperaturen der Dampf in der Nähe der Condensation sich merklich anders als ein vollkommnes Gas verhält[3]).

Für jedes vollkommne Gas wird die Wirkungsfunction sich in ähnlicher Weise ausdrücken lassen, wie es durch Gleichung (10) für den hinreichend verdünnten Wasserdampf geschehen ist. Es wird für ein anderes Gas:

$$W = -k\gamma' t + \text{Const.} \tag{11}$$

sein, wenn γ' die Wärmecapacität desselben bei constantem Volumen bedeutet.

[1] Pogg. Annal. Bd. 79, S. 393.

[2] Compt. rend. T. 36, p. 676 oder Pogg. Annal. Bd. 99, S. 494.

[3] Dass der Coefficient 0,305 die specifische Wärme des Wasserdampfes bei constantem Drucke sein müsste, wenn der Dampf ein vollkommenes Gas sich verhielte, ist schon von Rankine ausgesprochen. Pogg. Ann. Bd. 81, S. 176.

Absorption eines Gases in Wasser.

Es soll nun die Absorption eines vollkommnen Gases in Wasser unter den folgenden Voraussetzungen untersucht werden:

1) Der Druck, den ein Gemenge von Dampf und Gas ausübt, ist immer gleich der Summe der beiden Drucke, die bei derselben Temperatur und demselben Volumen ausgeübt werden würden, wenn nur der Dampf oder nur das Gas vorhanden wäre.

Ist durch Vergrösserung des Druckes ein Theil des Dampfes condensirt und von dem gebildeten Wasser ein Theil des Gases absorbirt, so ist:

2) Der Druck des Dampfes so gross, wie wenn das Gas nicht vorhanden wäre, und

3) die von der Masseneinheit Wasser absorbirte Gasmasse dem Druck des über der Flüssigkeit befindlichen Gases proportional.

Diese Annahmen wird man nach den Versuchen von Regnault[1]) über das Verhalten der Dämpfe im lufterfüllten Raume und den von Bunsen[2]) über die Absorption von Gasen ohne Bedenken als richtig gelten lassen bei Gasen, welche nur in geringem Maasse vom Wasser absorbirt werden. Ob die aus den genannten Annahmen zu ziehenden Resultate aber auch noch richtig sind bei Gasen, die in solcher Menge, wie Ammoniak oder schweflige Säure vom Wasser aufgenommen werden, möge vorläufig dahingestellt bleiben.

Ich denke mir ein Gemenge, das aus der Dampfmasse 1 und der Gasmasse g besteht, und suche für dieses die Wirkungsfunction.

Wenn der Druck eine gewisse Grösse nicht überschreitet, so ist kein Theil des Dampfes condensirt. Für diesen Fall mache ich in den Gleichungen (2) und (3) $x = v$; es entsteht dann die Gleichung (7). Die Grösse p in derselben besteht aus zwei Theilen, von denen der eine π ist, wenn dieses Zeichen

[1]) *Compt. rend. T.* 39, p. 345, in Pogg. Ann. Bd. 93, S. 552.

[2]) Bunsen, Gasometrische Methoden, Braunschweig 1857.

in der bei Gleichung (8) definirten Bedeutung gebraucht wird; der andere Theil, der Druck des Gases nämlich, ist

$$\frac{g R' (a + t)}{v},$$

wo R' eine von der Natur des Gases abhängige Constante bedeutet. Es ist also:

$$p = \pi + \frac{g R' (a + t)}{v}.$$

Der Werth von v_0 in der Gleichung (7) soll gleich ν gewählt werden, wo ν so gross ist, dass für Werthe von v in der Nähe von ν das Gemenge von Dampf und Gas bei den vorkommenden Temperaturen sich wie ein vollkommnes Gas verhält. T_0 bedeutet dann die Wärmecapacität des Gemenges bei constantem Volumen in dem bezeichneten Zustande der Verdünnung. Nennt man γ, wie früher, die specifische Wärme des Wasserdampfes und γ' die des Gases bei constantem Volumen, so ist daher:

$$T_0 = \gamma + g\gamma'.$$

Denkt man sich nämlich das Gemenge auf die Weise hergestellt, dass man einzeln Gas und Dampf unter den Druck bringt, den beide zusammen ausüben sollen, dass man dann beide in Berührung setzt und in einander diffundiren lässt, so wird bei dieser Diffusion, wenn sie bei constanter Temperatur vor sich geht, weder äussere Arbeit geleistet, noch Wärme abgegeben, und deshalb auch keine Aenderung der Wärmecapacität eintreten.

Man erhält hiernach, wenn man die in der Gleichung (7) vorkommende willkürliche Constante gleich 0 macht:

$$W = -k(\gamma + g\gamma')t + (a + t)^2 \int_v^\nu dv \frac{\partial \frac{\pi}{a + t}}{\partial t}. \tag{12}$$

Dieser Ausdruck gilt bei der Verkleinerung von v so lange, bis der Wasserdampf im Maximum der Dichtigkeit sich befindet, d. h. bis $v = \sigma$ ist, wenn dieses Zeichen in seiner früheren Bedeutung beibehalten wird. Wird das Volumen weiter verkleinert, so wird mehr und mehr Dampf condensirt und dabei

von dem gebildeten Wasser mehr und mehr Gas absorbirt, bis endlich aller Dampf Wasser geworden und gleichzeitig alles Gas von diesem aufgenommen ist. Um für diese Periode die Wirkungsfunction zu finden, soll in dem allgemeinen Ausdrucke derselben unter x die Gasmasse verstanden werden, welche von dem gebildeten Wasser absorbirt ist. Es handelt sich dann darum, p und v als Functionen von diesem x und t darzustellen. Es ist hierzu nöthig einige neue Zeichen einzuführen; der Bequemlichkeit wegen stelle ich mit den Definitionen dieser die Definitionen einiger schon gebrauchten Zeichen zusammen. Es soll bedeuten:

π_1 den Druck des Wasserdampfes beim Maximum der Dichtigkeit bei der Temperatur t,

p' den Druck des nicht absorbirten Gases,

v' das Volumen des Gemenges von Dampf und Gas,

v'' das Volumen der gebildeten Flüssigkeit,

σ das Volumen der Masseneinheit Dampf im Maximum der Dichtigkeit bei der Temperatur t,

$\frac{R'(a+t)}{p'}$ das Volumen der Masseneinheit des Gases bei der Temperatur t und dem Drucke p',

y die Masse des zu Wasser condensirten Dampfes,

s das Volumen der Masseneinheit Wasser, welche bei der Temperatur t mit Gas für den Druck p' gesättigt ist, bei der Temperatur t und dem Drucke p,

α endlich den Absorptionscoëfficienten[1]) des Wassers für das Gas bei der Temperatur t.

Man hat dann die Gleichungen:

$$\begin{aligned} p &= \pi_1 + p' \\ v &= v' + v'' \\ v' &= (1-y)\sigma \\ &= \frac{(q-x)R'(a+t)}{p'} \\ v'' &= ys \\ x &= \alpha y p'. \end{aligned}$$

[1]) Der Begriff des Absorptionscoëfficienten ist hier in etwas anderer Weise genommen als von Bunsen; in einer Weise, die aus der Gleichung, durch welche α eingeführt wird, deutlich hervorgeht.

Aus denselben findet man leicht:

$$p' = \frac{x}{\alpha} + \frac{(g-x)\,K\,(a+t)}{\sigma}$$

$$\frac{1}{y} = 1 + \frac{\alpha\,(g-x)\,K\,(a+t)}{x\,\sigma},$$

und weiter, wenn man der Kürze wegen

$$\alpha K\,(a+t) = \beta$$

setzt:

$$(13) \qquad \begin{cases} p = \pi_1 + K\,(a+t)\left(\frac{x}{\beta} + \frac{g-x}{\sigma}\right) \\ v = \sigma\,\frac{x\,s + (g-x)\,\beta}{x\,\sigma + (g-x)\,\beta}. \end{cases}$$

Die Grössen π_1, σ, β sind Functionen von t, die Grösse s ist strenge genommen nicht nur eine Function von t, sondern auch von x, sie hängt von p' und von p ab; näherungsweise wird man aber s als Constante betrachten und darunter das Volumen der Masseneinheit gasfreien Wassers bei irgend einer Temperatur verstehen können, da, wie sich zeigen wird, der Fehler schon ganz unerheblich ist, den man begeht, wenn man $s = 0$ setzt.

Wollte man die Werthe von p und v aus den Gleichungen (13) unmittelbar in die Gleichung (2) substituiren, so würde man eine sehr beschwerliche Rechnung zu überwinden haben. Es soll deshalb die letztgenannte Gleichung noch umgeformt werden.

Es seien p und v irgend welche gegebene Functionen von x und t; man eliminire x aus den beiden Gleichungen, welche p und v als Functionen von x und t angeben, und drücke durch v und t aus; die Function von v und t, die man auf diese Weise für p erhält, bezeichne man durch (p).

Die Gleichung

$$p = (p)$$

ist dann eine identische bei Rücksicht auf die Gleichung, welche v als Function von x und t ausdrückt. Es folgt daraus:

$$\partial \frac{p}{a+t} \over \partial x = \partial \frac{(p)}{a+t} \over \partial v \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \frac{p}{a+t}}{\partial t} = \frac{\partial \frac{(p)}{a+t}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \frac{(p)}{a+t}}{\partial t},$$

und daraus weiter:

$$\frac{\partial \frac{p}{a+t}}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \frac{p}{a+t}}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial \frac{(p)}{a+t}}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Da man nun ferner, wenn t constant ist, hat:

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx = dv,$$

so lässt sich die Gleichung (2) schreiben:

$$W = W_0 - (a+t)^2 \int_{v_0}^{v} dv \frac{\partial \frac{(p)}{a+t}}{\partial t},$$

wo bei der Integration wieder t als Constante zu betrachten ist, oder endlich:

$$W = W_0 - (a+t)^2 \left(\frac{p_0}{a+t}\frac{\partial v_0}{\partial t} - \frac{p}{a+t}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\int_{v_0}^{v} \frac{(p)}{a+t}dv \right).$$

Aus den Gleichungen (13) findet man nun:

$$\frac{(p)}{a+t} = \frac{\pi_1}{a+t} + gR'\frac{\sigma - s}{v(\sigma-\beta)+\sigma(\beta-s)};$$

substituirt man diesen Werth in den eben abgeleiteten Ausdruck von W, so hat die Ausführung des in demselben vorkommenden Integrals nicht die geringste Schwierigkeit.

Es soll nur der Werth entwickelt werden, den W hat, wenn $x = g$ ist, d. h. in dem Augenblick, in dem aller Dampf condensirt und alles Gas absorbirt ist; dieser Werth von W möge durch W_1 bezeichnet werden. Die Grösse x_0 soll $= 0$ gewählt werden; dann ist nach den Gleichungen (13):

$$v_0 = \sigma$$

$$\frac{p_0}{a+t} = \frac{\pi_1}{a+t} + \frac{gR'}{\sigma};$$

für $x = g$ ist ferner $v = s$; da endlich aus dem für $\frac{(p)}{a+t}$ gefundenen Ausdrucke folgt:

$$\int_{\varepsilon}^{\sigma} \frac{(p)}{a+t}\,dv = -\frac{\pi_1}{a+t}(\sigma - s) - gR\,\frac{\sigma - s}{\sigma - \beta}\lg\frac{\sigma}{\beta},$$

so ergiebt sich:

$$W_1 - W_0 = -(a+t)^2\left[\left(\frac{\pi_1}{a+t} + \frac{gR}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi_1}{a+t}(\sigma - s) + gR\,\frac{\sigma - s}{\sigma - \beta}\lg\frac{\sigma}{\beta}\right)\right].$$

Bei der für x_0 getroffenen Wahl muss aber W_0 gleich sein dem Werthe, den W in der Gleichung (12) für $v = \sigma$ annimmt; d. h. es muss sein:

$$W_0 = -k(\gamma + g\gamma')t + (a+t)^2\int_{\sigma}^{\varepsilon} dv\,\frac{\partial\frac{\pi}{a+t}}{\partial t}.$$

Addirt man diese zwei Gleichungen und die Gleichung (9) zu einander, so erhält man:

$$W_1 = -K - k\left(g\gamma' t + \int_0^t c\,dt\right) + gR\,(a+t)^2\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma - s}{\sigma - \beta}\lg\frac{\sigma}{\beta} - \lg\sigma\right).$$

Der letzte Term dieses Ausdrucks lässt sich noch auf eine wesentlich einfachere Gestalt bringen. Zunächst nämlich ist s so klein gegen σ, dass es dagegen vernachlässigt werden kann. Aber auch β ist sehr klein gegen σ. Bezeichnet man die von Bunsen mit dem Namen des Absorptionscoëfficienten belegte Grösse durch b, so ist, wenn man als Einheit des Volumens das Volumen der Masseneinheit Wasser annimmt:

$$\beta = b\left(1 + \frac{1}{a}t\right).$$

Es ist daher nach Bunsen's Angabe für Ammoniak bei der Temperatur von 0^0 C. $\beta = 1049{,}6$. Für dieselbe Temperatur findet man $\sigma = 205550$, wenn man mit Clausius die Dichtigkeit des gesättigten Wasserdampfes bei 0^0 C. = 0,622 mal der Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bei derselben Temperatur und demselben Drucke annimmt. Also selbst beim

Ammoniak ist β ein so kleiner Bruchtheil von σ, dass man nur einen kleinen Fehler begehen wird, wenn man β als unendlich klein gegen σ betrachtet; der Fehler wird ganz unmerklich sein bei den Gasen, die in viel geringerem Grade als Ammoniak von dem Wasser absorbirt werden. Nimmt man aber s und β in dem Ausdrucke von W_1 als unendlich klein gegen σ an, so erhält man:

$$(14) \quad W_1 = -K - k\left(g\gamma' t + \int_0^t c\,dt\right) - gR'(a+t)^2 \frac{d\lg\beta}{dt}.$$

Aus dieser Gleichung kann man zunächst die Aenderung der Wärmecapacität berechnen, die durch die Absorption bewirkt wird. Aus der Bedeutung von W_1 geht nämlich hervor, dass diese Grösse identisch ist mit dem Ausdrucke von W in der Gleichung (5), wenn man in dieser unter c' die Wärmecapacität der Masseneinheit Wasser, die die Gasmasse g absorbirt hat, versteht. Durch Differentiation erhält man daher:

$$(15) \quad c' = c + g\gamma' + g\frac{R'}{k}\frac{d}{dt}\left((a+t)^2\frac{d\lg\beta}{dt}\right).$$

Weiter kann man mit Hülfe der Gleichung (14) die Wärmemenge finden, die die Masseneinheit Wasser abgiebt, wenn man sie bei constant gehaltener Temperatur die Gasmasse g absorbiren lässt.

Man denke sich den folgenden Versuch angestellt. Die Gasmasse wird mit dem Wasser in Berührung gebracht; der Druck p und die Temperatur t werden constant erhalten, indem man das Volumen sich in dem Maasse verkleinern lässt, als das Gas von dem Wasser aufgenommen wird, und die durch die Absorption frei werdende Wärme ableitet. Es sei Q die Wärmemenge, welche abgeleitet ist, wenn die ganze Gasmasse g verschluckt ist.

Die bei dem beschriebenen Processe geleistete äussere Arbeit ist gleich dem negativen Producte aus dem Drucke p in das ursprüngliche Volumen des Gases, d. h.:

$$= -gR'(a+t);$$

die dem Processe entsprechende Wirkungsgrösse ist also:

$$= kQ - gK(a+t).$$

Nun kann die Absorption aber auch auf dem folgenden Wege bewirkt werden.

1) Die Wassermasse wird bei gleichbleibender Temperatur in Dampf verwandelt, dessen Dichtigkeit so gering ist, dass er sich wie ein vollkommnes Gas verhält.

2) Das Gas wird bei ebenfalls gleichbleibender Temperatur unter denselben Druck versetzt, unter dem der Wasserdampf sich befindet.

3) Man bringt Dampf und Gas mit einander in Berührung und lässt sie in einander diffundiren.

4) Man drückt das Gemenge von Dampf und Gas bei gleichbleibender Temperatur zusammen, bis aller Dampf condensirt und alles Gas absorbirt ist.

Die Wirkungsgrösse für den ersten Theil der Operation ist nach den Gleichungen (4) und (10):

$$= k\int_0^t c\,dt + K - k\gamma t,$$

für den zweiten ist sie nach Gleichung (11) gleich 0, für den dritten ist sie ebenfalls gleich 0, für den vierten endlich nach den Gleichungen (12) und (14)

$$= k\left(\gamma t - \int_0^t c\,at\right) - K - gK(a+t)^2\frac{d\lg\beta}{dt}.$$

Die Wirkungsgrösse für die ganze Operation ist also:

$$= -gK(a+t)^2\frac{d\lg\beta}{dt}.$$

Da nun die Wirkungsgrösse für die Ueberführung eines Körpers aus einem Zustande in einen anderen von dem Wege, auf dem die Ueberführung geschieht, unabhängig ist, so folgt hieraus:

$$Q = -g\frac{K}{k}(a+t)^2\frac{d\lg\frac{\beta}{a+t}}{dt},$$

oder, wenn man wieder die von Bunsen mit dem Namen des Absorptionscoëfficienten belegte Grösse b einführt:

$$(16) \qquad Q = -g\frac{R'}{k}(a+t)^2\frac{d\lg b^{1})}{dt}\,.$$

Es liegen die nöthigen experimentellen Data vor, um die Gültigkeit dieser Gleichung für die Absorption von Ammoniak und von schwefliger Säure zu prüfen. Favre und Silbermann haben die Wärmemengen gemessen, die bei der Absorption der Masseneinheit dieser Gase in Wasser frei werden und Bunsen hat die Absorptionscoëfficienten derselben bestimmt. Nach Favre und Silbermann ist für die Masseneinheit Ammoniak:

$$Q = 514{,}3,$$

und für die Masseneinheit schwefliger Säure:

$$Q = 120{,}4;$$

die Temperaturen, für welche diese Zahlen gelten, sind nicht angegeben[2]).

Nach Bunsen ist für Ammoniak:

$$b = 1049{,}63 - 29{,}496\,t + 0{,}67687\,t^2 - 0{,}0095621\,t^3,$$

und für schweflige Säure:

$$b = 79{,}789 - 2{,}6077\,t + 0{,}2935\,t^{2\,3}).$$

Nimmt man das mechanische Aequivalent der Wärmeeinheit gleich der Arbeit an, die es erfordert die Masseneinheit der Schwere entgegen auf die Höhe von $423^m{,}5$ zu heben, und bezeichnet man die Dichtigkeit des Gases im Vergleich mit der der atmosphärischen Luft durch δ, so ist ferner:

$$\frac{R'}{k} = 0{,}0691\,\frac{1}{\delta}\,.$$

---

1) Zu den Gleichungen (15) und (16) gelangt man auch durch eine der durchgeführten ganz ähnliche und viel einfachere Betrachtung, wenn man davon absieht, dass ein Gasquantum, welches mit Wasser in Berührung gebracht wird, Wasserdampf aufnimmt.

2) *Recherches sur les quantités de chaleur dégagées dans les actions chimiques et moléculaires; Paris,* 1853, p. 145.

3) In dem oben citirten Werke von Bunsen, aus dem diese Formel genommen ist, ist unter den Tabellen, die das Ende desselben bilden, statt der nach dieser Formel berechneten Tafel durch ein Versehen eine andere abgedruckt.

Für Ammoniak ist $\delta = 0{,}58957$,
für schweflige Säure $= 2{,}21122$.
Endlich hat man $a = 273$.

Setzt man diese Zahlenwerthe in die Gleichung (16) ein, so findet man für die Masseneinheit Ammoniak

bei 0^0 C. $Q = 245$
bei 20^0 C. $Q = 214$

und für die Masseneinheit schwefliger Säure:

bei 0^0 C. $Q = 76{,}1$,
bei 20^0 C. $Q = 97{,}7$.

Aus den grossen Unterschieden dieser und der von Favre und Silbermann gefundenen Zahlen muss man schliessen, dass beim Ammoniak und der schwefligen Säure die Voraussetzungen, auf welchen die hier entwickelte Theorie beruht, und welche im Eingange dieses Abschnitts zusammengestellt sind, nicht erfüllt werden.

Leicht lässt sich aus der Gleichung (16) die Wärmemenge berechnen, die bei der Sättigung des Wassers mit Gas frei wird; soll nämlich die Gasmasse g die Masseneinheit bei dem Drucke p sättigen, so muss:

$$g = p\alpha$$

oder

$$= \frac{pb}{R'a}$$

sein, woraus folgt:

$$Q = -\frac{pa}{k}\left(1 + \frac{1}{a}t\right)^2 \frac{db}{dt}.$$

Nimmt man als Einheit des Druckes den Druck einer Atmosphäre an, so wird diese Gleichung:

$$Q = -6{,}659\, p \left(1 + \frac{1}{a}t\right)^2 \frac{db}{dt}.$$

Für Kohlensäure ist nach Bunsen:

$$b = 1{,}7967 - 0{,}07761\, t + 0{,}0016424\, t^2;$$

hieraus folgt die Wärmemenge, welche frei wird, wenn die Masseneinheit Wasser bei der Temperatur 0^0 C, mit Kohlensäure für den Druck von einer Atmosphäre gesättigt wird,

gleich 0,517, Sieht man von der sehr unbedeutenden Aenderung der Wärmecapacität ab, welche in Folge der Absorption eintritt, so kann man auch schliessen, dass die Temperatur-Erhöhung, welche das Wasser unter den angegebenen Umständen erfährt, gleich 0^0,517 C. ist.

Auflösung eines Salzes in Wasser.

Aehnliche Betrachtungen, wie über die Absorption eines Gases lassen sich über die Auflösung eines Salzes in Wasser anstellen und führen zu Ausdrücken für die Wärmecapacität der Lösung und die Wärmemenge, die bei der Bildung der Lösung frei wird.

Ich denke mir die Salzmasse 1 in Berührung mit der Masse m von Wasserdampf unter einem Drucke, der kleiner ist als der Druck des Dampfes im Maximum der Dichtigkeit über einer gesättigten Lösung des Salzes; es soll die Wirkungsfunction für diesen Körper und für die verschiedenen Zustände, welche durch Vergrösserung des Druckes herbeigeführt werden können, aufgesucht werden.

Es bezeichne μ_1 den Druck des Wasserdampfes im Maximum der Dichtigkeit über einer gesättigten Lösung des Salzes bei der Temperatur t; dann wird, so lange der Druck p kleiner als μ_1 ist, von dem Salze nichts aufgelöst, und es ist nach den Gleichungen (5) und (10):

$$W = -k\left(m\gamma t + \int_0^t c'\,dt\right), \tag{17}$$

wo γ, wie früher, die specifische Wärme des Wasserdampfs bei constantem Volumen, c' die specifische Wärme des festen Salzes bedeutet; und wo über die willkürliche Constante, welche der Ausdruck von W im Allgemeinen enthält, verfügt ist. Es liegt dem angegebenen Ausdrucke die Voraussetzung zu Grunde, dass der Wasserdampf über dem Salze stets eine so geringe Dichtigkeit besitzt, dass er sich wie ein vollkommnes Gas verhält; eine Voraussetzung, die um so genauer erfüllt sein wird, je grösser die Kraft ist, mit der das Salz den Wasserdampf an sich zieht.

Ist $p = \mu_1$ geworden, so fängt der Dampf an sich zu con-

densiren; es bildet sich Wasser und dieses löst einen Theil des Salzes auf. Durch unendlich kleine Aenderungen des Druckes kann man die Masse des übrig gebliebenen Dampfes verkleinern oder vergrössern. Versteht man in den Gleichungen (2) und (3) unter x die Masse des condensirten Dampfes und setzt $x_0 = 0$, so erhält man durch Betrachtungen, die denen genau entsprechen, durch welche die Gleichung (6) abgeleitet ist:

$$W = -k\left(m\gamma t + \int_0^t c'\,dt\right) - (a+t)^2(v-v_0)\frac{d\frac{\mu_1}{a+t}}{dt}.$$

Mit demselben Rechte, mit dem angenommen ist, dass der Dampf bis zum Ende der vorigen Periode sich wie ein vollkommnes Gas verhält, kann derselbe auch während der jetzigen als vollkommnes Gas betrachtet werden; hieraus folgt, wenn man das Zeichen R in seiner früheren Bedeutung gebraucht, und wenn man absieht von der sehr kleinen Volumenänderung, welche das Salz bei seiner Auflösung erleidet:

$$v_0 - v = \frac{xR(a+t)}{\mu_1}.$$

Hiernach wird:

$$(18)\qquad W = -k\left(m\gamma t + \int_0^t c'\,dt\right) + xR(a+t)^2\frac{d\lg\frac{\mu_1}{a+t}}{dt}.$$

Diese Gleichung gilt so lange, bis alles Salz aufgelöst ist, falls die Wassermasse m grösser ist, als diejenige, die erfordert wird, die Salzmasse 1 aufzulösen; ist sie kleiner, so gilt die Gleichung, bis aller Dampf condensirt, d. h. $x = m$ geworden ist.

Es soll zuerst der zweite von den beiden unterschiedenen Fällen weiter betrachtet werden. Bezeichnet man durch W_1 die Wirkungsfunction für den Zustand, bei dem aller Dampf verschwunden ist, so ist für diesen Fall:

$$(19)\qquad W_1 = -k\left(m\gamma t + \int_0^t c'\,dt\right) + mR(a+t)^2\frac{d\lg\frac{\mu_1}{a+t}}{dt}.$$

Bedeutet C die Wärmecapacität des auf die beschriebene Weise gebildeten, zum Theil aus festem Salz, zum Theil aus gesättigter

Lösung bestehenden Körpers, so ist aber auch nach der Gleichung (5):

$$W_1 = -k\int_0^t C\,dt;$$

daraus folgt:

$$C = c' + m\gamma - m\frac{R}{k}\frac{d}{dt}\left((a+t)^2\frac{d\lg\frac{\mu_1}{a+t}}{dt}\right). \tag{20}$$

Die hierdurch bestimmte Grösse C, die ich die Wärmecapacität des bezeichneten Körpers genannt habe, ist die Wärmemenge, die demselben zugeführt werden muss, um ihn um 1^0 zu erwärmen; bei dieser Erwärmung wird entweder ein Theil des festen Salzes aufgelöst oder ein Theil des gelösten ausgeschieden, und in Folge dessen in dem Körper selbst Wärme erregt oder verbraucht werden; die so erregte oder verbrauchte Wärmemenge wird einen wesentlichen Theil von C ausmachen.

Die Gleichung (19) erlaubt ferner die Wärmemenge zu berechnen, die frei wird, wenn die Wassermasse m so viel von dem Salze auflöst, als sie aufzulösen vermag.

Wan denke sich, dass die Wassermasse m auf das Salz geschüttet und die Temperatur t constant erhalten werde, indem man die bei der Auflösung frei werdende Wärme ableitet. Es sei Q die Wärmemenge, die abgeleitet ist, wenn das Wasser sich mit Salz gesättigt hat. Die Wirkungsgrösse für diesen Process ist dann, da man von der eintretenden geringen Volumenänderung absehen kann,

$$= kQ.$$

Die Auflösung kann man nun aber auch auf dem folgenden Wege bewirken:

1) Man verwandelt das Wasser bei gleichbleibender Temperatur in Dampf, dessen Druck kleiner ist, als μ_1.

2) Man drückt, nachdem man den Dampf mit dem Salz in Berührung gebracht hat, denselben bei ebenfalls gleichbleibender Temperatur zusammen, bis er ganz condensirt und in die Salzlösung übergegangen ist.

Die Wirkungsgrösse für den ersten Theil der Opera... ist nach den Gleichungen (4) und (10):

$$= m\left(k\int_0^t c\,dt + K - k\gamma t\right),$$

und für den zweiten nach den Gleichungen (17) und (19)

$$= mR(a+t)^2 \cdot \frac{d\lg\frac{\mu_1}{a+t}}{dt}.$$

Aus dem Satze, dass die Wirkungsgrösse für die Ueberführ... eines Körpers aus einem Zustande in einen andern von ... Wege der Ueberführung unabhängig ist, folgt also:

$$(21) \qquad Q = m\left(\int_0^t c\,dt - \gamma t + \frac{K}{k} + \frac{R}{k}(a+t)^2 \cdot \frac{d\lg\frac{\mu_1}{a+t}}{dt}\right).$$

Eine viel einfachere Gestalt erhält der Ausdruck von ... wenn man die Annahme einführt, dass der mit reinem Wa... in Berührung befindliche Wasserdampf bis zu seiner Con... sation sich wie ein vollkommenes Gas verhält — eine Annah... die, wie schon oben bemerkt, wenigstens bei Temperaturen ... der Nähe von 0° sich nicht weit von der Wahrheit entfer... wird. Bei dieser Annahme giebt die Gleichung (9), wenn ... in derselben s gegen σ vernachlässigt:

$$(22) \qquad K = k\left(\gamma t - \int_0^t c\,dt\right) - (a+t)^2 R \cdot \frac{d\lg\frac{\pi_1}{a+t}}{dt},$$

woraus folgt:

$$(23) \qquad Q = m\frac{R}{k}(a+t)^2 \cdot \frac{d\lg\frac{\mu_1}{\pi_1}}{dt}.$$

Mit Hülfe der Gleichung (22) lässt sich auch die Gleich... (20) auf eine andere Gestalt bringen. Multiplizirt man n... lich die erstere mit $\frac{m}{k}$, differenzirt sie nach t und addirt ... zur letzteren, so erhält man:

$$C = c' + cm - m\frac{R}{k}\frac{d}{dt}\left((a+t)^2 \cdot \frac{d\lg\frac{\pi_1}{\mu_1}}{dt}\right).$$

Bekanntlich wird bei der Lösung einiger Salze Wärme frei, bei der anderer Wärme verschluckt; nach der Gleichung (23) findet das Erste statt, wenn bei wachsender Temperatur das Verhältniss $\frac{\mu_1}{\pi_1}$ wächst, das zweite im entgegengesetzten Falle.

Wenn die Wassermasse m grösser ist als diejenige, die zur Lösung der Salzmasse 1 gebraucht wird, so gilt die Gleichung (18) nicht bis $x = m$, sondern nur bis $x = \alpha$ geworden ist, wenn α die Wassermasse bedeutet, die bei der Temperatur t zur Lösung der Salzmasse 1 erforderlich ist. Ueberschreitet x den Werth α, so hört der Druck p auf eine reine Function von t zu sein, er hängt dann von x und von t ab. Die Function dieser beiden Variabeln, welche den Druck darstellt, möge durch μ bezeichnet werden. Wenn die Wassermasse nicht zu gross ist, so wird die Dichtigkeit des Dampfes über der Salzlösung immer klein genug bleiben, dass derselbe als vollkommenes Gas betrachtet werden kann. Bezeichnet man durch f das Volumen der Lösung, so ist dann also:

$$v = f + \frac{(m-x)\,R\,(a+t)}{\mu}.$$

In dieser Gleichung wird man ohne merklichen Fehler f als constant ansehen dürfen; thut man das, so folgt aus derselben:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = R(m-x)\frac{\partial \frac{a+t}{\mu}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = R(m-x)\frac{\partial \frac{a+t}{\mu}}{\partial x} - \frac{R(a+t)}{\mu},$$

und weiter:

$$\frac{\partial \frac{p}{a+t}}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \frac{p}{a+t}}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x} = R\frac{\partial \lg \frac{\mu}{a+t}}{\partial t}.$$

Aus der Gleichung (2) ergiebt sich hiernach:

$$W = W_0 + R(a+t)^2 \int_{x_0}^{x} dx \frac{\partial \lg \frac{\mu}{a+t}}{dt}.$$

Macht man nun $x_0 = \alpha$, so wird W_0 gleich dem Werthe, den der Ausdruck von W in der Gleichung (18) für $x = \alpha$ annimmt.

Bezeichnet man wiederum den Werth, den W für $x = m$ erhält, durch W_1, so ist also:

$$W_1 = -k\left(m\gamma t + \int_0^t c'\,dt\right) + R(a+t)^2\left[\alpha\frac{\partial \lg \frac{\mu_1}{a+t}}{dt} + \int_\alpha^m dx \frac{\partial \lg \frac{\mu}{a+t}}{\partial x}\right].$$

Es ist μ nur für Werthe von x definirt worden, welche grösser als α sind; definirt man μ für Werthe von x, welche kleiner als α sind, als gleich μ_1, so lässt sich diese Gleichung etwas einfacher schreiben:

$$W_1 = -k\left(m\gamma t + \int_0^t c'dt\right) + R(a+t)^2\frac{\partial}{\partial t}\int_0^m dx \lg \frac{\mu}{a+t}.$$

Aus derselben kann man die Wärmecapacität der aus der Salzmasse 1 und der Wassermasse m gebildeten Salzlösung und die Wärmemenge berechnen, die bei der Herstellung dieser Lösung frei wird. Ist C jene Wärmecapacität und Q diese Wärmemenge, so ergiebt sich durch eine Betrachtung, die derjenigen ganz gleich ist, durch welche die Gleichungen (20) und (21) abgeleitet sind:

$$C = c' + m\gamma - \frac{R}{k}\frac{\partial}{\partial t}\left((a+t)^2\frac{\partial}{\partial t}\int_0^m dx \lg \frac{\mu}{a+t}\right),$$

$$Q = m\left(\int_0^t c\,dt - \gamma t + \frac{K}{k}\right) + \frac{R}{k}(a+t)^2\frac{\partial}{\partial t}\int_0^m dx \lg \frac{\mu}{a+t}.$$

Führt man wieder die Voraussetzung ein, dass der mit reinem Wasser in Berührung befindliche Wasserdampf bis zu seiner Condensation sich wie ein vollkommnes Gas verhält, so erhält man die näherungsweise richtigen Gleichungen:

$$C = c' + mc - \frac{R}{k}\frac{\partial}{\partial t}\left((a+t)^2\frac{\partial}{\partial t}\int_0^m dx \lg\frac{\mu}{\pi_1}\right),$$

$$Q = \frac{R}{k}(a+t)^2\frac{\partial}{\partial t}\int_0^m dx \lg\frac{\mu}{\pi_1}.$$

Die zweite von diesen Gleichungen lässt eine Vergleichung der Theorie mit einem von Babo experimentell gefundenen Satze zu.

Die Erfahrung lehrt, dass, wenn man zu einer Salzlösung, die bis zu einem gewissen Grade verdünnt ist, noch mehr Wasser zusetzt, keine merkliche Wärmeentwickelung stattfindet; ist diese Verdünnung erreicht, so muss nach dem Ausdrucke von Q

$$\frac{\partial \lg\frac{\mu}{\pi_1}}{\partial t} = 0,$$

also $\frac{\mu}{\pi_1}$ (das Verhältniss der Spannkraft des Wasserdampfes über der Lösung und seiner Spannkraft über reinem Wasser bei derselben Temperatur) unabhängig von t sein.

Babo[1]) hat den Satz, dass das genannte Verhältniss bei den verschiedensten Temperaturen nahezu den gleichen Werth behält, allgemein ausgesprochen. Die Versuche, aus denen er denselben geschlossen hat, sind aber meistens mit verdünnten Lösungen angestellt, und daher musste ihm die Beschränkung entgehen, unter denen der Satz hier als richtig gefunden ist, die Bedingung nämlich, dass die Lösung so verdünnt ist, dass durch Zusatz von Wasser zu ihr keine Temperaturänderung bewirkt wird. Findet bei einem solchen Zusatze eine Temperaturerhöhung statt, so wächst jenes Verhältniss bei wachsender Temperatur, es nimmt ab, wenn eine Temperaturerniedrigung sich zeigt.

Es sei mir gestattet, hier die folgende Bemerkung anzuschliessen. Man hat bei den Versuchen über die bei chemi-

[1]) Berichte über die Verhandlungen der Gesellschaft für Beförderung der Naturwissenschaften zu Freiburg i. B.; Januar 1857, S. 282.

schen Processen frei werdenden Wärmemengen gewöhnlich nicht auf die Temperatur Rücksicht genommen, bei welcher man die Processe einleitet; und doch folgt aus dem ersten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie mit Nothwendigkeit, dass jene Wärmemengen mit dieser Temperatur variiren, falls durch die Processe die Wärmecapacität geändert wird, was, wenn nicht immer, doch zweifellos der Regel nach stattfindet. Es soll das noch an einem einfachen Beispiele näher dargelegt werden.

Gesetzt man habe die Masseneinheit Knallgas von der Temperatur t in einem fest begrenzten Raume, und lasse dieses, etwa durch einen elektrischen Funken, explodiren; die Wärmemenge, welche man dem gebildeten Wasserdampf entziehen muss, um die Temperatur wieder auf die ursprüngliche zu reduciren, sei Q.

Die Wärmemenge, welche man bei einem gleichen Versuche erhält, bei dem nur t_1 die Temperatur des Knallgases vor der Explosion ist, und bei dem man den Wasserdampf bis zur Temperatur t_1 abkühlt, sei Q_1. Der Einfachheit wegen möge vorausgesetzt werden, dass das Volumen des Knallgases so gross gewählt ist, dass der Wasserdampf bei ihm und bei den Temperaturen, in die er versetzt wird, sich wie ein vollkommenes Gas verhält. Es wird sich dann leicht nachweisen lassen, dass Q und Q_1 verschieden von einander sein müssen.

Die Wirkungsgrösse für die Ueberführung des Knallgases von der Temperatur t in Wasserdampf von derselben Tempetur und demselben Volumen, die bei dem ersten der beiden gedachten Versuchen stattfindet, ist

$$= k\,Q,$$

da äussere Arbeit bei derselben nicht geleistet wird.

Dieselbe Ueberführung denke man sich nun auf dem folgenden Wege bewirkt:

1) Man bringt das Knallgas auf die Temperatur t_1.

2) Man lässt das Knallgas explodiren und entzieht dem gebildeten Wasserdampf Wärme, bis seine Temperatur wieder t_1 geworden ist.

3) Man bringt den Wasserdampf auf die Temperatur t.

Bezeichnet γ' die specifische Wärme des Knallgases, γ

die des Wasserdampfes bei constantem Volumen, so ist, da bei keinem der Theile der beschriebenen Operation eine Volumenänderung statt gefunden hat, die Wirkungsgrösse

$$\begin{aligned} \text{für den ersten Theil} &= -k\gamma'(t_1 - t), \\ \text{für den zweiten} &= k\,Q_1, \\ \text{für den dritten} &= k\gamma(t_1 - t). \end{aligned}$$

Nach dem ersten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie muss die Summe dieser drei Grössen gleich $k\,Q$ sein, d. h.

$$Q_1 = Q + (\gamma' - \gamma)(t_1 - t).$$

Da nun γ' nicht gleich γ ist, so ist auch Q_1 nicht gleich Q.

Eine ähnliche Betrachtung lässt sich offenbar für einen jeden chemischen Process anstellen, bei dem keine oder eine zu vernachlässigende äussere Arbeit geleistet wird und durch den die specifische Wärme sich ändert. Bei einem jeden solchen Processe ist also die frei werdende Wärmemenge d. h. die Wärmemenge, die während oder nach dem Processe abgeleitet werden muss, um die ursprüngliche Temperatur herzustellen, von dieser Temperatur abhängig. Gerade diese frei werdende Wärmemenge — nicht etwa die erzeugte — ist es aber, welche bei Versuchen, wie sie angestellt sind über die Wärmeerregung bei chemischen Processen, gemessen wird.

Bei dem als Beispiel gewählten Falle sind allerdings die Unterschiede der Wärmemengen, welche bei verschiedenen Temperaturen frei werden, verhältnissmässig sehr klein; man wird indessen nicht voraussetzen dürfen, dass das immer stattfindet.

Um für jenen Fall die Unterschiede zu berechnen, dienen folgende Angaben: Die specifische Wärme des Knallgases bei constantem Druck ist 0,5722; hieraus findet man mit Hülfe des schon oben benutzten Clausius'schen Satzes und des oben angeführten mechanischen Aequivalents der Wärmeeinheit γ' (d. h. die specifische Wärme des Knallgases bei constantem Volumen) gleich 0,4056. Nimmt man die specifische Wärme des Wasserdampfes bei constantem Drucke gleich 0,475 an, wie sie Regnault gefunden hat, so ergiebt sich auf dieselbe Weise γ (d. h. die specifische Wärme des Wasserdampfes bei

constantem Volumen) gleich 0,3639; nimmt man aber die ... cifische Wärme des Wasserdampfes bei constantem Dr... gleich 0,305 an, wie sie hier oben gefunden ist, so ... $\gamma = 0{,}194$. Nach der ersten dieser beiden Annahmen ist da...

$$Q_1 = Q + 0{,}0417\,(t_1 - t),$$

und nach der zweiten:

$$Q_1 = + 0{,}212\,(t_1 - t).$$

Dieses Resultat lässt sich noch auf eine andere Weise a... sprechen. Es sei τ die Temperaturerhöhung, die durch ... Explosion des Knallgases bewirkt wird, wenn die Temp... desselben vor der Explosion t ist; τ_1 sei die entsprech... Temperaturerhöhung für den Fall, dass t_1 die Temperatur Knallgases von der Verbrennung ist. Dann hat man:

$$\tau = \frac{Q}{\gamma},\ \tau_1 = \frac{Q_1}{\gamma},$$

und daher:

$$\tau_1 = \tau + \left(\frac{\gamma'}{\gamma} - 1\right)(t_1 - t).$$

Je nach der einen oder der anderen Annahme über die ... fische Wärme des Wasserdampfes ist also:

$$\tau_1 = \tau + 0{,}115\,(t_1 - t)$$

oder

$$\tau_1 = \tau + 1{,}091\,(t_1 - t).$$

Wäre die zweite Annahme die richtige, so müsste hier... die Temperatur des Wasserdampfes nach der Verbrennung d... eine Temperaturerhöhung des Knallgases um mehr als das ... pelte dieser Temperaturerhöhung vergrössert werden.

Bemerkung über die Spannung des Wasserdampfes bei Temperaturen, die dem Eispunkte nahe sind. [1])

Regnault [2]) ist bei seinen Versuchen über die Spann... des Wasserdampfes bei verschiedenen Temperaturen zu ... Resultate gekommen, dass die Curve, welche die Spann...

[1]) Pogg. Ann. Bd. 103. 1858.

[2]) *Compt. rend.* T. 39, p. 406, und Pogg. Ann. Bd. 93. S. 575.

des Dampfes von Eis für Temperaturen unterhalb 0^0 darstellt, eine vollständige Continuität mit derjenigen darbietet, welche die Spannung des Dampfes von Wasser für Temperaturen über 0^0 liefert. Es ist dieses Resultat mit der mechanischen Theorie der Wärme in so fern im Einklange, als nach dieser ein Zusammentreffen der beiden bezeichneten Curven in einem Punkte stattfinden kann; die Theorie fordert aber dann, dass die Tangenten der Curven in diesem Punkte verschieden von einander sind, mit anderen Worten, dass der Differentialquotient der Spannung des Dampfes nach der Temperatur bei 0^0 einen Sprung erleidet.

Um dieses zu zeigen, soll die Wirkungsfunction für die Masseneinheit Wasser in einigen verschiedenen Zuständen betrachtet werden. Es soll diese für den Fall, dass die ganze Wassermasse tropfbar flüssig ist und die Temperatur 0^0 hat, gleich 0 gesetzt werden; für den Fall, dass die ganze Wassermasse in gesättigten Dampf von derselben Temperatur verwandelt ist, ist sie dann nach der Gleichung (6) meiner Abhandlung „Ueber einen Satz der mechanischen Wärmetheorie etc.", wenn man das Volumen der Masseneinheit Wasser gegen das Volumen der Gewichtseinheit Dampf vernachlässigt:

$$(1) \qquad -a^2\sigma\frac{d\frac{\pi_1}{a+t}}{dt},$$

wo alle Zeichen dieselbe Bedeutung, wie am angeführten Orte haben, und wo nach Ausführung der Differentiation $t = 0$ zu setzen ist. Bedeutet l die latente Wärme des Wassers, so ist die Wirkungsgrösse für den Uebergang der Masseneinheit flüssigen Wassers von der Temperatur 0^0 in Eis von derselben Temperatur gleich kl; daraus folgt die Wirkungsfunction für die Masseneinheit Wasser, die in Eis von 0^0 verwandelt ist,

$$= kl.$$

Denkt man sich nun die Eismasse in gesättigten Dampf von derselben Temperatur übergeführt, so ergiebt sich hieraus durch Betrachtungen, die denen ganz gleich sind, durch welche der Ausdruck (1) abgeleitet ist, wenn man durch μ_1 die Spannung des Dampfes bezeichnet, der sich über Eis von der Temperatur t bildet, und wenn man das Volumen der Masseneinheit

Eis gegen das der Masseneinheit des Dampfes vernachlässigt, die Wirkungsfunktion für die Masseneinheit des gesättigten Dampfes, der sich über Eis bei der Temperatur von 0° bildet,

$$= kl - a^2\sigma \frac{d\frac{\mu_1}{a+t}}{dt}, \tag{2}$$

wo nach Ausführung der Differentiation wieder $t=0$ zu setzen ist. Bei der Aufstellung dieses Ausdruckes ist schon von der Annahme Gebrauch gemacht, das für $t=0$ $\mu_1 = \pi$ ist, und dass die Dämpfe, die sich über Eis von 0° und über flüssigem Wasser von 0° bilden, überhaupt identisch sind; es sind nämlich die Volumina der Masseneinheit dieser Dämpfe gleich gesetzt. Aus der genannten Annahme folgt dann weiter, dass für $t=0$ die Ausdrücke (1) und (2) einander gleich sein müssen, oder

$$\frac{d\mu_1}{dt} - \frac{d\pi_1}{dt} = \frac{kl}{a\sigma}$$

sein muss..

Um einen Zahlenwerth für diese Differenz der beiden Differentialquotienten zu erhalten, soll festgesetzt werden, dass t nach den Graden der hunderttheiligen Thermometerscale gerechnet wird; dann ist

$$a = 273;$$

Einheit der Wärmemenge soll die Wärmemenge sein, die die Masseneinheit Wasser von 0° C. auf 1° C. erwärmt; dann ist

$$l = 79;$$

Einheit des Volumens sei das Volumen der Masseneinheit Wasser; dann ist

$$\sigma = 205550;$$

Einheit des Druckes endlich sei der Druck einer Quecksilbersäule von 1^{mm} Höhe; dann ist

$$k = \frac{423{,}5}{0{,}013526} = 31140.$$

Aus diesen Zahlenwerthen ergiebt sich:

$$-\frac{d\mu_1}{dt}\frac{d\pi_1}{dt} = 0{,}044.$$

Dieser Unterschied ist kleiner, als dass er sich mit Sicherheit aus den Versuchen von Regnault könnte erkennen lassen;

doch ist es von Interesse zu bemerken, dass aus den Zahlen, welche Regnault als die Resultate seiner Versuche angiebt, sich ein Unterschied von demselben Sinne und derselben Ordnung herausstellt, wie die Theorie ihn fordert.

Folgendes sind nach Regnault[1]) die Werthe von π_1 und μ_1 für Temperaturen in der Nähe von 0° mit ihren Differenzen:

t	π_1	+	+	+
0	4,600	0,340	0,022	0,001
1	4,940	0,362	0,023	
2	5,302	0,385		
3	5,687			

t	μ_1	−	+	+
0	4,600	0,337	0,015	0,010
−1	4,263	0,322	0,025	
−2	3,941	0,297		
−3	3,644			

Daraus ergiebt sich für $t = 0$:

$$\frac{d\pi_1}{dt} = 0{,}340 - \frac{0{,}022}{2} + \frac{0{,}001}{3} = 0{,}329$$

$$\frac{d\mu_1}{dt} = 0{,}337 + \frac{0{,}015}{2} - \frac{0{,}010}{3} = 0{,}341,$$

also:

$$\frac{d\mu_1}{dt} - \frac{d\pi_1}{dt} = 0{,}012.$$

Ueber die Spannung des Dampfes von Mischungen aus Wasser und Schwefelsäure.[2])

In meiner Abhandlung „über einen Satz der mechanischen Wärmetheorie und einige Anwendungen desselben" habe ich eine Relation hergeleitet zwischen der Spannung des Dampfes einer wässrigen Salzlösung und der Wärmemenge, die bei der Bildung der Lösung frei wird oder verschwindet[3]). Es ist von

[1]) *Relations des expériences . . . . p.* 624

[2]) Pogg. Ann. Bd. 104. 1858.

[3]) S. oben p. 473.

selbst klar, dass die dort durchgeführten Betrachtungen ebenso, wie für eine Salzlösung, für jede Flüssigkeit gelten, deren Dampf reiner Wasserdampf ist. Ueber die Spannung des Wasserdampfes, der sich über Mischungen von Wasser und Schwefelsäure bildet, hat Regnault Versuche angestellt und die Wärmemengen, welche bei der Mischung von Wasser und Schwefelsäure frei werden, sind von vielen Experimentatoren gemessen. Es lässt sich daher hier die Theorie mit der Erfahrung vergleichen. Ich habe diese Vergleichung angestellt und will die Resultate derselben im Folgenden mittheilen.

Regnault hat für 9 Mischungen von Schwefelsäure und Wasser die Dampfspannungen gemessen, nämlich für die Flüssigkeiten [1]):

$$SO^3 + 2HO,\ SO^3 + 3HO,\ SO^3 + 4HO,$$
$$SO^3 + 5HO,\ SO^3 + 6HO,\ SO^3 + 8HO,$$
$$SO^3 + 10HO,\ SO^3 + 12HO,\ SO^3 + 18HO.$$

Die Werthe der bei verschiedenen Temperaturen für eine jede Mischung beobachteten Spannung hat er graphisch dargestellt, von der so gewonnenen Curve drei gleich weit abstehende Ordinaten gemessen und aus diesen eine, drei Constanten enthaltende, Interpolationsformel berechnet. Die Werthe der Spannung, auf die die Interpolationsformeln gegründet sind, und die für genauer als die einzelnen Beobachtungen gehalten werden müssen, sind in der folgenden Zusammenstellung angegeben, in der μ die Spannung des Dampfes über der Mischung $SO^3 + (1+x)HO$ bei der Temperatur t bedeutet; die Temperatur ist nach den Graden der hunderttheiligen Scale gerechnet, als Einheit des Druckes ist der Druck einer Quecksilbersäule von 1 mm Höhe angenommen.

$x = 1$		$x = 2$		$x = 3$	
t	μ	t	μ	t	μ
8	0,110	7	0,43	11	1,28
30	0,225	26	1,19	29	3,83
52	0,600	45	3,53	47	10,81

[1]) *Ann. et chim. et de phys.* 3me *sér. t.* 15, *p.* 173.

$x=4$		$x=5$		$x=7$	
t	μ	t	μ	t	μ
7	1,51	11	3,24	4	2,95
24	4,82	23	6,98	19	7,98
41	13,67	35	14,40	34	19,85

$x=9$		$x=11$		$x=17$	
t	μ	t	μ	t	μ
5	4,12	10	6,42	7	6,30
20	10,83	21	13,09	18	12,82
35	56,15	32	24,80	29	24,65

In Betreff der bei der Mischung von Wasser und Schwefelsäure stattfindenden Wärmeentwickelung werde ich eine Formel benutzen, die Thomsen aufgestellt hat, und die mit seinen eigenen Versuchen, so wie mit denen von Favre und Silbermann und von Abria sehr nahe übereinstimmt. Bezeichnet Q die Wärmemenge, die bei der Mischung von x Aequivalenten Wasser mit einem Aequivalent SO^3+HO frei wird, so ist nach Thomsen[1]):

$$Q=\frac{x}{x+1{,}7446}\,177{,}1,$$

wenn Einheit der Wärmemenge die Wärmemenge ist, die es erfordert um 1° C. eine Wassermasse zu erwärmen, deren Gewicht gleich dem Gewichte eines Aequivalentes SO^3+HO ist.

Diese Formel ist nur für ganze Werthe von x experimentell bestätigt; um bei dem vorgesetzten Zwecke nützen zu können, muss sie auch für gebrochene Werthe von x als gültig betrachtet werden. Sie kann ferner nur für eine Temperatur strenge richtig sein; es liegen nicht die nöthigen experimentellen Data vor, um die Aenderungen berücksichtigen zu können, die die Wärmemenge Q erfährt, wenn die Temperatur sich ändert; aber aus einigen Messungen von Person lässt sich schliessen, dass diese Aenderungen nur klein sind. Ist nämlich Q die Wärmemenge, die frei wird, wenn die Massen m und m_1 zweier Flüssigkeiten bei der Temperatur t gemischt werden, und die Mischung auf dieselbe Temperatur abgekühlt wird, sind ferner c und c_1 die specifischen Wärmen der beiden

[1]) Pogg. Ann. Bd. 90, S. 278.

Flüssigkeiten, C die der Mischung, so ist nach dem ersten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = mc + m_1 c_1 - (m + m_1) C.$$

Ist die erste Flüssigkeit Wasser, die zweite $SO^3 + HO$, und ist weiter $m_1 = 1$, $m = \frac{9}{49} x$, so hat jetzt Q dieselbe Bedeutung, in der es früher gebraucht ist. Nach Versuchen von Person[1]) ist dann:

$$c_1 = 0{,}3295$$

und für $m = 0{,}3158$ $C = 0{,}4534$

für $m = 0{,}9608$ $C = 0{,}5851.$

Setzt man noch $c = 1$, so ergiebt sich hieraus für diese beiden Werthe von m:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 0{,}0486$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 0{,}142,$$

während aus der Formel von Thomsen für dieselben Werthe von m folgt:

$$Q = 87{,}88$$

und

$$Q = 132{,}8.$$

Es sind hiernach die Aenderungen, welche Q erleidet, wenn die Temperatur sich ändert, verhältnissmässig so klein, dass bei ihrer Vernachlässigung bedeutende Fehler nicht zu fürchten sind.

Lässt man den schon gebrauchten Zeichen ihre Bedeutung und nennt man ferner

π_1 die Spannung des Dampfes von reinem Wasser bei der Temperatur t,

k das mechanische Aequivalent der Wärmeeinheit,

$-a$ die Temperatur des absoluten Nullpunktes,

---

[1]) *Ann. de chim. et de ph.* 3 me *ser* r. 33, p. 446. Durch einen Druckfehler ist hier die spec. Wärme von $SO^3 + HO$ 0,3095 statt 0,3295 angegeben.

$\frac{R(a+t)}{p}$ das Volumen der Masseneinheit Wasserdampf bei einer Temperatur t und einem Drucke p, die so gewählt sind, dass bei ihnen der Dampf sich schon wie ein vollkommnes Gas verhält;

so ist nach einer am angeführten Orte von mir abgeleiteten Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \lg \frac{\mu}{\pi_1} = \frac{k}{R} \frac{1}{(a+t)^2} \frac{\partial Q}{\partial m}.$$

Nun ist

$$\frac{\partial Q}{\partial m} = \frac{49}{9} \frac{\partial Q}{\partial x}$$

und nach der Gleichung von Thomsen

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1{,}7446 \,.\, 177{,}1}{(x + 1{,}7446)^2},$$

woraus folgende Zahlenwerthe von $\frac{\partial Q}{\partial x}$ sich ergeben:

x	$\frac{\partial Q}{\partial x}$	x	$\frac{\partial Q}{\partial x}$	x	$\frac{\partial Q}{\partial x}$
1	41,00	4	9,36	9	2,68
2	22,02	5	6,79	11	1,90
3	13,72	7	4,04	17	0,88

Ferner hat man: $\frac{k}{R} = \frac{0{,}622}{0{,}0691} = 9{,}001,$

$$a = 273.$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \lg \frac{\mu}{\pi_1} = 49{,}01 \frac{1}{(273+t)^2} \frac{\partial Q}{\partial x}$$

oder, wenn man statt des natürlichen Logarithmus lg den Briggs'schen Lg einführt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{Lg} \frac{\mu}{\pi_1} = 21{,}28 \frac{1}{(273+t)^2} \frac{\partial Q}{\partial x},$$

oder endlich, wenn man integrirt:

$$\mathrm{Lg} \frac{\mu}{\pi_1} = C - \frac{21{,}28}{(273+t)} \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{1}$$

wo C eine von t unabhängige Grösse bezeichnet.

Kennt man C, so kann man hiernach mit Benutzung der bekannten Werthe von π_1 die Spannung μ für alle Temperaturen berechnen. Ich habe nun nach der Gleichung (1) für

eine jede der von Regnault untersuchten Schwefelsäure berechnet aus der grössten der (Seite 486 u. 487) angegebenen Spannungen und dann nach derselben Gleichung μ für diejenigen Temperaturen ermittelt, bei welchen Regnault beobachtet hat. Ich lasse weiter unten die Differenzen, die sich so ergeben haben, folgen.

Die Ableitung der Gleichung (1) beruht auf der Voraussetzung, dass der Wasserdampf nicht allein über der Salzlösung, sondern auch über reinem Wasser sich wie ein vollkommnes Gas verhält. Ich habe an dem angeführten Orte eine zweite Gleichung aufgestellt, deren Richtigkeit nur erfordert, dass der mit der Salzlösung in Berührung befindliche Wasserdampf die Eigenschaften eines vollkommnen Gases besitzt. Sieht man von der Verschiedenheit der specifischen Wärme des tropfbaren Wassers bei verschiedenen Temperaturen ab und setzt diese specifische Wärme $= 1$, so ist diese Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \lg \frac{\mu}{a+t} = \frac{k}{R} \frac{1}{(a+t)^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial m} - \frac{K}{k} - (1-\gamma) t \right),$$

wo γ die specifische Wärme des Wasserdampfs bei constantem Volumen und sehr grosser Verdünnung ist, K die Wirkungsgrösse für den Uebergang der Masseneinheit Wasser von t in Dampf von derselben Temperatur und sehr grosser Verdünnung bezeichnet. Nimmt man an, dass $\frac{\partial Q}{\partial m}$ von der Temperatur unabhängig ist, so lässt sich die Gleichung leicht integriren; das Integral ist:

$$\lg \mu = -\frac{k}{R} \left(\frac{\partial Q}{\partial m} - \frac{K}{k} + a(1-\gamma) \right) \frac{1}{a+t} - \frac{k}{R} \left(1 - \gamma - \frac{R}{k} \right) \lg (a+t) + \text{Const.}$$

oder

$$\text{(2)} \qquad \text{Lg}\, \mu = C - A \,\text{Lg}\, (a+t) - \frac{B}{a+t},$$

wo das Zeichen Lg, wie oben, den Briggs'schen Logarithmus bedeutet, C eine von t unabhängige Grösse und

$$A = \frac{k}{R} \left(1 - (\gamma + \frac{R}{k}) \right)$$

$$B = \frac{k}{R}\left(\frac{\partial Q}{\partial m} - \frac{K}{k} + a(1-\gamma)\right) 0{,}43429$$

ist.

Die Summe $\gamma + \frac{R}{k}$ ist die specifische Wärme des hinreichend verdünnten Wasserdampfs bei constantem Druck; nimmt man diese den Regnault'schen Versuchen gemäss $= 0{,}475$ an, und setzt für $\frac{k}{R}$ den oben angegebenen Zahlenwerth, so wird die Gleichung für A:

$$A = 4{,}726.$$

Die Gleichung B lässt sich schreiben, wenn man in ihr für m die schon oben gebrauchte Grösse x einführt und $a = 273$ setzt:

$$B = D + 21{,}28\,\frac{\partial Q}{\partial x},$$

wo

$$D = -\,3{,}909\,\frac{K}{k} + 678{,}9.$$

Aus der Gleichung (2) kann man mit Hinzuziehung dieser Werthe von A und B ebenso wie aus der Gleichung (1) für jede der von Regnault untersuchten Schwefelsäuren die Dampfspannung für alle Temperaturen berechnen, wenn sie für eine als bekannt angenommen wird, falls man den Werth von D (oder den von $\frac{K}{k}$) kennt. Nimmt man für eine Schwefelsäure die Spannung bei zwei Temperaturen als bekannt an, so kann man aus derselben Gleichung D ermitteln. Ich habe auf solche Weise D berechnet aus den beiden grössesten der Seite 486 u. 487 für jede der 9 Schwefelsäuren angegebenen Dampfspannungen, und aus den 9 so erhaltenen Werthen das Mittel genommen, nachdem ich ihnen die Gewichte zugetheilt habe, die ihnen zukommen, wenn man gleich grosse Fehler in den Werthen von μ bei den verschiedenen Säuren als gleich wahrscheinlich voraussetzt. Es ergab sich so

$$D = 2859.$$

Mit Hülfe dieses Werthes von D habe ich auch nach der Gleichung (2) aus der grössten der Seite 486 u. 487 angegebenen

Spannungen für jede der 9 Schwefelsäuren die Spannungen für alle Temperaturen, bei denen Regnault beobachtet hat, berechnet.

In der folgenden Tafel sind diese Temperaturen in der ersten Columne aufgeführt, in der zweiten die beobachteten Spannungen, in der dritten die nach Gleichung (1), in der der fünften die nach Gleichung (2) berechneten Werthe derselben, in der vierten und sechsten die Differenzen der beobachteten und berechneten Werthe.

Temp.	beob.	nach Gl. 1	Diff.	nach Gl. 2.	Diff.
		$SO^3 + 2HO$.			
8,48	0,11	0,02	+ 0,09	0,02	+ 0,09
16,83	0,16	0,04	+ 0,12	0,04	+ 0,12
25,09	0,17	0,08	+ 0,09	0,08	+ 0,09
33,51	0,26	0,16	+ 0,10	0,16	+ 0,10
41,90	0,35	0,29	+ 0,06	0,30	+ 0,05
52,39	0,68	0,62	+ 0,06	0,62	+ 0,06
		$SO^3 + 3HO$.			
7,00	0,43	0,23	+ 0,20	0,24	+ 0,19
9,75	0,47	0,29	+ 0,18	0,31	+ 0,16
14,22	0,61	0,42	+ 0,19	0,43	+ 0,18
18,58	0,80	0,58	+ 0,22	0,60	+ 0,20
24,39	1,09	0,89	+ 0,20	0,91	+ 0,18
28,74	1,38	1,21	+ 0,17	1,24	+ 0,14
33,67	1,82	1,69	+ 0,13	1,72	+ 0,10
38,81	2,48	2,38	+ 0,10	2,40	+ 0,08
44,97	3,52	3,52	0,00	3,52	0,00
		$SO^3 + 4HO$.			
8,09	1,09	0,82	+ 0,27	0,86	+ 0,23
11,73	1,32	1,08	+ 0,24	1,13	+ 0,19
15,77	1,73	1,45	+ 0,28	1,51	+ 0,22
14,62	1,60	1,34	+ 0,26	1,39	+ 0,21
18,63	2,06	1,78	+ 0,28	1,85	+ 0,21
21,46	2,47	2,17	+ 0,30	2,24	+ 0,23
23,15	2,82	2,43	+ 0,39	2,51	+ 0,31
26,39	3,27	3,02	+ 0,25	3,11	+ 0,16
29,88	4,03	3,80	+ 0,23	3,89	+ 0,14
32,78	4,81	4,58	+ 0,23	4,67	+ 0,14
40,35	7,50	7,31	+ 0,19	7,38	+ 0,12
47,14	10,92	10,90	+ 0,02	10,89	+ 0,03

$SO^3 + 5HO$

Temp.	beob.	nach Gl. 1	Diff.	nach Gl. 2.	Diff.
7,13	1,54	1,50	+ 0,04	1,55	— 0,01
11,01	1,99	1,98	+ 0,01	2,06	— 0,07
13,61	2,39	2,38	+ 0,01	2,47	— 0,08
16,94	3,05	3,00	+ 0,05	3,10	— 0,05
19,66	3,66	3,61	+ 0,05	3,72	— 0,06
22,91	4,50	4,49	+ 0,01	4,59	— 0,09
26,75	5,74	5,75	— 0,01	5,86	— 0,12
29,82	6,97	6,99	— 0,02	7,10	— 0,13
32,68	8,37	8,34	+ 0,03	8,42	— 0,05
35,73	10,06	10,02	+ 0,04	10,09	— 0,03
41,12	13,77	13,76	+ 0,01	13,77	0,00

$SO^3 + 6HO$.

10,70	3,20	3,01	+ 0,19	3,11	+ 0,09
12,53	3,58	3,43	+ 0,15	3,53	+ 0,05
15,94	4,48	4,33	+ 0,15	4,43	+ 0,05
21,38	6,35	6,20	+ 0,15	6,32	+ 0,03
24,59	7,72	7,62	+ 0,10	7,73	— 0,01
28,39	9,69	9,67	+ 0,02	9,82	— 0,13
31,49	11,64	11,68	— 0,04	11,74	— 0,10
35,35	14,65	14,70	— 0,05	14,69	— 0,04
14,13	4,03	3,82	+ 0,21	3,93	+ 0,10
19,13	5,49	5,35	+ 0,14	5,47	+ 0,02

$SO^3 + 8HO$.

4,00	2,95	2,85	+ 0,10	2,95	0,00
7,84	3,82	3,75	+ 0,07	3,86	— 0,04
11,36	4,86	4,78	+ 0,08	4,91	— 0,05
15,05	6,17	6,13	+ 0,04	6,27	— 0,10
18,24	7,60	7,55	+ 0,05	7,71	— 0,11
23,23	10,42	10,39	+ 0,03	10,52	— 0,10
19,32	8,17	8,10	+ 0,07	8,25	— 0,08
25,60	12,09	12,02	+ 0,07	12,15	— 0,06
30,57	16,24	16,23	+ 0,01	16,31	— 0,07
35,38	21,55	21,49	+ 0,06	21,42	+ 0,13

$SO^3 + 10HO$.

9,07	5,35	5,18	+ 0,17	5,35	0,00
13,56	7,21	7,01	+ 0,20	7,20	+ 0,01
17,06	9,00	8,81	+ 0,19	9,02	— 0,02
20,15	10,92	10,74	+ 0,18	10,95	— 0,03

Temp.	beob.	nach Gl. 1	Diff.	nach Gl. 2	
			$SO^3 + 10HO$.		
23,16	13,20	12,96	+ 0,24	13,17	+
26,95	16,42	16,33	+ 0,09	16,51	—
31,04	20,87	20,81	+ 0,06	20,94	—
35,74	27,30	27,27	+ 0,03	27,26	+
4,85	4,06	3,86	+ 0,20	4,00	+
			$SO^3 + 12HO$.		
6,62	5,12	4,98	+ 0,14	5,13	—
10,05	6,46	6,30	+ 0,16	6,47	—
12,95	7,85	7,65	+ 0,20	7,83	+
16,75	9,99	9,80	+ 0,19	9,99	
19,79	12,15	11,90	+ 0,25	12,07	+
18,66	11,36	11,08	+ 0,28	11,26	+
22,31	14,17	13,91	+ 0,26	14,09	+
23,76	15,53	15,22	+ 0,31	15,38	+
27,68	19,47	19,27	+ 0,20	19,37	+
32,17	25,04	25,05	— 0,01	25,05	—
			$SO^3 + 18HO$.		
5,79	5,80	5,64	+ 0,16	5,79	+
8,43	6,95	6,76	+ 0,19	6,92	+
12,39	8,96	8,80	+ 0,16	8,98	—
16,01	11,28	11,14	+ 0,14	11,32	—
17,02	12,05	11,88	+ 0,17	12,06	—
20,99	15,37	15,24	+ 0,13	15,40	—
25,59	20,27	20,15	+ 0,12	20,24	+
28,94	24,62	24,57	+ 0,05	24,57	+

Wie es erwartet werden konnte, ist die Uebereinstim... der beobachteten Spannungen mit den nach Gleichung 2 rechneten grösser als mit den nach Gleichung (1) berech... Es müssten die beiden letzteren vollständig übereinstim... wenn der mit reinem Wasser in Berührung befindliche Was... dampf als ein vollkommnes Gas betrachten werden dürf... welchem Falle die Gleichung (2) auch für diesen Dampf g... müsste, wenn man in ihr B durch D ersetzt.

Ueber die Leitungsfähigkeit des Eisens für die Wärme.[1])

Es soll im Folgenden eine neue Methode auseinander gesetzt werden, die wir angewandt haben, um die Leitungsfähigkeit des Eisens für die Wärme, oder vielmehr das Verhältniss dieser Leitungsfähigkeit zu dem Producte aus specifischer Wärme und Dichtigkeit zu bestimmen. Die Resultate der Messungen dieser Grösse, die bisher ausgeführt sind, zeigen grosse Unterschiede; der Grund hiervon kann unserer Meinung nach darin liegen, dass bei den meisten derselben die Wärmemengen, die der dem Versuche unterworfene Körper nach aussen hin abgab oder von aussen aufnahm, nicht in genügender Weise in Rechnung gezogen sind; mit Hülfe des Begriffs der äussern Wärmeleitungsfähigkeit, der zu diesem Zwecke eingeführt worden ist, kann derselbe nur unvollkommen erreicht werden. Die Ueberlegenheit der neueren, namentlich der von F. Neumann angegebenen Methoden über die älteren beruht vorzugsweise darauf, dass bei ihnen die Ableitung der Wärme nach aussen von geringerem Einfluss auf den Werth ist, der sich für die zu bestimmende Grösse ergibt. Immerhin findet aber auch bei ihnen ein solcher Einfluss in erheblichem Maasse statt. Bei der Methode, die wir angewandt haben, glauben wir diesen Einfluss noch weiter herabgedrückt zu haben, und dadurch zu einem zuverlässigern Werthe geführt zu sein, als die bisher gewonnen sind.

Der ideale Fall, den wir bei unseren Versuchen näherungsweise zu verwirklichen gesucht haben, ist dieser: Das leitende Medium ist nur durch eine Ebene begrenzt und hat bis zu einem gewissen Augenblick überall dieselbe Temperatur; in diesem Augenblick wird in der Grenzfläche eine andere constante Temperatur erzeugt. Kennt man die Aenderung, welche die Temperatur in einem bestimmten Abstande von der Grenzfläche nach einem bestimmten Zeitraume erfahren hat, so kann man aus dem Verhältniss dieser zur Temperaturänderung in der Grenzfläche den Quotienten aus dem Produkte der specifischen Wärme und der Dichtigkeit in die Leitungsfähigkeit

[1]) G. Kirchhoff u. G. Hansemann. Wied. Ann. Bd. 9. 1879.

des Mediums nach einer bekannten einfachen Formel berechnen.

Wir benutzten eine Eisenmasse von der Gestalt eines Würfels von 140^{mm} Seite; eine Kante war vertical gestellt, und gegen eine Seitenfläche wurde, nachdem der Würfel längere Zeit sich selbst überlassen worden war, aus einer Brause ein kräftiger Wasserstrom geleitet, der um einige Grade wärmer oder kälter war als der Beobachtungsraum. Es war dafür gesorgt, dass die Temperatur in einigen Punkten der geraden Linie, die in der Mitte der bespritzten Seitenfläche senkrecht auf dieser steht, gemessen werden konnte; zu jedem dieser Punkte führt nämlich ein verticaler, enger Canal, dazu bestimmt, die eine Löthstelle einer aus dünnen Drähten von Neusilber und Kupfer gebildeten Thermokette aufzunehmen, deren andere Löthstelle in einer constanten Temperatur sich befand, und die mit einem Spiegelgalvanometer verbunden werden konnte. Es war nöthig, an der Scala des Galvanometers Ablesungen zu machen, während der Magnet desselben in lebhafter Bewegung war; das wurde ermöglicht durch einen Chronographen, mit dessen Hülfe der Beobachter die Zeitpunkte markirte, in denen der Verticalfaden des Fernrohrs durch gewisse Theilstriche ging, deren Zahlen er gleichzeitig einem Gehülfen dictirte.

Mannichfaltige Betrachtungen waren nöthig, um die Verschiedenheiten zwischen der hergestellten Anordnung und dem vorher bezeichneten idealen Falle zu berücksichtigen.

Es war zunächst der Einfluss zu untersuchen, den die Seitenflächen und die Hinterfläche des Würfels auf die Bewegung der Wärme in ihm ausübt. Dieser nur unbedeutende Einfluss lässt sich mit der nöthigen Genauigkeit berechnen, wenn man auch nur rohe Näherungswerthe für die innere und die äussere Leitungsfähigkeit des Eisenwürfels zu Hülfe zieht.

Näherungsweise wird die Temperatur der bespritzten Vorderfläche des Würfels eine constante sein; doch hielten wir es für geboten, uns von der Voraussetzung dieser Constanz unabhängig zu machen. Wir erreichten das, indem wir bei jedem Versuch eine fortlaufende Beobachtungsreihe über die Tem-

peratur in einem Punkte anstellten, der nur 5,46^{mm} von der Vorderfläche entfernt ist, eine Beobachtungsreihe, die fast bis zu dem Zeitpunkte fortgesetzt wurde, in dem die Temperatur in einem entferntern Punkte beobachtet werden musste. Es dienten hierbei zwei ganz gleiche Thermoketten, von denen zuerst die eine, dann die andere mit dem Galvanometer in Verbindung gesetzt war. Diese Methode gewährt noch einen andern Nutzen. Durch die Galvanometerbeobachtungen kann nur ermittelt werden die Temperatur der in den Canal des Würfels eingesenkten Löthstelle der Thermokette, während in den aus der Theorie der Wärmeleitung entwickelten Gleichungen die Temperatur vorkommt, welche am Orte der Mitte des Bodens des Canals zur selben Zeit stattfinden würde, wenn der Canal und die Thermokette gar nicht vorhanden wären. Diese beiden Temperaturen sind, genau genommen, nicht dieselben. Der Fehler, den man begeht, indem man die eine für die andere setzt, verliert, wie zu zeigen versucht werden soll, seinen Einfluss bei der genannten Versuchsmethode.

Aus den Galvanometerbeobachtungen ist zunächst auf die elektromotorische Kraft der benutzten Thermokette und aus dieser auf die Temperatur der eingesenkten Löthstelle zu schliessen. Misst man die Ablenkung der Gleichgewichtslage der Galvanometernadel durch Ströme von verschiedener Intensität, so ist bei unserm Instrumente diese Intensität, also bei gleichbleibendem Widerstande auch die electromotorische Kraft, proportional mit der der Ablenkung entsprechenden Zahl von Scalentheilen; eine Abweichung von dieser Proportionalität haben wir bei unserm Galvanometer nicht auffinden können. Will man die elektromotorische Kraft aus Beobachtungen bestimmen, bei denen die Galvanometernadel in Bewegung ist, so muss man zur Differentialgleichung der Bewegung der Nadel zurückgehen und es müssen die in dieser vorkommenden Constanten durch vorgängige Versuche bestimmt sein. Zu diesen Constanten gehört die Schwingungsdauer und die Dämpfung. Wir fanden es nöthig, noch eine Constante einzuführen und zu bestimmen. Die Nadel unseres Galvanometers bestand aus einem nahe astatischen System, und ein nicht unerheblicher Theil der Richtkraft rührte von dem Aufhängungsfaden her;

die elastische Nachwirkung dieses machte sich bei den Beobachtungen in sehr deutlicher Weise geltend. Mit befriedigendem Erfolge haben wir versucht, den Einfluss der elastischen Nachwirkung zu berücksichtigen und unschädlich zu machen mit Hülfe der von Hrn. Boltzmann aufgestellten Theorie derselben. Es führt diese eine neue Constante ein, die durch vorläufige Versuche bestimmt werden musste.

Die electromotorische Kraft einer Thermokette bei einer Temperaturdifferenz der Löthstellen von wenigen Graden pflegt als proportional mit dieser Temperaturdifferenz angenommen zu werden. Die Beziehungen, welche Hr. Avenarius bei einigen Thermoketten zwischen der electromotorischen Kraft und den Temperaturen ihrer Löthstellen gefunden hat, zeigten uns aber, dass die Annahme jener Proportionalität bei unseren Messungen einen nicht zu vernachlässigenden Fehler herbeiführen konnte. Wir haben daher die Form des Avenarius'schen Gesetzes für unsere Thermoketten als gültig angenommen und die darin vorkommenden Constanten durch besondere Versuche bestimmt, bei denen die Temperaturen mit Hülfe eines Jolly'schen Luftthermometers gemessen wurden. Nach der so hergeleiteten Gleichung haben wir dann bei den Wärmeleitungsversuchen die Temperaturdifferenz der Löthstellen der Thermoketten aus ihrer electromotorischen Kraft berechnet.

Bei diesem kurzen Bericht über den Gang unserer Untersuchung ist ein Punkt noch zu erwähnen. Wir haben bei derselben, wie es bei ähnlichen Untersuchungen zu geschehen pflegt, zunächst angenommen, dass die Leitungsfähigkeiten und das Product aus specifischer Wärme und Dichtigkeit von der Temperatur unabhängig sind, während thatsächlich diese beiden Grössen mit der Temperatur sich ändern. Bei Rücksicht hierauf muss man die Frage stellen, für welche Temperatur der Werth der Leitungsfähigkeit (und der Werth des Verhältnisses dieser zu dem Product aus specifischer Wärme und Dichtigkeit) gilt, der ohne diese Rücksicht aus den Beobachtungen berechnet ist. Bei der von uns gewählten Methode lässt sich diese Frage beantworten, wenn man annimmt, dass jene beiden Grössen innerhalb des in Betracht kommenden Temperaturintervalls lineare Funktionen der Temperatur sind

und sich nur wenig ändern. Mit Hülfe der Gleichung, die sich hierbei ergiebt, und bei Benutzung einer Angabe von Bède über die specifische Wärme des Eisens bei verschiedenen Temperaturen haben wir aus unseren Beobachtungen abgeleitet, dass die Leitungsfähigkeit des Eisens, dividirt durch das Product aus seiner specifischen Wärme und seiner Dichtigkeit, bei der Temperatur ϑ

$$= 16{,}94 - 0{,}034(\vartheta - 15)$$

ist, wenn die Temperatur nach Celsius'schen Graden gemessen wird, und die Einheiten der Zeit und der Länge Secunde und Millimeter sind. Dabei muss aber bemerkt werden, dass dem Coëfficienten von ϑ nur eine geringe Sicherheit zukommt, da bei unseren Versuchen die Temperatur nur in engen Grenzen sich bewegte.

Von den Ergebnissen früherer Messungen stimmt mit dem unsrigen am besten das von H. Weber[1]) gefundene überein, nach dem jene Grösse bei der Temperatur von 39° C. = 16,97 ist. Grössere Abweichungen zeigen die Resultate von F. Neumann Ångström und Forbes, soweit sie mit den unsrigen verglichen werden können. Ob verschiedene Eisensorten bedeutende Unterschiede der in Rede stehenden Grösse darbieten, müssen spätere Untersuchungen zeigen. Um das von uns benutzte Eisen einigermassen zu charakterisiren, möge angeführt werden, dass es aus den Eisenwerken der Dortmunder Union herrührender Puddelstahl ist, und dass die chemische Analyse in ihm ergeben hat:

0,129 Procent Kohle
und 0,080 „ Silicium.

Ist u die Temperatur eines Körpers im Punkte (x, y, z) zur Zeit t, c das Product aus der specifischen Wärme in die Dichtigkeit, k die Leitungsfähigkeit, so ist:

$$(1) \qquad c\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial k\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial k\frac{\partial u}{\partial y}}{\partial y} + \frac{\partial k\frac{\partial u}{\partial z}}{\partial z},$$

[1]) Weber, Pogg. Ann. 146. p. 257. 1872.

oder, wenn man:

$$\frac{k}{c} = a$$

setzt und c und k als constant annimmt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{2}$$

Es bilde der Körper einen Würfel, dessen Kante Länge l haben, und die Gleichungen seiner Seitenflächen

$$x = 0 \quad y = 0 \quad z = 0 \qquad x = l \quad y = l \quad z = l$$

Es sei ferner bis zum Augenblick $t = 0$ überall $u = 0$ von diesem Augenblick an $u = 1$ in der Fläche $z = 0$, während die fünf anderen Seitenflächen ihre Wärme gegen eine Umgebung von der Temperatur Null ausstrahlen. Neben der partiellen Differentialgleichung (2) hat dann u die Bedingungen zu erfüllen, dass:

$$\begin{cases} \text{für } t = 0 & u = 0 \\ \text{für } x = 0 \ \frac{\partial u}{\partial x} = hu, & \text{für } x = l \ \frac{\partial u}{\partial x} = -hu, \\ \text{„ } y = 0 \ \frac{\partial u}{\partial y} = hu, & \text{„ } y = l \ \frac{\partial u}{\partial y} = hu, \\ \text{„ } z = 0 \ u = 1, & \text{„ } z = l \ \frac{\partial u}{\partial z} = hu \end{cases} \tag{3}$$

ist, wo h eine Constante, nämlich das Verhältniss der äussern zu innern Leitungsfähigkeit bedeutet. Die Aufgabe, die Forderungen gemäss u zu bestimmen, lässt nur eine Lösung zu; man kann diese finden, indem man u gleich einer Reihe setzt, die nach aufsteigenden Potenzen von h fortschreitet. Für den vorliegenden Zweck ist es ausreichend, die beiden ersten Glieder dieser Reihe zu ermitteln. Demnach setze man

$$u = U_0 + hU_1. \tag{4}$$

Die Forderungen, die dann für U_0 sich ergeben, erfüllt man, indem man U_0 als eine Function der beiden Variabeln z und t annimmt, die der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = a\frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2}$$

und den Bedingungen genügt, dass:

$$\text{für } t = 0, \qquad U_0 = 0$$

$$\text{für } z = 0 \quad U_0 = 1, \qquad \text{für } z = l \quad \frac{\partial U_0}{\partial z} = 0$$

ist. Man setze:

$$U(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-x^2} dx.$$

Diese Function spielt bei den hier auszuführenden Rechnungen eine grosse Rolle; wir haben bei diesen die von Kramp für sie berechnete Tabelle benutzt.

Es hat $U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right)$ die Eigenschaft, dass:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \qquad \text{und} \qquad \text{für } t = 0 \quad U = 0,$$

$$\text{für } z = 0 \quad U = 1, \qquad \text{für } z = \infty \quad U = 0$$

ist. Daraus folgt:

$$(5) \qquad \begin{cases} U_0 = U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + U\left(\frac{2l-z}{2\sqrt{at}}\right) - U\left(\frac{4l-z}{2\sqrt{at}}\right) + \cdot \\ \qquad\qquad - U\left(\frac{2l+z}{2\sqrt{at}}\right) + U\left(\frac{4l+z}{2\sqrt{at}}\right) - \cdot, \end{cases}$$

oder, wie wir schreiben wollen:

$$U_0 = U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + R.$$

Es war nöthig, das hierdurch definirte R für gewisse Werthe der darin vorkommenden Argumente zu berechnen. Indem wir Millimeter und Secunde zu Einheiten der Länge und der Zeit nahmen, konnten wir als Näherungswerth von a 16,5 wählen; l hatten wir $= 140$ zu setzen. Der kleinste Werth von z, der in Betracht kam, war 5,46; für ihn und alle Werthe von t, die ins Auge zu fassen waren, ergab sich R verschwindend klein; ferner fand sich:

für $z = 44{,}65$	$t = 145$	$R = 0{,}00067$
„ $= 44{,}65$	$= 175$	$= 0{,}00192$
„ $= 71{,}26$	$= 145$	$= 0{,}00254.$

Zur Bestimmung von U_1 hat man die Gleichungen:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2}\right),$$

$$\text{für } t = 0 \qquad U_1 = 0,$$

$$\text{für } x = 0 \quad \frac{\partial U_1}{\partial x} = U_0, \qquad \text{für } x = l \quad \frac{\partial U_1}{\partial x} = -U_x,$$

$$\text{„ } y = 0 \quad \frac{\partial U_1}{\partial y} = U_0, \qquad \text{„ } y = l \quad \frac{\partial U_1}{\partial y} = -U_y,$$

$$\text{„ } z = 0 \quad U_1 = 0, \qquad z = l \quad \frac{\partial U_1}{\partial z} = -U_z.$$

Um ihnen zu genügen, setze man:

$$U_1 = U_x + U_y + U_z$$

wo U_x eine Function von x, z, t, U_y eine Function von y, z, t und U_z eine Funktion von z, t sein soll; jede dieser Functionen soll die für U_1 aufgestellte partielle Differentialgleichung erfüllen und sowohl für $t = 0$ als für $x = \infty$ verschwinden. Ueberdies muss dann sein:

$$\text{für } x = 0 \quad \frac{\partial U_x}{\partial y} = U_0, \qquad \text{für } x = l \quad \frac{\partial U_x}{\partial x} = -U_x,$$

$$z = l \quad \frac{\partial U_x}{\partial z} = 0,$$

$$\text{für } y = 0 \quad \frac{\partial U_y}{\partial y} = U_0, \qquad \text{für } y = l \quad \frac{\partial U_y}{\partial y} = -U_y,$$

$$z = l \quad \frac{\partial U_y}{\partial z} = 0,$$

$$\text{für } z = l \quad \frac{\partial U_z}{\partial z} = -U_z.$$

Um U_z zu finden, muss man zunächst eine Function von z, t, die V genannt werden möge, ermitteln, für welche:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right),$$

$$\text{für } t = 0 \quad V = 0,$$

$$\text{für } x = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial t} = f(z, t), \qquad \text{für } x = \infty \quad V = 0,$$

$$\text{„ } z = 0 \quad V = 0, \qquad \text{„ } z = \infty \quad V = 0$$

ist, wo $f(z, t)$ eine gegebene Function von z und t bedeutet, die für $z = \infty$ verschwindet. Die folgende Erwägung lehrt dieses V kennen. Es ist:

$$\frac{1}{t} e^{-\frac{z^2 - z'^2}{4at}}$$

eine Lösung der in Rede stehenden partiellen Differentialgleichung; eine allgemeinere erhält man, wenn man hier $t-t'$ für t, $z-z'$ oder $z+z'$ für z setzt, den Ausdruck, der dadurch entsteht, mit einer willkürlichen Function von z' und t' mal $dz'\,dt'$ multiplicirt und zwischen constanten Grenzen nach z' und t' integrirt. Der Differentialgleichung wird daher auch genügt durch:

$$V = -\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_0^\infty dt'\,dz' f(z',t')\frac{1}{t-t'}\left(e^{-\frac{x^2+(z-z')^2}{4a(t-t')}} - e^{-\frac{x^2+(z+z')^2}{4a(t-t')}}\right),$$

da der Theil von $\frac{\partial V}{\partial t}$, der infolge davon auftritt, dass die obere Grenze der Integration nach t' nicht constant, sondern t ist, verschwindet. Dieses V erfüllt zugleich die Bedingungen, die für $t=0$, $z=0$, $x=\infty$ und $z=\infty$ aufgestellt sind; es genügt auch der für $x=0$ geltenden Bedingung, wie die folgende Betrachtung zeigt. Es ist:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4a\pi}\int_0^t\int_0^\infty dt'\,dz' f(z',t')\frac{x}{(t-t')^2}\left(e^{-\frac{x^2+(z-z')^2}{4a(t-t')}} - e^{-\frac{x^2+(z+z')^2}{4a(t-t')}}\right).$$

Wenn x verschwindet, so wird der unter den Integralzeichen stehende Ausdruck gleich Null, es sei denn, dass zugleich $t-t'$ und $z-z'$ verschwinden; für ein unendlich kleines x ist daher:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{f(z,t)}{4a\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dt\,dz}{t^2}e^{-\frac{x^2+z^2}{4at}},$$

oder wenn man die Integration nach z ausführt, indem man benutzt, dass

$$\int_0^\infty dz\,e^{-\alpha^2z^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ist:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{f(z,t)}{2\sqrt{a\pi}}\int_0^\infty\frac{x\,dt}{t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4at}}.$$

Führt man hier an Stelle der Integrationsvariabeln t eine neue durch die Gleichung:

$$\frac{1}{t} = s$$

ein, so erhält man:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{f(z,0)}{2\sqrt{a\pi}} \int_0^\infty x\,ds\,e^{-\frac{x^2}{4a}s^2} = f(z,t).$$

wie zu beweisen war.

Nun setze man:

$$f(z,t) = U'\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right),$$

führe statt des Zeichens V das Zeichen $V(x)$ ein, sodass

$$(6) \quad V(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_0^\infty dt'\,dx'\,U'\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\frac{1}{t-t'}\,e^{-\frac{x^2+x-x'^2}{4a(t-t')}}\,e^{-\frac{x'^2}{4at'}}$$

und mache:

$$(7) \quad W = W(z) = V(x) + V(l-x) + V(2l-x) + V(3l-x) - \\ + V(l+x) + V(2l+x) + V(3l+x) -$$

Dieses W genügt dann der Differentialgleichung, der U_z genügen soll, und es ist:

$$\text{für } t=0 \quad W=0$$

$$\text{für } x=0 \quad \frac{\partial W}{\partial x} = U'\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right), \quad \text{für } x=l \quad \frac{\partial W}{\partial x} = -U'\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right)$$

$$\text{„ } z=0 \quad W=0, \qquad \text{„ } z=\infty \quad W=0.$$

Bei Rücksicht auf die Gleichung (5) folgt hieraus, dass die Forderungen, die U_z erfüllen soll, erfüllt werden durch:

$$U_z = W(z) + W(2l-z) - W(4l-z) + \\ - W(2l+z) + W(4l+z) - \cdots$$

Aus U_z erhält man U_y, indem man y an die Stelle von x setzt.

Um U_z zu erhalten, muss man zunächst eine Function von z und t, die Z oder auch $Z(z)$ genannt werden möge, so suchen, die die Bedingungen erfüllt:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = a\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}, \quad \text{für } t=0 \quad Z=0,$$

$$\text{für } z = 0 \frac{\partial Z}{\partial z} = f(t), \quad \text{für } z = \infty \; Z = 0,$$

wo $f(t)$ eine gegebene Funktion von t bedeutet. Es geschieht das, wenn:

$$Z = -\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^t dt' f(t') \frac{1}{\sqrt{t-t'}} e^{-\frac{z^2}{4a(t-t')}}$$

gesetzt wird. Der Differentialgleichung wird nämlich genügt, da:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{z^2}{4at}}$$

eine Lösung derselben ist; es verschwindet Z für $t = 0$ und für $z = \infty$; endlich ist:

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} \int_0^t dt' f(t') \frac{z}{(t-t')^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{z^2}{4a(t-t')}};$$

der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck verschwindet für $z = 0$, wenn nicht zugleich $t - t' = 0$ ist; daher ist für ein unendlich kleines z:

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{f(t)}{2\sqrt{a\pi}} \int_0^\infty \frac{z\,dt}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{z^2}{4at}} = f(t).$$

Nun bezeichne man den in der Gleichung (5) gleich U_0 gesetzten Ausdruck durch:

$$U_0(z, t),$$

mache:

$$f(t) = U_0(l, t),$$

sodass:

$$Z(z) = -\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^t U_0(l, t') \frac{dt'}{\sqrt{t-t'}} e^{-\frac{z^2}{4a(t-t')}}$$

wird; es ist dann:

$$U_z = Z(l-z) - Z(3l-z) + Z(5l-z) - .$$
$$- Z(l+z) + Z(3l+z) - Z(5l+z) + .$$

Numerische Rechnungen waren nur auszuführen für $x = \frac{l}{2}$ und $y = \frac{l}{2}$; für diese Werthe von x und y ist:

$$U_z = U_{z'},$$

also:

$$U_1 = 2\,U_z + U_z,$$

und es vereinfacht sich die Gleichung (7) in:

$$W(z) = 2\left(V\left(\frac{l}{2}\right) + V\left(\frac{3l}{2}\right) + V\left(\frac{5l}{2}\right) + \dots\right).$$

Bei den Werthsystemen von z und t, die in Betracht zu ziehen waren, war U_z ganz zu vernachlässigen, und es reicht in jeder der für U_z und $W(z)$ aufgestellten Reihen die Berücksichtigung des ersten Gliedes aus, sodass:

$$U_1 = 4\,V\left(\frac{l}{2}\right)$$

gesetzt werden konnte, wo $V\left(\frac{l}{2}\right)$ aus (6) zu ermitteln war.

Führt man hier an Stelle von z' die neue Integrationsvariable s' durch die Gleichung:

$$z' = 2\sqrt{at}\,s'$$

ein und setzt zugleich:

$$z = 2\sqrt{at}\,s,$$

so hat man also:

$$U_1 = -\frac{4}{\pi}\sqrt{a}\int_0^t dt'\,\sqrt{\frac{t}{t-t'}}\,e^{-\frac{s^2}{4(t-t')}}$$

$$\int_0^\infty ds'\,U(s')\left(e^{-(s-s')^2\frac{t}{t-t'}} - e^{-(s+s')^2\frac{t}{t-t'}}\right).$$

Dieses Doppelintegral ist für die Werthe von s und t, für die seine Kenntniss nöthig war, durch mechanische Quadratur mit Hülfe graphischer Darstellung berechnet. Für $s = 5{,}46^{cm}$ und alle Werthe von t, die in Betracht kamen, konnte es gleich Null gesetzt werden, und es ergab sich:

für $z = 44{,}65$	$t = 145$	$U_1 = -5{,}21$
$= 44{,}65$	$= 175$	$= -7{,}77$
$= 71{,}26$	$= 145$	$= -5{,}62.$

Um hiernach der Gleichung (4) gemäss u berechnen zu

können, mussten wir noch die Grösse h bestimmen. Es möge hier die Beschreibung der Versuche, durch welche das geschehen ist, angeschlossen werden.

Es war der Würfel in seiner ganzen Masse nahezu gleichmässig über die Temperatur seiner Umgebung erwärmt. Die eine Löthstelle einer mit dem Galvanometer verbundenen Thermokette war in der Nähe desselben, vor seiner Strahlung geschützt, aufgestellt, die andere in einen Canal des Würfels, der in seinem Mittelpunkte endigte, eingeführt. Ist v der Ueberschuss der Temperatur im Punkte (x, y, z) zur Zeit t über die Temperatur der Umgebung, so ist:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

und für $x = 0$ $\frac{\partial v}{\partial x} = hv$, für $x = l$ $\frac{\partial v}{\partial x} = -hv$

„ $y = 0$ $\frac{\partial v}{\partial y} = hv$, „ $y = l$ $\frac{\partial v}{\partial y} = -hv$

„ $z = 0$ $\frac{\partial v}{\partial z} = hv$, „ $z = l$ $\frac{\partial v}{\partial z} = -hv$.

Ist t so gross, dass von der Reihe, durch welche v sich darstellen lässt, wenn noch der Anfangszustand als gegeben betrachtet wird, nur das erste Glied berücksichtigt zu werden braucht, so ist hiernach:

$$v = \text{const.}\, e^{-3\lambda^2 at}\left(\cos\lambda x + \frac{h}{\lambda}\sin\lambda x\right)\left(\cos\lambda y + \frac{h}{\lambda}\sin\lambda y\right)\left(\cos\lambda z + \frac{h}{\lambda}\sin\lambda z\right),$$

wo λ die kleinste positive Wurzel der Gleichung:

$$\text{tg}\frac{\lambda l}{2} = \frac{h}{\lambda} \tag{8}$$

bedeutet. Für beliebige feste Werthe von x, y, z ist daher:

$$v = \text{const.}\, e^{-3\lambda^2 at}; \tag{9}$$

für den Mittelpunkt des Würfels, d. h. für den Punkt $x = y = z = \frac{l}{2}$, gilt diese Gleichung schon bei kleineren Werthen von t, als für andere Punkte, da für ihn die Coëfficienten der drei Glieder, welche in jener Reihe auf das erste folgen, verschwinden.

Da bei der Bestimmung von h eine geringe Genauigkeit ausreicht, so konnte die Galvanometerablenkung in einem Augen-

blick unmittelbar als Maass für den entsprechenden Werth von v dienen. War beobachtet, wie die Ablenkung mit der Zeit abnahm, so konnte mit Hülfe des schon benutzten Näherungswerthes von a aus (9) λ, und dann aus (8) h gefunden werden.

Bei einem Versuche dieser Art sank die Galvanometerablenkung in der Zeit von 165 Minuten von 361,3 Scalentheilen auf 187,0; und zwar so, dass in gleichen Zeitintervallen der Logarithmus der Ablenkung sehr nahe um gleich viel abnahm; setzt man wieder $a = 16{,}5$, so folgt hieraus $\lambda = 0{,}00116$, und weiter, da $l = 140$, $h = 0{,}000\,094\,3$.

Daraus ergiebt sich:

für $z = 44{,}65$,	$t = 145$,	$R + h U_1 = 0{,}00018$
$= 44{,}65$,	$= 175$,	$= 0{,}00118$
$= 71{,}26$,	$= 145$,	$= 0{,}00201$

Die im vorigen Abschnitt untersuchte, durch die Gleichungen (2) und (3) definirte Funktion u von den Argumenten x, y, z, t möge nun durch $u(t)$ bezeichnet werden. Setzt man:

$$v = \int_0^t f(t')\, dt' \frac{\partial u(t-t')}{\partial t}, \tag{10}$$

wo $f(t)$ eine beliebige Function von t bedeutet, so ist dann

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),$$

$$\text{für } t = 0 \qquad v = 0,$$

$$\text{für } x = 0 \ \frac{\partial v}{\partial x} = hv, \qquad \text{für } x = l \ \frac{\partial v}{\partial x} = -hv,$$

$$\text{„ } y = 0 \ \frac{\partial v}{\partial y} = hv, \qquad \text{„ } y = l \ \frac{\partial v}{\partial y} = -hv,$$

$$\text{„ } z = 0 \quad v = f(t), \qquad \text{„ } z = l \ \frac{\partial v}{\partial z} = -hv.$$

Um einzusehen, dass der partiellen Differentialgleichung genügt wird, hat man zu beachten, dass $\frac{\partial u}{\partial t}$ für $t = 0$ verschwindet, da für diesen Werth von t:

$$u = 0, \text{ also auch } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

ist; und um zu beweisen, dass $v = f(t)$ für $z = 0$ ist, ist zu benutzen, dass das Integral:

$$\int \frac{\partial u\,(t)}{\partial t}\, dt,$$

genommen von $t = 0$ bis zur irgend einem positiven Werthe von t, für einen unendlich kleinen Werth von z gleich 1 ist.

Nun soll in Beziehung auf $f(t)$ die Annahme gemacht werden, dass:

$$f(t) = C + \varphi(t)$$

ist, wo C eine Constante bedeutet und $\varphi(t)$ als unendlich klein betrachtet werden darf. Nach der im vorigen Abschnitt eingeführten Bezeichnung hat man:

$$u(t) = U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + R + hU_1;$$

auch das Glied $R + hU_1$ soll als unendlich klein angesehen werden. Substituirt man diese Werthe von $f(t)$ und $u(t)$ in die Gleichung (10), so erhält man bei Vernachlässigung einer kleinen Grösse höherer Ordnung:

$$(11) \quad v = C\left(U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + R + hU_1\right) + \int_0^t \varphi(t')\, dt' \frac{\partial U\left(\frac{z}{2\sqrt{a(t-t')}}\right)}{\partial t}.$$

Es möge der Werth von z für den vordersten Canal, also 5,46 mm, durch z_0, und der Werth von v für $x = \frac{l}{2}$, $y = \frac{l}{2}$, $z = z_0$ durch v_0 bezeichnet werden. Für diese Werthe von x, y, z ist, wie erwähnt, $R + hU_1$ als verschwindend zu betrachten; man hat daher:

$$v_0 = CU\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right) + \int_0^t \varphi(t')\, dt' \frac{\partial U\left(\frac{z_0}{2\sqrt{a(t-t')}}\right)}{\partial t}.$$

Diese Gleichung schreibe man:

$$(12) \quad v_0 = CU\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right) + \psi(t),$$

aus der genauere Werth von a zu ermitteln. Nun sind in den Würfel aber Canäle gebohrt, in diese sind die Enden von Thermoketten eingeführt, und auf die Temperaturen der Löthstellen dieser können allein die Beobachtungen sich beziehen. Es soll zu zeigen versucht werden, dass die Gleichungen (12) und (13) in der angegebenen Weise benutzt werden dürfen, auch, wenn man durch v die Temperaturen dieser Löthstellen bezeichnet, gerechnet von der ursprünglichen Temperatur des Würfels. Dabei soll aber nur der Fall ins Auge gefasst werden, dass die Seitenflächen und die Hinterfläche des Würfels keinen merkbaren Einfluss auf die Verbreitung der Wärme in ihm haben, das sehr kleine Glied $R + h U_1$ in der Gleichung (13) also vernachlässigt werden darf.

Der Durchmesser eines jeden der Canäle soll als unendlich klein angenommen werden; der Einfluss desselben auf die Temperaturvertheilung in dem Würfel wird sich dann nur auf unendlich kleine Entfernungen von seiner Wand hin erstrecken. Man denke sich eine Fläche s, die die Umgebung des Canals in einer Weite von dem übrigen Theile des Würfels abgrenzt, die klein, aber gross genug ist, um einen Einfluss des Canals auf die Temperaturen jenseits derselben auszuschliessen. Diese Fläche s, deren grösster Theil als eine cylindrische Fläche von kreisförmigem Querschnitt gedacht werden möge, ergänze man zu einer geschlossenen, indem man die Cylinderfläche in die Luft hin verlängert und einen Querschnitt (der durch die Drähte der Thermokette hindurchgeht) hinzufügt. Man stelle sich die Aufgabe, die Wärmebewegung in dem Systeme zu ermitteln, das durch die so gebildete Fläche vollständig begrenzt ist. Die Umgebung des Würfels hat die Temperatur Null; dieselbe Temperatur haben die Querschnitte der Drähte der Thermokette, die zu der begrenzenden Fläche gehören, und man wird annehmen dürfen, dass die ausserhalb des Würfels befindlichen Stücke dieser Drähte ihre Wärme gegen eine Umgebung von derselben Temperatur ausstrahlen. Die Elemente der Fläche s haben diejenigen Temperaturen, die sie zur selben Zeit haben würden, wenn der Canal nicht vorhanden wäre, Temperaturen, die wie bisher, durch v bezeichnet werden sollen. Bedeutet V die Temperatur irgend

eines Punktes des betrachteten Systemes zur Zeit t, so ist V durch v eindeutig bestimmt, wenn man noch berücksichtigt, dass zur Zeit $t = 0$ das ganze System die Temperatur Null besass; und zwar stellt sich V dar als ein über die Fläche s und das Zeitintervall t zu nehmendes Integral, das sich bezeichnen lässt als eine homogene, lineare Funktion der Werthe, welche v in der Fläche s und in dem Zeitintervall t annimmt. Jeder dieser Werthe nun lässt sich nach der Taylor'schen Reihe so entwickeln, dass das erste Glied der Werth von v ist, der dem Zeitpunkte t und dem Werthe von z entspricht, der für die Spitze gilt, in die der Canal ausläuft, und die folgenden Glieder die Differentialquotienten dieses Werthes nach t und z enthalten. Es folgt daraus für V eine Reihe, die bezeichnet werden kann als eine homogene, lineare Funktion von v und seinen Differentialquotienten nach t und z. Das gilt auch, wenn V auf einen Punkt der Löthfläche bezogen wird; also auch, wenn, wie es nun geschehen soll, durch V die aus den Galvanometerbeobachtungen abzuleitende Temperatur der Löthstelle bezeichnet wird, die ein gewisses Mittel aus den Temperaturen der einzelnen Punkte der Löthfläche ist. Die Coëfficienten der einzelnen Glieder dieses V sind ausschliesslich von der Gestalt des Canals und der Gestalt, Lage und Natur des eingesenkten Theiles der Thermokette abhängig; sie sollen als gleich für die verschiedenen benutzten Thermoketten angenommen werden. Fasst man den bezeichneten Ausdruck von V als eine Funktion der beiden Veränderlichen t und z auf, so hat man:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \quad \text{für } t = 0 \quad V = 0 \quad \text{und für } z = \infty \quad V = 0,$$

da:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

ist und v, d. h. bei der in der Gleichung (10) benutzten Bezeichnungsweise:

$$\int_0^t f(t')\,dt' \frac{\partial U\left(\frac{z}{2\sqrt{a(t-t')}}\right)}{\partial t},$$

mit allen seinen Differentialquotienten nach t und z für $t = 0$

und für $z = \infty$ verschwinden. Aus diesen Eigenschaften von V folgt aber durch Schlüsse, die mit denen ganz übereinstimmen, durch welche die Gleichungen (12) und (13) abgeleitet sind, dass, wenn man den Werth von V für $z = z_0$ durch V_0 bezeichnet und:

$$V_0 = CU\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right) + \psi(t)$$

setzt, indem man dem Zeichen $\psi(t)$ eine von seiner früheren verschiedene Bedeutung giebt:

$$V = CU\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + \int_0^t \psi(t')\,dt' \frac{\partial U\left(\frac{z-z_0}{2\sqrt{a(t-t')}}\right)}{\partial t}$$

wird. Diese Gleichungen unterscheiden sich aber von den Gleichungen (12) und (13), abgesehen von dem Fehlen des Gliedes $R + hU_1$, das wir hier als zu vernachlässigen angenommen hatten, nur dadurch, dass V und V_0 an die Stelle von v und v_0 getreten sind.

Es werde nun durch v die von der ursprünglichen Temperatur des Würfels an gerechnete Temperatur der in einen der Canäle eingesenkten Löthstelle einer Thermokette bezeichnet; die Temperatur der zweiten Löthstelle sei die ursprüngliche des Würfels und E die elektromotorische Kraft der Thermokette. Die Galvanometerbeobachtungen lehren zunächst dieses E kennen, aus ihm ist auf v zu schliessen. Näherungsweise sind v und E einander proportional; wir fanden es aber nöthig, die Abweichungen von dieser Proportionalität zu berücksichtigen und haben:

$$v = p(E - \mu E^2) \tag{14}$$

gesetzt, wo p und μ von v unabhängige Grössen bedeuten. Bezeichnet man den Werth von E für $v = v_0$ durch E_0, oder, um seine Abhängigkeit von t anzudeuten, durch $E_0(t)$, so ist ebenso:

$$v_0 = p\big(E_0(t) - \mu E_0^2(t)\big).$$

Diese Ausdrücke sind für v_0 und v in die Gleichungen (12) und (13) zu substituiren. Aus der ersteren dann $\psi(t)$ für alle in Betracht kommenden Werthe von t zu berechnen, wäre

lästig; man kann die Mühe verringern, indem man b[illegible] dass μ und $\psi(t)$ nur klein sind. Infolge dieses U[illegible] kann man in dem Gliede $p\mu E_0^2(t)$ der Gleichung 12

$$E_0(t) = \frac{C}{p} U\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right)$$

setzen und erhält dann aus ihr:

$$\psi(t) = p E_0(t) - C U\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right) - \mu \frac{C^2}{p} U^2\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right)$$

Diesen Werth setze man in die Gleichung (13 und [illegible] C an Stelle von $\frac{C}{p}$, indem man diesem Buchstaben eine [illegible] Bedeutung giebt; man findet dann:

$$E - \mu E^2 = C\left(U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + R + h U_1\right.$$

$$+ \int_0^t \left(E_0(t') - C U\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at'}}\right) - \mu C^2 U^2\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right) dt' \frac{\partial U_1}{\partial t'}\right.$$

Auch das neue C kann innerhalb gewisser Grenzen [illegible]kürlich gewählt werden; es muss nur so gewählt werden, [illegible]

$$E_0(t) - C U\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right)$$

klein ist.

Die gefundene Gleichung wird zur numerischen Re[illegible] bequemer, wenn man an Stelle von t' eine neue Integrat[illegible] variable, die U genannt werden möge, durch die Glei[illegible]

$$U = U\left(\frac{z - z_0}{2\sqrt{a(t - t')}}\right)$$

einführt; sie wird dann:

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} & E - \mu E^2 = C\left(U\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right) + R + h U_1\right. \\ & + \int_0^{U\left(\frac{z - z_0}{2\sqrt{at}}\right)} \left(E_0(t') - C U\left(\frac{z_0}{2\sqrt{at}}\right) dU - \mu C^2 \int_0^{U\left(\frac{z - z_0}{2\sqrt{at}}\right)} U^2\left(\frac{z_0}{2\sqrt{a}}\right.\right. \end{aligned}\right.$$

Bei den bisher gemachten Auseinandersetzungen ist angenommen, dass die Leitungsfähigkeit k und das Product aus der specifischen Wärme in die Dichtigkeit, c, also auch das Verhältniss dieser beiden Grössen, a, constant sind. Thatsächlich sind dieselben von der Temperatur abhängig, und der auf die angegebene Weise berechnete Werth von a wird nur für eine gewisse Temperatur richtig sein. Diese Temperatur soll nun ermittelt werden. Dabei kann statt des Falles, der bei den Versuchen verwirklicht war, der einfachere und mit diesem sehr nahe übereinstimmende ins Auge gefasst werden, dass für die Temperatur u die Bedingungen gelten, dass:

$$\text{für } t = 0 \qquad u = 0,$$
$$\text{für } z = 0 \quad u = 1, \qquad \text{für } z = \infty \quad u = 0$$

ist. Es ist dann u eine Function der beiden Variabeln t und z, und die Differentialgleichung (1) vereinfacht sich in:

$$c\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial k\frac{\partial u}{\partial z}}{\partial z}.$$

c und k sind hier aber Functionen von u; von diesen soll angenommen werden, dass:

$$k = k_0 + k_1 u, \qquad c = c_0 + c_1 u$$

ist, wo k_0, k_1, c_0, c_1 Constanten sind, und zwar k_1 und c_1 Constanten, die als unendlich klein angesehen werden können. Dann ist:

(16) $$a = a_0 + a_1 u,$$

wo:

$$a_0 = \frac{k_0}{c_0} \quad \text{und} \quad \frac{a_1}{a_0} = \frac{k_1}{k_0} - \frac{c_1}{c_0}.$$

Unter diesen Voraussetzungen hat es keine Schwierigkeiten, die Function u mit Rücksicht auf die unendlich kleinen Glieder niedrigster Ordnung zu bestimmen. Die Differentialgleichung für dieselbe ist dann:

$$(c_0 + c_1 u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left((k_0 + k_1 u)\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

oder:

$$c_0\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c_1}{2}\frac{\partial (u^2)}{\partial t} = k_0\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{k_1}{2}\frac{\partial^2 (u^2)}{\partial z^2}.$$

Ihr sowohl, als den für u angegebenen Grenzbedingungen kann man durch eine Function des einen Arguments $\frac{x}{\sqrt{t}}$ genügen. Man setze:

$$x = \frac{z}{2\sqrt{a_0 t}};$$

dann ist, wenn Ω eine Function von x bedeutet:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{x}{t}\frac{d\Omega}{dx}, \qquad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = \frac{1}{4a_0 t}\frac{d^2\Omega}{dx^2}.$$

Macht man hier, unter der Voraussetzung, dass u eine Function von x ist, einmal $\Omega = u$, dann $\Omega = u^2$, so wird die Differentialgleichung für u:

$$2x\frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{c_1}{c_0}x\frac{d(u^2)}{dx} - \frac{k_1}{2k_0}\frac{d^2(u^2)}{dx^2},$$

und die beiden willkürlichen Constanten, welche das allgemeine Integral derselben enthält, sind gerade ausreichend, die beiden Grenzbedingungen:

$$\text{für } x = 0 \quad u = 1, \qquad \text{für } x = \infty \quad u = 0$$

zu erfüllen.

Vernachlässigt man die mit c_1 und k_1 behafteten Glieder, so wird $u = U(x)$, oder, wie der Kürze wegen geschrieben werden soll, $= U$; mit der erforderlichen Genauigkeit ist dann die Differentialgleichnng für u:

$$2x\frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{c_1}{c_0}x\frac{d(U^2)}{dx} - \frac{k_1}{2k_0}\frac{d^2(U^2)}{dx^2}.$$

Das allgemeine Integral derselben ist:

$$u = A + BU,$$

wo A und B als Functionen von x aus den Gleichungen

$$\frac{dA}{dx} + U\frac{dB}{dx} = 0$$

$$\frac{dU}{dx}\frac{dB}{dx} = -\frac{c_1}{c_0}x\frac{d(U^2)}{dx} - \frac{k_1}{2k_0}\frac{d^2(U^2)}{dx^2}$$

zu bestimmen sind. Aus diesen folgt bei Rücksicht auf Gleichung (16):

$$\frac{dA}{dx} = -2\frac{a_1}{a_0}xU^2 + \frac{k_1}{k_0}U\frac{dU}{dx}, \qquad \frac{dB}{dx} = -2\frac{a_1}{a_0}xU - \frac{k_1}{k_0}\frac{dU}{dx}.$$

Benutzt man, dass:

$$\int_0^x x\,dx\,U = \frac{x^2 U}{2} + \frac{1-U}{4} - \frac{x e^{-x^2}}{2\sqrt{\pi}}$$

$$\int_0^x x\,dx\,U^2 = \frac{x^2 U^2}{2} + \frac{1-U^2}{4} - \frac{U x e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2\pi}\left(1 - e^{-2x^2}\right)$$

ist und bestimmt die additiven, willkürlichen Constanten, die A und B enthalten, so dass $u = 1$ für $x = 0$ und $u = 0$ für $x = \infty$ wird, so ergiebt sich:

$$u = U + \frac{a_1}{a_0}\left(\frac{U x e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{U - e^{-2x^2}}{\pi}\right) + \frac{k_1}{2k_0} U(1-U).$$

Berechnet man aus einem beobachteten Werthe von u die Grösse a, ohne Rücksicht auf ihre Abhängigkeit von der Temperatur zu nehmen, so thut man das nach der Gleichung:

$$u = U\left(\frac{z}{2\sqrt{a t}}\right).$$

Dieselbe lässt sich schreiben:

$$u = U + (a - a_0)\frac{\partial U}{\partial a_0},$$

oder, wenn man u_m die „mittlere" Temperatur nennt, für welche der für a gefundene Werth bei Rücksicht auf die Abhängigkeit dieser Grösse von der Temperatur gilt:

$$u = U + a_1 u_m \frac{\partial U}{\partial a_0}, \quad \text{d. h.} \quad u = U + \frac{a_1}{a_0} u_m \frac{1}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2}.$$

Die Vergleichung dieses Ausdrucks von u mit dem vorher abgeleiteten ergiebt:

$$u_m = U + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{U e^{x^2} - e^{-x^2}}{x} + \frac{k_1}{k_0}\frac{a_0}{a_1}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{x^2}}{x} U(1-U),$$

oder, wenn man $\frac{c_1}{c_0}$ an Stelle von $\frac{k_1}{k_0}$ durch die Gleichung:

$$\frac{k_1}{k_0} = \frac{a_1}{a_0} + \frac{c_1}{c_0}$$

einführt:

$$(17)\quad \begin{cases} u_m = U + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{Ue^{x^2} - e^{-x^2}}{x} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e^{x^2}}{x} U(1-U) \\ \qquad + \frac{c_1}{c_0} \frac{a_0}{a_1} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e^{x^2}}{x} U(1-U). \end{cases}$$

Da in dieser Gleichung nur das Verhältniss von c_1 und a_1 vorkommt, so lässt sich unbeschadet ihrer Gültigkeit die Definition dieser Grössen so verallgemeinern, dass man darunter die Aenderungen versteht, die c und a in irgend einem Temperaturintervall, z. B. bei der Erwärmung um 1° C. erleiden.

Es soll nun auseinandergesetzt werden, wie wir die am Galvanometer gemachten Beobachtungen berechnet haben.

Es sei eine Schliessung aus dem Galvanometer und einer Thermokette gebildet; W sei der Widerstand derselben, E die elektromotorische Kraft zur Zeit t, s die zur selben Zeit gemachte Scalenablesung. Nimmt man den Ablenkungswinkel des Spiegels als unendlich klein an und sieht ab von den Aenderungen des magnetischen Meridians und von der elastischen Nachwirkung des Aufhängefadens, so hat man:

$$\alpha^2 \frac{d^2 s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + s - s_0 = \frac{\gamma E}{W},$$

wo α, β, γ Constanten sind und s_0 die Scalenablesung bezeichnet, die der Gleichgewichtslage des Spiegels für den Fall entspricht, dass kein Strom durch das Galvanometer fliesst. Schon wegen der fortwährenden Aenderungen des magnetischen Meridians erfordert diese Gleichung eine Modification. Die Gleichgewichtslage des Spiegels für den Fall, dass kein Strom vorhanden ist, ist nicht constant; aber sie ändert sich der Regel nach sehr langsam und für ein hinreichend kleines Zeitintervall proportional mit der Zeit. Ist s_0 die ihr entsprechende Scalenablesung zur Zeit $t = 0$, so ist sie zur Zeit t, wenn t nicht zu gross ist, $s_0 + \varepsilon t$, wo ε eine kleine Constante ist, die aber bei jedem Beobachtungssatze von neuem bestimmt werden muss. Man hat dann:

$$\alpha^2 \frac{d^2 s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + s - s_0 - \varepsilon t = \frac{\gamma E}{W}.$$

Diese Gleichung verwandelt sich bei Rücksicht auf die elastische Nachwirkung nach der von Hrn. Boltzmann aufgestellten Theorie[1]), wenn man annimmt, dass längere Zeit vor dem Augenblick $t = 0$ der Spiegel grössere Ablenkungen nicht erlitten hat, und wenn man nur mässige positive Werthe von t ins Auge fasst, in die folgende:

$$(18)\quad \begin{cases} \frac{\gamma E}{W} = \alpha^2 \frac{d^2 s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + s - s_0 - \varepsilon t \\ - \eta \left\{ (s - s_0) \log t + \int_0^t \frac{dw}{w} \left(s(t-w) - s(t) \right) \right\}, \end{cases}$$

wo η eine neue, kleine Constante bedeutet und $s(t)$ für s geschrieben, s also als Functionszeichen gebraucht ist. Das Glied εt stellt dann nicht allein den Einfluss der Aenderungen des magnetischen Meridians dar, sondern zugleich den Einfluss eines Theiles der elastischen Nachwirkung, nämlich desjenigen, der eine Folge von Ablenkungen des Spiegels ist, die lange Zeit vor dem Augenblicke $t = 0$ stattgefunden haben.

Ist die Bewegung des Spiegels so langsam, dass die mit den Factoren α^2 und β behafteten Glieder vernachlässigt werden können, so ist einfacher:

$$(19)\quad \frac{\gamma E}{W} = s - s_0 - \varepsilon t - \eta \left\{ (s - s_0) \log t + \int_0^t \frac{dw}{w} \left(s(t-w) - s(t) \right) \right\}.$$

Ist in dem Intervall von $t = 0$ bis $t = t_1$ $\quad s = s_1$
$= t_1 \quad = t_2 \quad = s_2$,
wo s_1, s_2, .. näherungsweise constant sind, und liegt t in dem Intervall von $t = t_n$ bis $t = t_{n+1}$, so hat man:

$$(20)\quad (s - s_0) \log t + \int_0^t \frac{dw}{w} \left(s(t-w) - s(t) \right)$$
$$= (s_1 - s_0) \log t + (s_2 - s_1) \log (t - t_1) + (s_3 - s_2) \log (t - t_2) + .$$
$$+ (s_{n+1} - s_n) \log (t - t_n).$$

Bei der endlichen Grösse, die die Ablenkungswinkel bei unseren Versuchen hatten, wird man von diesen Gleichungen auch Ge-

[1]) Boltzmann, Wien. Ber. October 1874.

brauch machen und die Grössen α, β, ε und η unbedenklich als constant betrachten dürfen, da die Versuche so angeordnet waren, dass die von ihnen abhängigen Glieder nur verhältnissmässig kleine Werthe hatten; dagegen war zu vermuthen, dass γ sich als abhängig von der Grösse des Ablenkungswinkels zeigen würde. Versuche, die zur Bestimmung dieser Abhängigkeit angestellt sind, haben aber ergeben, dass auch γ als constant betrachtet werden darf.

Um die Art, wie die elastische Nachwirkung in Rechnung gebracht ist, zu prüfen und den Werth von η zu bestimmen, wurde auf folgende Weise verfahren. Der Strom einer aus Kupfer und Eisendrähten gebildeten Thermokette, deren Löthstellen einerseits durch siedendes Wasser, andererseits durch fliessendes Wasser der Wasserleitung auf constanten Temperaturen erhalten wurden, wurde während einer gewissen Zeit durch das Galvanometer geleitet, und zu gewissen Zeitpunkten vor dem Beginn des Stromes, während der Dauer und nach dem Aufhören desselben die Galvanometerscala abgelesen. Es wurden acht solcher Beobachtungssätze gemacht, die voneinander sich unterschieden durch die Dauer und die Intensität des Stromes, welche durch Einschaltung von Widerständen geändert werden konnte. Zwischen je zwei dieser aufeinander folgenden Versuche liess man einen Zeitraum vergehen, der hinreichte, um zu bewirken, dass die elastische Nachwirkung, die eine Folge des früheren war, während des späteren als eine lineare Function der Zeit angesehen werden durfte. Bei den Beobachtungen, die nach Oeffnung des Stromkreises ausgeführt waren, war die Bewegung so langsam, dass die von den Constanten α und β abhängigen Glieder der Gleichung (18) vernachlässigt werden konnten; sie durften daher nach der Gleichung (19) berechnet werden; es war ferner $E = 0$, und es konnte die für die Gleichung (20) gemachte Voraussetzung als erfüllt angenommen, $n = 1$, $t_1 =$ der Dauer des Stromes, $s_1 =$ der während desselben gemachten Scalenablesung und $s_2 = s_0$ gesetzt werden. Hiernach geben die Gleichungen (19) und (20):

$$s - s_0 = \varepsilon t + \eta(s_1 - s_0) \log \frac{t}{t - t_1}. \tag{21}$$

Beispielsweise möge einer der Beobachtungssätze angeführt werden:

t	s	$s-s_0$	$s-s_0-\varepsilon t$	η
−300	486,35	—	—	—
− 60	486,35	—	—	—
0		Strom geschlossen		
60	852,00			
90		Strom unterbrochen		
150	487,40	1,05	1,07	0,00735 m
180	487,15	0,80	0,82	0,00753 m
210	487,00	0,65	0,68	0,00764 m
240	486,90	0,55	0,59	0,00789 m
270	486,80	0,45	0,49	0,00760 m
300	486,75	0,40	0,44	0,00776 m
360	486,65	0,30	0,35	0,00766 m
480	486,55	0,20	0,27	0,00819 m
600	486,45	0,10	0,18	—

Die erste Columne enthält die Zeit t, in Secunden ausgedrückt, die zweite die entsprechenden Ablesungen s, bei denen die Zehntel und halben Zehntel eines Scalentheiles geschätzt sind. Aus derselben ist zu entnehmen, dass:

$$t_1 = 90, \qquad s_0 = 486{,}35, \qquad s_1 - s_0 = 366.$$

Die dritte Columne enthält die Werthe von $s - s_0$. Aus je zweien ihrer Zahlen können mit Hülfe der Gleichung (21) die beiden Unbekannten ε und η berechnet werden. Aus der ersten und letzten haben wir den Werth von ε bestimmt und die aus ihm sich ergebenden Werthe von $s - s_0 - \varepsilon t$ in der folgenden Columne aufgeführt. Die letzte Columne enthält die dann aus der Gleichung (21) folgenden Werthe von η; m bedeutet dabei den Modulus der Briggs'schen Logarithmen, d. h. die Zahl 0,4343; in dieser Form sind die Werthe von η angegeben, weil bei den numerischen Rechnungen immer das Verhältniss $\eta : m$ auftritt. Endlich ist ein Mittelwerth von η nach der Methode der kleinsten Quadrate unter der Voraussetzung abgeleitet, dass bei den einzelnen Werthen von $s - s_0 - \varepsilon t$ gleich grosse Fehler gleich wahrscheinlich sind, d. h. nach der Formel:

$$\eta = \frac{\sum \frac{(s-s_0-\varepsilon t)^2}{\eta}}{\sum \frac{(s-s_0-\varepsilon t)^2}{\eta^2}}, \tag{22}$$

wo unter den Summenzeichen η den aus dem entsprech... $s - s_0 - \varepsilon t$ berechneten Werth bedeutet. So ergab sich

$$\eta_1 = 0{,}00755\, m.$$

Die auf diese Weise aus den acht Beobachtungs... abgeleiteten Werthe von $\eta : m$ sind in der folgenden k... Tafel zusammengestellt, deren Verticalreihen mit d... cunden ausgedrückten Dauer des Stromes überschrieben ... während den Horizontalreihen die durch diese hervorgeb... Ablenkung, also $s_1 - s_0$, vorgesetzt ist:

	90	180
105	0,00550	0,00712
207	597	651
366	755	702
464	749	727

Indem wir nach der Gleichung (22) einen Mittelw... von η_1 aus allen acht Beobachtungssätzen berech... fanden wir:

$$\eta_1 = 0{,}007\, m.$$

Die Uebereinstimmung der für η gefundenen Zahlen ist ... gross; aber sie ist nicht geringer als sie erwartet werden ... in Rücksicht auf die Kleinheit des Betrages, den die elastis... Nachwirkung namentlich nach den kleineren Ablenkungen ... sass. Sie ist unseres Erachtens ausreichend, um zu z... dass mit Hülfe der Boltzmann'schen Theorie bei Galvanom... beobachtungen die Fehler zum grössten Theile sich verm... lassen, die aus der Nichtbeachtung der elastischen Nachwirk... hervorgehen können.

Erwähnt werden mögen noch Versuche anderer Art, ... wir zur Prüfung der Theorie und des für η_1 gefundenen Za... werthes angestellt haben. Zur Zeit $t = 0$ wurde ein Ma... dem Galvanometer plötzlich genähert, in der Stellung, di... dadurch erhalten hatte, bis zur Zeit $t = t_1$ gelassen und di... wieder an seinen ursprünglichen Ort gebracht. Ist M das ... einer gewissen Einheit ausgedrückte, von dem Magneten ... den beweglichen Theil des Galvanometers ausgeübte Drehu... moment und s_1 ein Näherungswerth für s während der W... kung des Magneten, so ist, wenn t zwischen 0 und t_1 lie...

$$M = s - s_0 - \varepsilon t - \eta(s_1 - s_0)\log t$$

und, wenn t grösser als t_1 liegt:

$$0 = s - s_0 - \varepsilon t - \eta(s_1 - s_0)\log \frac{t}{t - t_1}.$$

Berechnet man mit Hülfe der letzten Gleichung ε, so giebt die erste für jeden Werth von t einen von M. Aus der Uebereinstimmung der Werthe, die so für M gefunden werden, ist die Richtigkeit der gemachten Annahmen zu beurtheilen. Bei einem Versuche dieser Art ergaben sich folgende Zahlen:

t	s	M	t	s	M
−120	499,00	—	120	874,40	369,85
− 60	499,00	—	150	874,60	369,80
0	Magnet genähert		180	Magnet entfernt	
60	873,60	369,85	210	501,00	—
90	874,10	369,89	270	500,20	—

Bei mehrfacher Wiederholung des Versuches zeigten sich keine grösseren Differenzen.

In ähnlicher Weise, wie hier das Drehungsmoment eines Magnets gemessen war, wurde bei den Versuchen, durch welche die Constanz der durch die Gleichung (18) eingeführten Grösse γ geprüft werden sollte, das Drehungsmoment von Strömen verschiedener Intensität im Galvanometerdrahte gemessen. Zur Erzeugung dieser Ströme diente die schon erwähnte Thermokette aus Kupfer und Eisen und ein System von bekannten Widerständen. Der Widerstand der Thermokette, des Galvanometergewindes und der nothwendigen Verbindungsdrähte war = 1,13 S.-E. gefunden worden; diesem wurde bei den einzelnen Versuchen hinzugefügt ein Widerstand von 30, 50, 100 und 200 S.-E. Auch hier wurden Ablesungen nur gemacht, wenn die Bewegung des Spiegels so langsam war, dass die mit den Factoren α^2 und β behafteten Glieder der Gleichung (18) vernachlässigt werden konnten, und auch hier durfte die Gleichung (20) in Anwendung gebracht werden. Es war daher zu setzen:

$$(23)\quad \gamma \frac{E}{W} = s - s_0 - \varepsilon t - \eta\{(s_1 - s_0)\log t + (s_2 - s_1)\log(t - t_1) + .\}.$$

wo unter den Summenzeichen η den aus dem entsprechenden $s - s_0 - \varepsilon t$ berechneten Werth bedeutet. So ergab sich:

$$\eta = 0{,}00755\, m.$$

Die auf diese Weise aus den acht Beobachtungssätzen abgeleiteten Werthe von $\eta : m$ sind in der folgenden kleinen Tafel zusammengestellt, deren Verticalreihen mit der in Secunden ausgedrückten Dauer des Stromes überschrieben sind, während den Horizontalreihen die durch diese hervorgebrachte Ablenkung, also $s_1 - s_0$, vorgesetzt ist:

	90	180
105	0,00550	0,00712
207	597	651
366	755	702
464	749	727

Indem wir nach der Gleichung (22) einen Mittelwerth von η aus allen acht Beobachtungssätzen berechneten, fanden wir:

$$\eta = 0{,}007\, m.$$

Die Uebereinstimmung der für η gefundenen Zahlen ist nicht gross; aber sie ist nicht geringer als sie erwartet werden durfte in Rücksicht auf die Kleinheit des Betrages, den die elastische Nachwirkung namentlich nach den kleineren Ablenkungen besass. Sie ist unseres Erachtens ausreichend, um zu zeigen, dass mit Hülfe der Boltzmann'schen Theorie bei Galvanometerbeobachtungen die Fehler zum grössten Theile sich vermeiden lassen, die aus der Nichtbeachtung der elastischen Nachwirkung hervorgehen können.

Erwähnt werden mögen noch Versuche anderer Art, die wir zur Prüfung der Theorie und des für η gefundenen Zahlenwerthes angestellt haben. Zur Zeit $t = 0$ wurde ein Magnet dem Galvanometer plötzlich genähert, in der Stellung, die er dadurch erhalten hatte, bis zur Zeit $t = t_1$ gelassen und dann wieder an seinen ursprünglichen Ort gebracht. Ist M das in einer gewissen Einheit ausgedrückte, von dem Magneten auf den beweglichen Theil des Galvanometers ausgeübte Drehungsmoment und s_1 ein Näherungswerth für s während der Wirkung des Magneten, so ist, wenn t zwischen 0 und t_1 liegt:

machen. An dem Galvanometer befand sich ein Umschalter, von dem ein Messingstück von erheblicher Länge, das bei geschlossener Leitung vom Strome durchflossen wurde, einen Theil ausmachte. Hatten die Stellen desselben, die mit den kupfernen Zuleitungsdrähten im Contact waren, eine Temperaturdifferenz, so entstand eine störende elektromotorische Kraft. Um den Einfluss dieser zu eliminiren, schalteten wir, statt den Galvanometerkreis zu öffnen, durch eine Wippe in ihn an Stelle der Thermokette einen Kupferdraht von demselben Widerstande ein und beobachteten dann die Stellung des Spiegels. Bei dieser Anordnung war die Veränderlichkeit der störenden elektromotorischen Kraft nicht mehr zu fürchten als die Veränderlichkeit des magnetischen Meridians und wurde mit dieser zusammen eliminirt.

Es soll nun die Methode angegeben werden, deren wir uns bedient haben, um die in der Gleichung (18) vorkommenden Constanten α und β zu bestimmen. Es bedurfte diese Bestimmung nur einer mässigen Genauigkeit, da die Werthe von α und β nur dazu dienen sollten, kleine Correctionen zu berechnen. Es wurde eine Schliessung gebildet aus dem Galvanometerdraht und einem zweiten Multiplicatorgewinde, innerhalb dessen ein kräftiger, etwa 200 gr schwerer Magnetstab seine Schwingungen ausführen konnte, die ebenfalls mit Spiegel, Scala und Fernrohr zu beobachten waren. Einmal erregt, bestanden solche Schwingungen längere Zeit mit langsam abnehmender Amplitude fort, und der Spiegel des Galvanometers führte Schwingungen von derselben Dauer aus. Diese Dauer konnte geändert werden durch Aenderung der bifilaren Aufhängung, mit der der Magnetstab versehen war. Bei einigen verschiedenen Werthen der Schwingungsdauer wurden die Amplituden des Magneten und des Galvanometers abwechselnd in gleichen, kleinen Zwischenräumen beobachtet und das Verhältniss der auf gleiche Zeitpunkte reducirten Amplituden berechnet. Die folgenden Ueberlegungen zeigen, wie aus den Werthen, die dieses Verhältniss bei bekannten Schwingungsdauern besitzt, α und β ermittelt werden konnten.

Die in Scalentheilen ausgedrückte Ablenkung des Magnetstabes aus seiner Gleichgewichtslage zur Zeit t kann:

$$= c \sin nt$$

gesetzt werden, wo c die in Scalentheilen ausgedrückte Amplitude und:

$$n = \frac{\pi}{T}$$

ist, wenn T die Dauer einer einfachen Schwingung bedeutet. Die Gleichung der Bewegung des Galvanometerspiegels ist dann, wenn u die in Scalentheilen ausgedrückte Ablenkung aus der Gleichgewichtslage zur Zeit t bezeichnet, N eine von t und n unabhängige Constante ist, und man absieht von den inducirten Strömen höherer Ordnung:

$$\alpha^2 \frac{d^2u}{dt^2} + 2\beta \frac{du}{dt} + u = cNn \cos nt.$$

Andererseits ist:

$$u = A \cos nt + B \sin nt,$$

wo A und B zwei unbekannte Constanten bedeuten. Die Differentialgleichung giebt für diese die Bedingungen:

$$cNn = A(1 - \alpha^2 n^2) + B2\beta n$$

$$0 = -A2\beta n + B(1 - \alpha^2 n^2).$$

Setzt man:

$$A^2 + B^2 = C^2 c^2,$$

bezeichnet also durch C das Verhältniss der Amplituden beider Schwingungen, so folgt hieraus:

$$C^2 = \frac{N^2 n^2}{(1 - \alpha^2 n^2)^2 + 4\beta^2 n^2}.$$

Hat man drei Beobachtungen von C für verschiedene Werthe von n, so kann man aus den hiernach geltenden Gleichungen N eliminiren und α und β bestimmen. Wir hatten eine grössere Zahl von Beobachtungen und haben α und β so bestimmt, dass:

$$\Sigma (dC)^2$$

ein Minimum wurde, wenn dC den sich ergebenden Fehler einer Beobachtung bezeichnet. Die für C^2 abgeleitete Gleichung lässt sich schreiben:

$$\frac{1}{C^2} = \frac{\alpha^4}{N^2} n^2 + \frac{4\beta^2 - 2\alpha^2}{N^2} + \frac{1}{N^2}\frac{1}{n^2},$$

oder, wenn man:

$$\frac{\alpha^4}{N^2} = x, \qquad \frac{4\beta^2 - 2\alpha^2}{N^2} = y, \qquad \frac{1}{N^2} = z$$

setzt:

$$\frac{1}{C^2} = x n^2 + y + z\frac{1}{n^2}.$$

Der Fehler von $\frac{1}{C^2}$ bei einer Beobachtung ist also:

$$\frac{1}{C^2} - x n^2 - y - \frac{z}{n^2};$$

betrachtet man ihn als unendlich klein, so ist er andererseits aber auch:

$$= -2\frac{dC}{C^3}.$$

Aus dieser Gleichung kann man den Werth von dC nehmen und findet dann, dass die aufgestellte Bedingung übereinstimmt mit der, dass:

$$\sum\left(x C^3 n^2 + y C^3 + z\frac{C^3}{n^2} - C\right)^2$$

ein Minimum ist. Hieraus folgen die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x\sum C^6 n^4 + y\sum C^6 n^2 + z\sum C^5 &= \sum C^4 n^2\\
x\sum C^5 n^2 + y\sum C^6 \quad + z\sum \frac{C^5}{n^2} &= \sum C^4\\
x\sum C^5 \quad + y\sum \frac{C^5}{n^2} \quad + z\sum \frac{C^6}{n^4} &= \sum \frac{C^4}{n^2}.
\end{aligned}$$

Sind diese Gleichungen nach x, y, z aufgelöst, so hat man:

$$\alpha^4 = \frac{x}{z}, \qquad 4\beta^2 - 2\alpha^2 = \frac{y}{z}.$$

Die Messungen ergaben die folgenden zusammengehörigen Werthe von T und C:

T	5,549	3,951	2,911	2,319	1,529 Sec.
C	0,676	0,889	1,042	1,042	0,849
	0,676	0,899	1,034	1,044	0,841
	0,672	0,891	1,035	1,040	0,828
	0,676	0,886	1,037	1,045	0,822
	0,678	0,887	1,033	1,037	0,820
	0,672	0,887	1,034	1,033	0,830
	—	0,886	1,031	1,039	0,827
	—	0,885	1,029	1,039	0,818
	—	—	1,031	—	0,815
	—	—	—	—	0,809
	—	—	—	—	0,823
	—	—	—	—	0,839
	—	—	—	—	0,823
Mittel	0,676	0,889	1,034	1,040	0,826

Hieraus folgt:

$$\alpha = 0{,}8228 \text{ Sec.} \qquad \beta = 0{,}5816 \text{ Sec.}$$

Berechnet man rückwärts mit diesen Werthen von α und β bei Benutzung des Werthes, den die Rechnung für N gegeben hat, die Werthe von C für die einzelnen Schwingungsdauern, so findet man:

0,676 0,893 1,035 1,038 0,829,

in guter Uebereinstimmung mit den Mittelzahlen der Beobachtungen.

Bei diesen Versuchen war der Widerstand des Galvanometerkreises 2,7 S.-E. Von diesem Widerstande muss, streng genommen, der Werth der Grösse β abhängig sein, weil ein Theil derselben von den Strömen herrührt, die in dem Galvanometerkreise durch die Magnete des Galvanometers inducirt werden. Es wurde der Widerstand auf 6,9 S.-E. gebracht und dann für einige Schwingungsdauern C beobachtet. Es zeigte sich, dass die gefundenen Werthe von C sich in genügender Weise darstellen liessen durch die alten Werthe von α und β und den Werth von N, der zu dem frühern im Verhältniss von 2,7 : 6,9 stand. Daraus folgt, dass β als unabhängig vom Widerstande des Galvanometerkreises anzusehen, die in diesem stattfindende Induction also unmerklich ist neben

der Induction in den Kupferhülsen des Galvanometers und der Lufttreibung.

Zur Berechnung unserer Versuche über die Wärmeleitung war noch nöthig die Kenntniss der Beziehung zwischen der elektromotorischen Kraft der benutzten Thermoketten und den Temperaturen ihrer Löthstellen. Mit Hrn. Avenarius[1]) haben wir angenommen, dass, wenn E die elektromotorische Kraft ist, und ϑ und ϑ_0 die Temperaturen sind, die Relation:

$$E = \mathfrak{a}\,(\vartheta - \vartheta_0)\left(1 + \mathfrak{b}\,(\vartheta + \vartheta_0)\right) \tag{24}$$

besteht, wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Constanten bezeichnen; es handelte sich darum, diese für eine unserer aus Neusilber und Kupfer zusammengesetzten Thermoketten zu bestimmen. Bei jedem der hierzu ausgeführten Beobachtungssätze wurden drei Temperaturen benutzt, die des schmelzenden Eises, die der Dämpfe des siedenden Wassers und eine mittlere Temperatur, die mit Hülfe eines Jolly'schen Luftthermometers gemessen wurde. Die Kugel desselben war mit der einen Löthstelle der Thermokette in ein mit Petroleum gefülltes Gefäss getaucht, das in einer grössern Wassermasse sich befand. Es wurde diese durch eine Lampe erwärmt, während das Petroleum durch eine Rührvorrichtung in Bewegung erhalten wurde. Die zweite Löthstelle war in ein langes und enges, unten geschlossenes Metallröhrchen geführt und wurde mit diesem abwechselnd in schmelzendes Eis und in die Dämpfe siedenden Wassers gebracht. Aus der Thermokette und dem Galvanometer war eine Schliessung gebildet, und der Widerstand derselben = 29,1 S.-E. gemacht, um Ablenkungen von der gewünschten Grösse zu erhalten. Durch eine Umschaltung wurde bewirkt, dass die Galvanometerablenkungen immer dieselbe Richtung hatten. Es wurden diese nach den Gleichungen (19) und (20) berechnet. Eine Beobachtungsreihe gab die folgenden Zahlen, wenn die Temperaturen ϑ und ϑ_0 nach den Graden der Celsius'schen Scala gerechnet werden:

[1]) Avenarius, Pogg. Ann. **119.** p. 406. 1863. u. **122.** p. 193. 1864.

$\gamma\frac{E}{W}$	$\vartheta - \vartheta_0$	$\vartheta + \vartheta_0$	$\gamma\frac{a}{W}$	b
230,74	46,85	46,85	4,636	0,00133
295,15	53,26	146,76	4,628	0,00135
229,96	46,74	46,74	4,625	0,00136
295,92	53,34	146,68	4,616	0,00138
229,08	46,63	46,63	4,616	0,00138
297,11	53,56	146,46		
		Mittel	4,624	0,00136

Die beiden letzten Columnen enthalten die Werthe, die die Gleichung (24) ergibt aus den Zahlen der ersten und zweiten, zweiten und dritten, .. Horizontalreihe der früheren Columnen. Zwei ähnliche Beobachtungsreihen, bei denen die mittlere Temperatur, die hier etwa 47° C. gewesen war, die Werthe von ungefähr 38° C. und 35° C. gehabt hat, ergaben:

$$\frac{\gamma a}{W} = 4{,}625 \qquad b = 0{,}00139$$

und:

$$= 4{,}587 \qquad = 0{,}00141.$$

Wir haben angenommen:

$$\frac{\gamma a}{W} = 4{,}612 \qquad b = 0{,}00139.^{1})$$

Bei den Versuchen mit dem Eisenwürfel war der Widerstand der Schliessung, W, ein kleinerer als bei diesen Hülfsversuchen, nämlich bei Benutzung der mit I bezeichneten Thermokette = 3,10 S.-E. Hier war daher:

$$\frac{\gamma a}{W} = 43{,}3.$$

Für diese Anordnung soll $\frac{\gamma}{W} = 1$ gesetzt werden, was darauf hinaus kommt, dass eine gewisse Einheit für die elec-

---

[1]) Bemerkt möge werden, dass aus den Messungen und der Theorie des Hrn. Avenarius (Pogg. Ann. 122. p. 213. 1864) der Coëfficient b für Kupfer und Neusilber sich viel kleiner ergiebt, als er hier gefunden wurde, nämlich = 0,00084. Wahrscheinlich liegt der Grund dieses Unterschiedes hauptsächlich darin, dass das Neusilber des Hrn. Avenarius ein anderes war als das unsrige.

tromotorische Kraft angenommen wird. Die linke Seite der Gleichung (18) oder (19) wird dann E, und zugleich wird:

$$a = 43{,}3.$$

Schreibt man die Gleichung (24):

$$\frac{E}{a(1+2b\vartheta_0)} = \vartheta - \vartheta_0 + \frac{b}{1+2b\vartheta_0}(\vartheta - \vartheta_0)^2,$$

so findet man aus ihr bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung:

$$\vartheta - \vartheta_0 = \frac{1}{a(1+2b\vartheta_0)}\left(E - \frac{b}{a(1+2b\vartheta_0)^2}E^2\right).$$

Daraus folgt für die durch die Gleichung (14) eingeführte Grösse μ, wenn ϑ_0 die ursprüngliche Temperatur des Würfels und zugleich die Temperatur der nicht im Würfel befindlichen Löthstelle der Thermokette, in Graden der Celsius'schen Scala ausgedrückt, bezeichnet:

$$\mu = \frac{b}{a(1+2b\vartheta_0)^2}. \tag{25}$$

Für a und b sind hier die eben angegebenen Zahlenwerthe zu setzen, ϑ_0 ist bei jedem Versuche zu ermitteln.

Es sollen nun die bei den Versuchen mit dem Würfel benutzten Vorrichtungen näher beschrieben werden.

Wie schon erwähnt, hatte der Würfel eine Kante von 140 mm Länge und war so aufgestellt, dass eine Kante vertical war. Er ruhte auf vier dünnen Holzklötzchen, die auf einem Holztische befestigt waren. In gleicher Ebene mit der zu bespritzenden, verticalen Vorderfläche des Würfels stand ein Schirm von Zinkblech, in welchem eine jene Fläche umgebende, quadratische Oeffnung sich befand, die nur sehr wenig grösser war als sie. Der zwischen beiden vorhandene Zwischenraum war mit Wachskitt geschlossen. Der Schirm hatte oben und an den beiden Seiten Ränder und endigte unten in einen flachen Trichter, sodass das aus der Brause gegen die Vorderfläche des Würfels spritzende Wasser abfliessen konnte, ohne direct die Temperatur der übrigen Würfelflächen zu beeinflussen.

Damit auch die bei dem Spritzen des Wassers oder durch andere Ursachen im Beobachtungsraum entstehenden Luft-

strömungen so wenig als möglich störend einwirkten, war der Tisch, auf dem der Würfel sich befand, ganz von hohen Pappschirmen umgeben.

Der Vorderfläche des Würfels gegenüber, in einem Abstande von 127 mm von derselben, war die Brause angebracht. Ihre Endfläche bildete ein Quadrat von 157 mm Seite und enthielt 264 runde Oeffnungen von etwa 0,5 mm Durchmesser.

Um zu prüfen, ob diese Zahl der Oeffnungen ausreichte, um der Vorderfläche des Würfels eine in allen ihren Punkten gleiche Temperatur zu ertheilen, wie die entwickelte Theorie sie voraussetzte, waren drei Versuche schon gemacht, als die Brause erst die Hälfte der genannten Zahl von Oeffnungen hatte. Der Werth von a, der sich im Mittel aus diesen drei Versuchen ergab, differirte von demjenigen, der aus drei späteren Versuchen folgte, bei denen die Zahl der Löcher verdoppelt war, im übrigen aber die gleichen Verhältnisse stattfanden, nur um 0,12 Proc.

Das Wasser wurde der Brause aus einem Reservoir zugeführt, welches aus der städtischen Wasserleitung oder mit erwärmten Wasser gefüllt werden konnte.

Zwischen der Brause und dem erwähnten, fest stehenden Zinkschirm war noch ein beweglicher Schirm aus gleichem Material vorhanden. Dieser konnte durch Verschieben in seiner Ebene in zwei Stellungen gebracht werden; bei der einen spritzte das aus der Brause kommende Wasser durch eine in dem Schirm befindliche quadratische Oeffnung gegen die Vorderfläche des Eisenwürfels, bei der andern traf es einen Theil des Schirmes und floss, geleitet durch Zinkstreifen, an ihm hinab in das Abflussrohr der Wasserleitung. Dieser Theil des Schirmes war gebildet aus drei, in kleinen Abständen von einander befestigten Zinkplatten, welche mit den zwischenliegenden Luftschichten den Eisenwürfel vor jeder Einwirkung des aus der Brause strömenden Wassers schützen sollten. Nachdem der Schirm bei dieser Stellung 10 bis 15 Secunden die Wasserstrahlen aufgenommen hatte, wurde er rasch in die zuerst erwähnte gebracht. Dadurch wurde bewirkt, dass das Bespritzen des Würfels plötzlich begann und dann mit gleichbleibender Kraft und Wassertemperatur geschah. Der Augen-

blick in dem es begann, wurde von dem Chronographen markirt mit Hülfe einer Vorrichtung, durch welche bei dem Verschieben des Schirmes ein elektrischer Strom momentan geschlossen wurde. Dieses Verschieben setzte zugleich ein Uhrwerk in Thätigkeit, dessen Zweck später angegeben werden soll.

In den Eisenwürfel waren, wie bereits erwähnt, drei verticale Canäle gebohrt, die in der Nähe der geraden Linie endigten, die durch den Mittelpunkt der Vorderfläche geht und auf dieser senkrecht steht. Ihr Durchmesser war 1,4 mm und ihre Enden bildeten rechtwinklige Kegel. Die Abstände der Spitzen dieser Kegel von der Vorderfläche (also die entsprechenden Werthe von z) wurden mit Hülfe eines eigens hierzu construirten Apparates so genau als möglich gemessen. Der Haupttheil dieses Apparates war ein mit einem Nonius versehener Maassstab, dessen eine Endfläche den Nullpunkt der Theilung bildete und an die ebene Fläche eines starken Messinglineals so angeschraubt werden konnte, dass der Maassstab senkrecht zu dieser Fläche stand. Die Verbindungsschraube ging durch einen in dem Lineale befindlichen Schlitz, sodass der Maassstab längs desselben verschiebbar war. An dem Ende des Lineals war ein Querstab angelöthet, parallel dem Maassstab und ungefähr von derselben Länge wie dieser.

Mit diesem Instrumente wurde in der folgenden Weise verfahren. Das Messinglineal war, ohne den Maassstab, an die vertical stehende Vorderfläche des Würfels fest angedrückt, sodass der Querstab sich über den Mündungen der Canäle befand. Dann wurde eine 100 mm lange und 0,9 mm dicke, unten zugespitzte Stahlnadel in den zu messenden Canal gesenkt, oben gegen den mit etwas Siegellack überzogenen Querstab so angelegt, dass sie mit der Spitze aufstiess, sonst aber in keiner Berührung mit der Wand des Canals war, und in dieser Stellung mit Hülfe einer Löthrohrflamme an den Querstab befestigt. Nach dem Erkalten des Siegellacks wurde das Messinglineal an der Fläche des Eisenwürfels aufwärts geschoben, sodass die Nadel aus dem Canale kam, ohne ihre Stellung gegen das Lineal zu ändern. Nun wurde der Maasstab angeschraubt, durch Verschiebung desselben längs des Lineals die Spitze der Nadel dicht an die Theilung des Nonius gebracht,

und der Nonius so eingestellt, dass sein Nullpunkt mit der Nadelspitze coincidirte. Es konnte dann der Abstand der Spitze von der Fläche des Lineals, d. h. der Abstand des tiefsten Punktes des Canals von der Vorderfläche des Würfels an der Theilung des Maassstabes abgelesen werden.

Wir fanden so aus einer grossen Zahl von Messungen, die für denselben Canal höchstens um 0,15 mm voneinander differirten, für den

ersten,	zweiten,	dritten Canal
$z = 5{,}46$ mm,	$= 44{,}65$ mm,	$= 71{,}26$ mm.

Die beiden Thermoketten, die wir benutzten, bestanden, wie bereits erwähnt, aus Kupfer- und Neusilberdraht. Die einzelnen Drähte waren für sich, und die zusammengelötheten dann noch einmal zusammen mit Seide umsponnen. Die auf diese Weise fest verbundenen Drähte liessen sich noch leicht in die Canäle des Eisenwürfels einführen. Ihre von der Umhüllung befreiten Enden waren kegelförmig so zugeschliffen, dass sie in die Enden der Canäle genau hineinpassten. Nachdem sie in diese fest hineingedrückt waren, wurden die Drähte an der obern Fläche des Würfels mit Wachskitt befestigt und dadurch zugleich die Canäle geschlossen.

An dem ersten Canal befand sich bei allen Versuchen die eine Löthstelle der Thermokette I, während die eine Löthstelle der Thermokette II bei einigen Versuchen in den zweiten, bei anderen in den dritten Canal eingeführt war. Die beiden Thermoketten waren im übrigen ganz gleich, nur waren ihre Widerstände ein wenig verschieden. Der Widerstand des aus dem Galvanometer und einer der Thermoketten gebildeten Kreises war 1,0051 mal so gross, wenn die Thermokette II, als wenn die Thermokette I in dem Kreise sich befand.

Die beiden, nicht in den Würfel eingeführten Löthstellen der Thermoketten befanden sich, mit der Kugel eines Thermometers in Watte eingepackt und zusammengebunden, in einem Kasten mit doppelten Wänden, zwischen denen Wasser war. Die Temperatur im Innern dieses Kastens variirte ungemein langsam und konnte an der Scala des Thermometers

abgelesen werden, die durch die Wandungen des Kastens hindurchtrat. In demselben Kasten war auch noch ein Quecksilbercommutator aufgestellt, der durch Schnüre von aussen umgelegt werden konnte und gestattete, nach Willkür die eine oder andere Thermokette mit dem Galvanometer zu verbinden. Das Umlegen des Commutators geschah während des Versuchs durch das oben erwähnte Uhrwerk, welches durch das Verschieben des Schirmes in Bewegung gesetzt wurde.

Das benutzte Galvanometer war ein Siemens'sches mit einem astatischen Paare von Glockenmagneten, Kupferdämpfung, Richtmagneten und Spiegelvorrichtung. Die in Millimeter eingetheilte Scala befand sich in einer Entfernung von etwa 2400^{mm} von dem Spiegel.

Neben dem Beobachtungsfernrohre stand der Chronograph. Derselbe war so eingerichtet, dass bei dem jedesmaligen Hin- und Hergang eines Secundenpendels ein elektrischer Strom momentan geschlossen und dadurch ein Stich in den durch das Uhrwerk des Chronographen bewegten Papierstreifen gemacht wurde. Das Gleiche geschah, wenn der Beobachter durch Ziehen an einer Schnur den Schirm vor dem Eisenwürfel so verschob, dass das aus der Brause hervorströmende Wasser diesen zu bespritzen begann. Ueberdies befanden sich an dem Chronographen zwei mit Nadeln verbundene Knöpfe, durch deren Herabdrücken der Papierstreifen rechts und links von der Linie der Secundenmarken durchstochen wurde. Einer dieser Knöpfe diente dazu, die Zeiten zu markiren, die den einem Gehülfen dictirten Ablesungen der Galvanometerscale entsprachen; durch den zweiten wurden die Zeitpunkte registrirt, in denen die durch das erwähnte Uhrwerk bewirkten Wechsel der Thermoketten stattfanden.

Um die Beschreibung eines Versuchs zu vervollständigen, möge das folgende Protokoll eines solchen dienen:

Versuch 18. 19. October 1879 Abends 9 Uhr.
Temperatur im Kasten $\vartheta_0 = 18{,}1°$ C.
Ablesung bei geöffnetem Galvanometerkreise 474,30.

1. Relative Zeit in Sec.	2. Ablesungen	3. Ablenkungen	1. Relative Zeit in Sec.	2 Ablesungen	3. Ablenkungen
—295	II eingeschaltet		36,26	690,0	211,6
—265	478,35	—	41,10	695,0	216,6
—245	I eingeschaltet		47,56	700,0	221,6
—215	478,45	—	55,08	705,0	226,6
—115	II eingeschaltet		64,78	710,0	231,6
— 85	478,25	—	77,98	715,0	236,6
— 65	I eingeschaltet		87,56	718,0	239,6
— 35	478,40	—	95,14	720,0	241,6
0,00	Schirm gezogen	0,0	103,56	722,0	243,6
3,34	500,0	21,6	113,78	724,0	245,6
4,40	520,0	41,6	125,82	726,0	247,6
5,56	540,0	61,6	139,48	728,0	249,6
6,72	560,0	81,6	154,20	II eingeschaltet	
7,96	580,0	101,6	171,16	624,0	146,6
9,68	600,0	121,6	173,96	625,0	147,6
11,84	620,0	141,6	176,84	626,0	148,6
14,96	640,0	161,6	179,80	627,0	149,7
16,98	650,0	171,6	182,84	628,0	150,7
19,70	660,0	181,6	186,16	I eingeschaltet	
23,52	670,0	191,6	211,52	735,0	256,7
28,72	680,0	201,6	223,60	736,0	257,7

Die Columne 1 giebt die Beobachtungszeiten t, gerechnet von dem Augenblicke, in dem der Würfel von dem Wasser getroffen wurde; die negativen Werthe derselben sind an der Uhr abgelesen, die positiven aus den vom Chronographen gemachten Marken abgeleitet. Die Columne 2 enthält die entsprechenden Scalenablesungen s, die Columne 3 die Werthe $s - s_0 - \varepsilon t$, die aus diesen berechnet sind mit Hülfe der Werthe von s_0 und ε, die durch Anwendung der Gleichung:

$$s - s_0 - \varepsilon t = 0$$

auf die Zeiten — 215 und — 35 für die Kette I und die Zeiten — 265 und — 85 für die Kette II sich ergeben. Die auf die Thermokette II bezüglichen Werthe von $s - s_0 - \varepsilon t$ sind mit dem Factor 1,0051 multiplicirt, um sie mit den auf die Thermokette I bezüglichen gleichartig zu machen. Mit Hülfe der Zahlen der Columne 3 ist aus der Gleichung (18) unter der

Annahme $\frac{\gamma}{W} = 1$ die elektromotorische Kraft der Thermokette II berechnet bei einigen Versuchen für $t = 145$, bei anderen für $t = 175$ und die elektromotorische Kraft der Thermokette I bei jenen Versuchen:

für $t = 5, 20, 40, 65, 90, 115, 145,$

bei diesen ausserdem noch für $t = 175$. Dabei wurden für die genannten Zeiten $s - s_0 - \varepsilon t$, $\frac{ds}{dt}$, $\frac{d^2s}{dt^2}$ durch Interpolation ermittelt und das den Einfluss der elastischen Nachwirkung darstellende Glied der Gleichung (18) mit Hülfe der Gleichung (20) bestimmt. Die beiden in der Gleichung (15) vorkommenden Integrale konnten nun durch mechanische Quadratur berechnet und aus dieser Gleichung dann der genauere Werth von a gefunden werden.

Nach den durchgeführten Betrachtungen setzt diese Berechnungsweise der Bobachtungen zunächst voraus, dass die Anfangstemperatur des Würfels überall dieselbe und zwar die Temperatur ϑ_0 des Kastens ist. Diese Annahme aber war thatsächlich bei keinem der Versuche genau erfüllt; es zeigte sich das an den kleinen Unterschieden der Scalenablesungen bei geöffnetem Galvanometerkreise und nach Einschaltung der einen oder andern Thermokette vor der Zeit Null. Die Veränderung der Temperatur in irgend einem Punkte des Würfels, die eine Folge dieses Umstandes ist, wird näherungsweise eine lineare Function der Zeit und zwar dieselbe Function für positive, wie für negative Werthe der Zeit sein. Ist das richtig, so wird durch die Art, wie die Grössen s_0 und ε für jede Thermokette eingeführt und berechnet sind, der Fehler eliminirt, den sonst der genannte Umstand herbeiführen würde.

In der angegebenen Weise haben wir 24 Versuche mit demselben Eisenwürfel ausgeführt und berechnet. Die folgende Zusammenstellung giebt in der „a beobachtet“ überschriebenen Columne die Resultate derselben an:

Vers.-Nr.	Werthe von z und t	ϑ_0	ϑ_1	ϑ	a beobacht.	a berechn.	Differenz
1	$z = 44{,}65$ mm, $t = 145''$	17,0	10,1	13,5	16,87	16,99	−0,12
2		15,6	11,6	13,5	17,08	16,99	+0,09
3		17,7	11,9	14,7	16,96	16,95	+0,01
4		19,3	12,9	16,0	16,95	16,91	+0,04
5		16,6	11,8	14,1	16,84	16,97	−0,13
6		16,3	10,5	13,3	16,98	17,00	−0,07
7	$z = 44{,}65$ mm, $t = 145''$	15,6	21,5	18,6	16,77	16,82	−0,05
8		14,7	20,0	17,4	16,90	16,86	+0,04
9		15,9	20,9	18,5	16,88	16,82	+0,06
10		16,2	21,0	18,7	16,79	16,82	−0,03
11		17,9	22,4	20,2	16,70	16,77	−0,07
12		17,3	21,9	19,7	16,76	16,78	−0,02
13	$z = 44{,}65$ mm, $t = 175''$	18,3	13,1	15,5	16,94	16,92	+0,02
14		17,2	12,9	14,9	16,96	16,94	+0,02
15		17,2	12,7	14,8	17,07	16,95	+0,12
16		17,2	12,5	14,7	16,80	16,95	−0,15
17		17,4	12,2	14,6	16,89	16,95	−0,06
18		18,0	12,1	14,9	17,04	16,94	+0,10
19	$z = 71{,}26$ mm, $t = 145''$	16,8	11,3	14,6	16,95	16,95	0,00
20		17,3	11,5	15,0	16,95	16,94	+0,01
21		16,4	11,1	14,3	17,00	16,96	+0,04
22		16,0	10,4	13,8	16,97	16,98	−0,01
23		16,6	11,1	14,4	17,02	16,96	+0,06
24		16,2	10,2	13,8	16,96	16,98	−0,02

Nimmt man Rücksicht auf die Abhängigkeit der Grösse a von der Temperatur, so muss man bei dem aus jedem der Versuche gefundenen Werthe von a fragen, für welche Temperatur er gilt. Diese Temperatur in Graden der hunderttheiligen Scala ausgedrückt, ist durch ϑ bezeichnet. Sie ist gefunden mit Hülfe der Gleichung (17). Ist ϑ_0 die Anfangstemperatur des Würfels, ϑ_1 die Temperatur, die die Vorderfläche desselben durch das Bespritzen erhält, so ist:

$$\vartheta = \vartheta_0 + u_m (\vartheta_1 - \vartheta_0). \tag{26}$$

Genau genug wäre es gewesen, dieses ϑ_0 der unmittelbar beobachteten Temperatur des Kastens gleich zu setzen; bei den angegebenen Werthen ist indessen die kleine Correction angebracht, die sich aus der Scalenablesung bei geöffnetem Galvanometerkreise und dem Mittel der Scalenablesungen berechnen lässt, die bei Einschaltung der einen oder der andern Thermokette vor der Zeit 0 gewonnen sind. $\vartheta_1 - \vartheta_0$ und daraus ϑ_1

liess sich berechnen aus der in der Gleichung (15) vorkommenden Grösse C. Wir setzten nun:

$$(27) \qquad \begin{aligned} a &= a_{15} + a_1 (\vartheta - 15) \\ c &= c_{15} + c_1 (\vartheta - 15), \end{aligned}$$

indem wir also durch a_{15} und c_{15} die Werthe von a und c bei der Temperatur von 15° C. bezeichneten und den Zeichen a_1 und c_1 die Bedeutung liessen, die sie in der Gleichung (17) haben.

In dieser Gleichung darf man $c_0 = c_{15}$ und für a_0 irgend einen Näherungswerth von a setzen. Aus der Angabe von Bède[1]) über die Aenderungen der specifischen Wärme des Eisens mit der Temperatur ergiebt sich:

$$\frac{c_1}{c_{15}} = 0{,}00129.$$

Durch Benutzung dieses Zahlenwerthes werden alle Grössen, die in dem Ausdrucke für u_m in Gleichung (17) vorkommen, bis auf a_1 bekannt, und die Gleichung:

$$a = a_{15} + a_1 (\vartheta_0 - 15) + a_1 u_m (\vartheta_1 - \vartheta_0),$$

die aus (26) und (27) folgt, ist eine Gleichung, und zwar eine lineare Gleichung, zwischen den beiden Unbekannten a_{15} und a_1. Ein jeder Versuch giebt eine solche Gleichung. Aus allen diesen Gleichungen haben wir a_{15} und a_1 so berechnet, dass die Summe der Quadrate der Fehler der beobachteten Werthe von a ein Minimum ist. So ergab sich:

$$a_{15} = 16{,}94 \qquad a_1 = -0{,}034.$$

Mit Hülfe dieser Zahlen sind die Werthe von ϑ aus (26) und dann die von a aus (27) berechnet.

---

[1]) Bède, Fortschritte der Physik, p. 379. 1855.

Ueber den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung.[1])

Bei seinen schönen Versuchen über die Schallgeschwindigkeit der Luft in Röhren hat Hr. Kundt[2]) experimentell nachgewiesen, dass die Schallgeschwindigkeit in engen Röhren um so kleiner ist, je enger die Röhre und je tiefer der Ton. Helmholtz[3]) hatte theoretisch die Schallbewegung in einer cylindrischen Röhre mit Rücksicht auf die Reibung untersucht und eine Formel für die Schallgeschwindigkeit abgeleitet, die insofern mit den Resultaten jener Versuche übereinstimmt, als auch nach ihr die Geschwindigkeit kleiner wird, wenn der Radius der Röhre, und wenn die Schwingungszahl des Tones abnimmt. Hr. Kundt hat aber gezeigt, dass die Werthe der Geschwindigkeit, die er bei seinen engeren Röhren beobachtet hat, sehr viel kleiner als diejenigen sind, die die Helmholtz'sche Formel giebt. Er schliesst daraus, dass die Reibung zur Erklärung der von ihm beobachteten Erscheinungen nicht genügt, und spricht die Vermuthung aus, dass ein Wärmeaustausch zwischen der Luft, die den Schall fortpflanzt, und der Wand der umschliessenden Röhre die wesentlichste Ursache derselben sei. Die Wärmeleitung der Luft, die einen solchen Wärmetausch vermitteln muss, hängt nun nach der neueren Gastheorie innig mit der Reibung zusammen, so, dass bei einer Bewegung eines Gases, bei der Temperaturänderungen vorkommen, die nicht zu vernachlässigen sind, der Einfluss der Wärmeleitung mindestens von derselben Ordnung sein muss wie der Einfluss der Reibung. Um so näher liegt es zu untersuchen, ob bei Rücksicht auf die Wärmeleitung die von Hr. Kundt beobachteten Thatsachen vollständiger theoretisch sich erklären lassen, als ohne diese.

[1]) Pogg. Ann. Bd. 134. 1868.

[2]) Monatsbericht der Berl. Ak. 19. Dec. 1867.

[3]) Verhandlungen des natur-historisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg vom Jahre 1863. Bd. III. S. 16.

1.

Sind u, v, w die unendlich kleinen Componenten der Geschwindigkeit und ist ϱ die Dichtigkeit zur Zeit t in dem Punkte (x, y, z), so ist zunächst:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Ist p der Druck und sind μ' und μ'' zwei von der Reibung abhängige Constanten, so ist weiter:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = \mu' \Delta u - \mu'' \frac{1}{\varrho}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x \partial t}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} = \mu' \Delta v - \mu'' \frac{1}{\varrho}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial y \partial t}$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} = \mu' \Delta w - \mu'' \frac{1}{\varrho}\frac{\partial^2 \varrho}{\partial z \partial t},$$

wo

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

gesetzt ist.

Zu diesen vier Gleichungen ist noch eine fünfte hinzuzufügen. Vernachlässigt man die Wärmeleitung, so ist diese:

$$c\varrho dp - c' p d\varrho = 0,$$

wo c die specifische Wärme des Gases bei constantem Volumen, c' seine specifische Wärme bei constantem Druck bezeichnet. Berücksichtigt man die Wärmeleitung, so tritt an ihre Stelle eine complicirtere. Um diese abzuleiten, bezeichne man durch p_0 und ϱ_0 Druck und Dichtigkeit für den Zustand der Ruhe, durch ϑ die Temperatur, gerechnet von der Temperatur, die bei der Ruhe stattfindet, durch α den Ausdehnungscoëfficienten des Gases, so dass:

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{p_0}{\varrho_0}(1 + \alpha\vartheta).$$

Wird bei einem Gasquantum, dessen Masse M ist, der Druck um dp und zugleich die Dichtigkeit um $d\varrho$ vermehrt, so muss ihm eine Wärmemenge dW zugeführt werden, die durch die Gleichung:

$$dW = Pdp + Rd\varrho$$

bestimmt ist, wo

$$P = \frac{Mc\varrho_0}{\alpha p_0 \varrho}$$

$$R = -\frac{Mc' p \varrho_0}{\alpha p_0 \varrho^2}.$$

Das gedachte Gasquantum sei nun dasjenige, das zur Zeit t sich in einem rechtwinkligen Parallelepipedum befindet, dessen einer Eckpunkt der Punkt (x, y, z) ist, dessen Kanten den Coordinatenaxen parallel sind und die Längen dx, dy, dz haben. In dem Zeitelemente dt wird diesem durch Leitung eine Wärmemenge zugeführt, die, wenn k die Wärmeleitungsfähigkeit des Gases bedeutet,

$$= k\, dx\, dy\, dz\, dt\, \Delta\vartheta$$

ist; bei Rücksicht darauf dass u, v, w unendlich klein sind, folgt hieraus, dass dieser Ausdruck:

$$= \left(P\frac{\partial p}{\partial t} + R\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right) dt$$

sein muss, wenn bei der Bildung der Werthe von P und R

$$M = \varrho\, dx\, dy\, dz$$

gesetzt wird. Berücksichtigt man noch, dass ϱ unendlich wenig von ϱ_0 verschieden ist, so ergiebt sich hieraus:

$$k\Delta\vartheta = \frac{1}{\alpha p_0}\left(c\varrho\frac{\partial p}{\partial t} - c'p\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right).$$

In dieser, so wie in den früher aufgestellten Gleichungen soll p mittels der Gleichung

$$dp = \frac{p_0}{\varrho_0} d\varrho + \alpha p_0\, d\vartheta$$

eliminirt und gesetzt werden:

$$\varrho = \varrho_0 (1 + \sigma)$$

$$\vartheta = \frac{c' - c}{\alpha c}\theta$$

$$k = \nu c \varrho_0$$

$$\frac{p_0}{\varrho_0}\frac{c'}{c} = a^2$$

$$\frac{p_0}{\varrho_0} = b^2,$$

wobei dann a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezeichnet, die der Schall haben würde, wenn die Reibung und die Wärmeleitung keinen Einfluss ausübte, und b die Schallgeschwindigkeit, die stattfinden würde, wenn überdies keine Temperaturänderungen in Folge der Aenderungen der Dichtigkeit einträten. Die fünf Differentialgleichungen nehmen dann die folgende Form an:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + (a^2 - b^2) \frac{\partial \theta}{\partial x} = \mu' \Delta u - \mu'' \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial t}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + b^2 \frac{\partial \sigma}{\partial y} + (a^2 - b^2) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \mu' \Delta v - \mu'' \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + b^2 \frac{\partial \sigma}{\partial z} + (a^2 - b^2) \frac{\partial \theta}{\partial z} = \mu' \Delta w - \mu'' \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z \partial t}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \nu \Delta \theta.$$

Von den drei Constanten μ', μ'', ν, die hier auftreten, ist bisher nur die erste experimentell bestimmt, welche allein bei solchen Bewegungen von Einfluss ist, bei denen die Aenderungen der Dichtigkeit vernachlässigt werden können. Nach Meyer[1]) ist für atmosphärische Luft bei der Temperatur von etwa 20° C. und dem Drucke einer Atmosphäre, wenn man eine Secunde als Zeiteinheit annimmt,

$$\sqrt{\mu'} = 4{,}86 \text{ mm.}$$

Nach der Theorie von Stokes[2]) ist

$$\mu'' = \tfrac{1}{2} \mu'.$$

Dieselbe Relation besteht nach der Theorie von Maxwell[3]); nach dieser ist weiter, wenn man die Gasmolecüle als materielle Punkte betrachtet,

$$\nu = \tfrac{2}{3} \mu',$$

und μ', und μ'' und ν sind dem Drucke umgekehrt und dem Quadrate der absoluten Temperatur direct proportinal. Der Werth von ν ist aber vielleicht erheblich grösser, als er nach

[1]) Pogg. Ann. Bd. 125. S. 572 und S. 599.
[2]) *Cambridge Phil. Trans. vol. VIII, p.* 297 (1845.)
[3]) *London Phil. Trans. vol.* 157 *part I, p.* 49 (1867)

der Theorie von Maxwell sein sollte, da diese auf die Wärmestrahlung keine Rücksicht nimmt und die Strahlung die Wärmeleitung vergrössert ohne ihr Gesetz zu ändern, wenn man annehmen darf, dass die Wärmestrahlen, die die Gastheilchen aussenden, in unendlich kleinen Strecken vollständig absorbirt werden.

2.

Die aufgestellten Gleichungen sollen jetzt unter der Voraussetzung weiter entwickelt werden, dass die unbekannten Funktionen u, v, w, σ, θ den Faktor

$$e^{ht}$$

enthalten, im Uebrigen aber von t unabhängig sind, wo h eine Constante bedeutet, die später imaginär angenommen werden wird. Bezeichnet man die Funktionen von x, y, z, die durch Abtrennung des genannten Faktors aus u, v, w, σ, θ entstehen, jetzt mit denselben Zeichen, so erhält man:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + h\sigma = 0$$

$$hu - \mu' \Delta u = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$hv - \mu' \Delta v = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$hw - \mu' \Delta w = -\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$P = (b^2 + h\mu'')\sigma + (a^2 - b^2)\theta$$

$$\sigma = \theta - \frac{\nu}{h}\Delta\theta.$$

Durch Benutzung der letzten dieser Gleichungen wird die vorletzte:

$$P = (a^2 + h\mu'')\theta - \frac{\nu}{h}(b^2 + h\mu'')\Delta\theta$$

und die erste:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + h\theta - \nu\Delta\theta = 0;$$

bei Rücksicht hierauf erhält man aus den drei übrigen, wenn man sie nach x, y, z differentiirt und addirt:

$$h^2\theta - [a^2 + h(\mu' + \mu'' + \nu)]\Delta\theta + \frac{\nu}{h}[b^2 + h(\mu' + \mu'')]\Delta\Delta\theta = 0.$$

Eine Lösung dieser Gleichung für θ findet man, indem man λ_1 und λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$h^2 - [a^2 + h(\mu' + \mu'' + \nu)]\lambda + \frac{\nu}{h}[b^2 + h(\mu' + \mu'')]\lambda^2 = 0$$

nennt, zwei Funktionen Q_1 und Q_2 aus den Gleichungen:

$$\Delta Q_1 = \lambda_1 Q_1$$
$$\Delta Q_2 = \lambda_2 Q_2$$

bestimmt, und

$$\theta = A_1 Q_1 + A_2 Q_2$$

setzt, wo A_1 und A_2 willkürliche Constanten bedeuten.

Für diesen Werth von θ erhält man partikuläre Lösungen der zweiten, dritten und vierten unserer Gleichungen, indem man u, v, w den nach x, y, z genommenen Differentialquotienten von:

$$B_1 Q_1 + B_2 Q_2$$

gleichsetzt und die Constanten B_1 und B_2 passend bestimmt, wobei sich ergiebt:

$$B_1 = -A_1\left(\frac{h}{\lambda_1} - \nu\right)$$
$$B_2 = -A_2\left(\frac{h}{\lambda_2} - \nu\right).$$

Allgemeinere Lösungen derselben Gleichungen bekommt man, indem man zu den gefundenen hinzufügt Functionen u', v', w', die den Gleichungen:

$$\Delta u' = \frac{h}{\mu'} u'$$
$$\Delta v' = \frac{h}{\mu'} v'$$
$$\Delta w' = \frac{h}{\mu'} w'$$

genügen. Dadurch wird:

$$u = u' + B_1 \frac{\partial Q_1}{\partial x} + B_2 \frac{\partial Q_2}{\partial x}$$
$$v = v' + B_1 \frac{\partial Q_1}{\partial y} + B_2 \frac{\partial Q_2}{\partial y}$$
$$w = w' + B_1 \frac{\partial Q_1}{\partial z} + B_2 \frac{\partial Q_2}{\partial z},$$

wo für B_1 und B_2 die eben angegebenen Werthe zu setzen sind.

Substituirt man diese Ausdrücke für u, v, w in die angegebene Umformung der ersten der vorgelegten Gleichungen, so ergiebt sich zwischen u', v', w' noch die Bedingung

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0.$$

3.

Die gewonnenen Resultate sollen nun zunächst auf den Fall ebener Wellen angewandt werden, die im unbegrenzten Luftraume in der Richtung der positiven x-Axe fortschreiten. Man setze:

$$v' = 0 \text{ und } w' = 0$$

und nehme u', Q_1 und Q_2 als unabhängig von y und z an. Dann muss u' den beiden Gleichungen:

$$\frac{d^2u'}{dx^2} = \frac{k}{\mu'} u'$$
$$\frac{du'}{dx} = 0$$

genügen, aus denen folgt:

$$u' = 0.$$

Die Gleichungen für Q_1 und Q_2 werden:

$$\frac{d^2 Q_1}{dx^2} = \lambda_1 Q_1$$
$$\frac{d^2 Q_2}{dx^2} = \lambda_2 Q_2$$

Hiernach kann man setzen:

$$Q_1 = e^{-x\sqrt{\lambda_1}}$$
$$Q_2 = e^{-x\sqrt{\lambda_2}},$$

wo die Vorzeichen der Wurzelgrössen so zu wählen sind, dass die reellen Theile derselben positiv sind, damit nicht Q_1 und Q_2 in der Unendlichkeit unendlich gross werden. Es wird daher:

$$u = A_1\sqrt{\lambda_1}\left(\frac{h}{\lambda_1} - \nu\right)e^{-x\sqrt{\lambda_1}} + A_2\sqrt{\lambda_2}\left(\frac{h}{\lambda_2} - \nu\right)e^{-x\sqrt{\lambda_2}}$$

$$\theta = A_1 e^{-x\sqrt{\lambda_1}} + A_2 e^{-x\sqrt{\lambda_2}}.$$

Die Grössen A_1 und A_2 bestimmen sich, wenn für $x = 0$

$$u = u_0 \qquad \theta = \theta_0$$

gegeben sind, aus den Gleichungen

$$u_0 = A_1\sqrt{\lambda_1}\left(\frac{h}{\lambda_1} - \nu\right) + A_2\sqrt{\lambda_2}\left(\frac{h}{\lambda_2} - \nu\right)$$

$$\theta_0 = A_1 + A_2.$$

Aus der quadratischen Gleichung, deren Wurzeln λ_1 und λ_2 sind, folgt nun

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{a^2}{h^2} + \frac{\mu' + \mu'' + \nu}{h}$$

$$\frac{1}{\lambda_1}\frac{1}{\lambda_2} = \frac{\nu}{h^2}[b^2 + h(\mu' + \mu'')];$$

bezeichnet man μ', μ'' und ν als unendlich kleine Grössen erster Ordnung, so muss hiernach eine von den Grössen $\frac{1}{\lambda_1}$ und $\frac{1}{\lambda_2}$ auch unendlich klein von der ersten Ordnung, die andere endlich sein; es sei λ_1 die endliche, λ_2 die unendlich grosse Wurzel. Aus den für A_1 und A_2 aufgestellten Gleichungen ergiebt sich dann, dass diese Grössen endlich sind, wenn u_0 und θ_0 als endlich bezeichnet werden, und weiter, dass das zweite Glied in dem Ausdrucke von u für $x = 0$ unendlich klein von der Ordnung von

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}},$$

für ein endliches x aber unendlich klein von der Ordnung von

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}e^{-x\sqrt{\lambda_2}}$$

ist. Bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung hat man daher für ein endliches x:

$$u = A_1\sqrt{\lambda_1}\left(\frac{h}{\lambda_1} - \nu\right)e^{-x\sqrt{\lambda_1}}.$$

Berücksichtigt man bei der Bildung des Werthes von λ_1 nur die unendlich kleinen Grössen niedrigster Ordnung, so findet man

$$\sqrt{\lambda_1} = \pm\left\{\frac{h}{a} - \frac{h^2}{2a^2}\left[\mu' + \mu'' + \nu\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\right]\right\}$$

oder, wenn man

$$h = 2\pi n i$$

setzt, wo $i = \sqrt{-1}$ ist und n die Schwingungszahl des Tones bedeutet,

$$\sqrt{\lambda_1} = \frac{2\pi^2 n^2}{a^2}\left[\mu' + \mu'' + \nu\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\right] + \frac{2\pi n i}{a}.$$

Setzt man

$$\frac{2\pi^2 n^2}{a^2}\left[\mu' + \mu'' + \nu\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\right] = m'$$

und restituirt in dem Ausdrucke von u den von der Zeit abhängigen Faktor, so hat man hiernach

$$u = C.e^{-m'a + 2\pi a\left(t - \frac{a}{a}\right)i},$$

wo C eine neue Constante bedeutet. Fügt man zu diesem Ausdrucke von u denjenigen, der aus ihm entsteht, wenn man $-i$ für i setzt und die multiplicative Constante verändert, so erhält man

$$u = e^{-m'a}\left[D\sin 2\pi n\left(t - \frac{x}{a}\right) + E\cos 2\pi n\left(t - \frac{x}{a}\right)\right],$$

wo D und E zwei reelle Constanten bezeichnen sollen.

Man sieht, dass die Grösse m' die Abnahme bedingt, die die Amplitude der Schwingungen bei dem Fortschreiten dieser erfährt; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles zeigt sich durch die Reibung und die Wärmeleitung nicht geändert. Streng genommen erleidet auch diese eine Aenderung [1]), aber eine, die von der Ordnung der Quadrate der Grössen μ', μ'', ν ist; man findet dieselbe, wenn man bei der Entwickelung von $\sqrt{\lambda_1}$ die Grössen dieser Ordnung beibehält.

In ganz ähnlicher Weise, wie ebene Wellen, lassen sich kugelförmige Wellen der Rechnung unterwerfen. Man setze:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$
$$u' = s'x,\ v' = s'y,\ w' = s'z$$

und nehme s', Q_1 und Q_2 als Functionen von r an. Die vier

1) Vergl. Stefan, Sitzungsberichte der Wiener Ak. Bd. 54, S. 259 (1866).

Differentialgleichungen, denen u', v', w' genügen sollen, geben dann die zwei:

$$\frac{d^2 s'}{dr^2} + \frac{4}{r}\frac{ds'}{dr} = \frac{k}{\mu'} s'$$

$$r\frac{ds'}{dr} + 3s' = 0,$$

aus denen folgt:

$$s' = 0.$$

Die Gleichungen für Q_1 und Q_2 werden

$$\frac{d^2 Q_1}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dQ_1}{dr} = \lambda_1 Q_1$$

$$\frac{d^2 Q_2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dQ_2}{dr} = \lambda_2 Q_2,$$

woraus sich ergiebt

$$Q_1 = \frac{1}{r} e^{-r\sqrt{\lambda_1}}$$

$$Q_2 = \frac{1}{r} e^{-r\sqrt{\lambda_2}},$$

wo den Wurzelgrössen das Vorzeichen gegeben werden muss, bei dem ihre reellen Theile positiv sind, wenn die Bewegung in der Unendlichkeit nicht unendlich gross werden soll. Es wird daher:

$$u = s\frac{x}{r}, \quad v = s\frac{y}{r}, \quad z = s\frac{z}{r}$$

$$s = -\frac{d}{dr}\left\{A_1\left(\frac{k}{\lambda_1} - \nu\right)\frac{1}{r} e^{-r\sqrt{\lambda_1}} + A_2\left(\frac{k}{\lambda_2} - \nu\right)\frac{1}{r} e^{-r\sqrt{\lambda_2}}\right\}$$

$$\theta = A_1\frac{1}{r} e^{-r\sqrt{\lambda_1}} + A_2\frac{1}{r} e^{-r\sqrt{\lambda_2}}.$$

Die Grössen A_1 und A_2 werden bestimmt, wenn s und θ für einen Werth von r gegeben sind; für jeden um etwas Endliches grösseren Werth von r verlieren die mit A_2 behafteten Glieder ihren Einfluss, da λ_2 unendlich gross ist, und man erhält auf einem Wege, der dem bei der Untersuchung ebener Wellen eingeschlagenen ganz gleich ist,

$$s = \frac{d}{dr}\frac{1}{r} e^{-m'r}\left[D\sin 2\pi n\left(t - \frac{r}{a}\right) + E\cos 2\pi n\left(t - \frac{r}{a}\right)\right],$$

wo m' denselben Werth, wie oben, hat.

4.

Es soll jetzt angenommen werden, dass die betrachtete Luftmasse in einer cylindrischen Röhre von kreisförmigem Querschnitt enthalten ist; die Bewegung sei symmetrisch in Bezug auf die Axe der Röhre, welche zur x-Axe genommen werden möge. Es sei

$$y^2 + z^2 = r^2$$

$$v = s\frac{y}{r},\quad w = s\frac{z}{r}$$

$$v' = s'\frac{y}{r},\quad w' = s'\frac{z}{r}$$

und u, u', s, s', Q_1, Q_2 seien Functionen von x und r. Es werde nun vorausgesetzt, dass alle diese Functionen den Faktor

$$e^{mx}$$

haben, wo m eine Constante bedeutet, im Uebrigen aber von x unabhängig seien. Behält man für die Functionen von r, welche nach Abtrennung dieses Faktors übrig bleiben, dieselben Zeichen bei, so hat man zunächst:

$$\frac{d^2Q_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dQ_1}{dr} = (\lambda_1 - m^2)\,Q_1$$

$$\frac{\partial^2 Q_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dQ_2}{dr} = (\lambda_2 - m^2)Q_2.$$

Für u' und s' ergeben sich die drei Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2u'}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du'}{dr} = \left(\frac{k}{\mu'} - m^2\right)u'$$

$$\frac{d^2s'}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{ds'}{dr} - \frac{s'}{r^2} = \left(\frac{k}{\mu'} - m^2\right)s'$$

$$mu' + \frac{ds'}{dr} + \frac{s'}{r} = 0.$$

Diese drei Gleichungen werden erfüllt, wenn man u' aus der ersten bestimmt und

$$s = -\frac{m}{\frac{k}{\mu'} - m^2}\frac{du'}{dr}$$

setzt, welche Relation sich ergiebt, wenn man die dritte Glei-

chung nach r differenzirt und von der zweiten abzieht. Man mache nun

$$u' = A\,Q,$$

wo A eine Constante, Q eine Function von r bedeutet, die der Gleichung

$$\frac{d^2Q}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dQ}{dr} = \left(\frac{k}{\mu'} - m^2\right)Q$$

genügt; man hat dann:

$$u = A\,Q - A_1 m\left(\frac{k}{\lambda_1} - \nu\right)Q_1 - A_2 m\left(\frac{k}{\lambda_2} - \nu\right)Q_2$$

$$s = -\frac{m}{\frac{k}{\mu'} - m^2}\frac{dQ}{dr} - A_1\left(\frac{k}{\lambda_1} - \nu\right)\frac{dQ_1}{dr} - A_2\left(\frac{k}{\lambda_2} - \nu\right)\frac{dQ_2}{dr}$$

$$\theta = \qquad A_1 Q_1 \qquad + A_2 Q_2.$$

An der Röhrenwand müssen u, s, θ gewissen Bedingungen genügen; es soll hier nur die Hypothese verfolgt werden, dass die Lufttheilchen, welche die Röhre berühren, an dieser haften und die constante Temperatur derselben besitzen. Die Ausdrücke von u, s, θ müssen dann verschwinden, wenn r gleich dem Radius der Röhre gesetzt wird; das erfordert, dass für diesen Werth von r die Determinante der Coëfficienten von A, A_1, A_2 in den Ausdrücken von u, s, θ verschwindet, d. h.

$$\frac{m^2 k}{\frac{k}{\mu'} - m^2}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\frac{d\lg Q}{dr} + \left(\frac{k}{\lambda_1} - \nu\right)\frac{d\lg Q_1}{dr} - \left(\frac{k}{\lambda_2} - \nu\right)\frac{d\lg Q_2}{dr} = 0$$

ist.

Die Functionen Q, Q_1, Q_2 müssen die Eigenschaft haben, für $r = 0$ endlich zu bleiben; dadurch werden sie bis auf multiplicative Constanten, die beliebig gewählt werden können, vollständig bestimmt. Alle drei lassen sich ausdrücken durch die Function

$$1 + \frac{q^2}{1^2} + \frac{q^4}{(1.2)^2} + \frac{q^6}{(1.2.3)^2} + \cdots,$$

die durch $J(q)$ oder J bezeichnet werden möge und die der Differentialgleichung

$$\frac{d^2J}{dq^2} + \frac{1}{q}\frac{dJ}{dq} = 4J$$

genügt; man kann nämlich setzen:

$$Q = J\left(\frac{r}{2}\sqrt{\frac{k}{\mu'} - m^2}\right)$$
$$Q_1 = J\left(\frac{r}{2}\sqrt{\lambda_1 - m^2}\right)$$
$$Q_2 = J\left(\frac{r}{2}\sqrt{\lambda_2 - m^2}\right).$$

Nimmt man μ', μ'' und $\nu = 0$ an, so hat man

$$m^2 = \frac{k^2}{a^2} \text{ und } \lambda_1 = \frac{k^2}{a^2}$$
$$\text{also } \lambda_1 = m^2;$$

daraus folgt, dass, wenn μ', μ'', ν als unendlich klein angenommen werden, auch $\lambda_1 - m^2$ unendlich klein ist; da dann weiter

$$\frac{k}{\mu'} - m^2 \text{ und } \lambda_2 - m^2$$

unendlich gross sind, so hat man die Function J nur für unendlich kleine und unendlich grosse Werthe ihres Arguments in Betracht zu ziehen.

Für einen unendlich kleinen Werth von q ist

$$J = 1 + q^2,$$

für einen unendlich grossen

$$J = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{e^{2q}}{\sqrt{q}},$$

vorausgesetzt, dass der reelle Theil von q positiv und unendlich gross ist, und dass das Vorzeichen von $\sqrt{q}$ so gewählt wird, dass auch hier der reelle Theil positiv ist. Die Richtigkeit dieser Angabe beweist man mit Leichtigkeit, wenn man von der Gleichung

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{2q\cos x}\, dx$$

ausgeht.

Berücksichtigt man nur die Glieder der höchsten Ordnung, so hat man daher:

$$\frac{d\lg Q}{dr} = \sqrt{\frac{k}{\mu'}}$$

$$\frac{d\lg Q_1}{dr} = \frac{r}{2}(\lambda_1 - m^2)$$

$$\frac{d\lg Q_2}{dr} = \sqrt{\lambda_2}.$$

Setzt man hier, so wie in den Coëfficienten der für m gefundenen Gleichung

$$\lambda_1 = \frac{k^2}{a^2},\ \lambda_2 = \frac{k a^2}{\nu b^2}$$

und schreibt $\frac{k^2}{a^2}$ für m^2 in dem dann auftretenden, mit dem Faktor $\sqrt{\mu'}$ behafteten Gliede, so giebt dieselbe

$$m^2 = \frac{k^2}{a^2}\left(1 + \frac{2\gamma}{r\sqrt{k}}\right),$$

wo

$$\gamma = \sqrt{\mu'} + \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)\sqrt{\nu}$$

und das Vorzeichen von $\sqrt{k}$ so zu wählen ist, dass der reelle Theil davon positiv wird.

Setzt man wieder

$$k = 2\pi n i, \text{ also } \sqrt{k} = \sqrt{n\pi}\,(1+i),$$

so wird

$$m = \pm(m' + i m''),$$

wo

$$m' = \frac{\gamma\sqrt{\pi n}}{ar}$$

$$m'' = \frac{2\pi n}{a} + \frac{\gamma\sqrt{\pi n}}{ar}.$$

Führt man jetzt die bisher unterdrückten, von t und von x abhängigen Faktoren wieder ein, so hat man

$$u = BR\,e^{kt+mx}$$

$$s = BR'\,e^{kt+mx}$$

$$\theta = BR''\,e^{kt+mx},$$

wo B eine willkürliche Constante bedeutet, R, R', R'' gewisse Functionen von r sind, die verschwinden, wenn für r der Ra-

dius der Röhre gesetzt wird, und für Punkte, die in endlicher Entfernung von der Röhrenwand liegen, bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grossen höherer Ordnung diese Werthe annehmen:

$$R = 1, \quad R' = 0, \quad R'' = -\frac{1}{a}.$$

Bildet man den Ausdruck, der die Geschwindigkeit u für Punkte, die in endlicher Entfernung von der Röhrenwand liegen, darstellt, für die beiden Vorzeichen von i und für die beiden Vorzeichen von m, und setzt die vier so entstehenden Ausdrücke, mit verschiedenen Constanten multiplicirt, zusammen, so erhält man

$$u = C_1 e^{m'x} \sin(2\pi nt + m''x + \delta_1) + C_2 e^{-m'x} \sin(2\pi nt - m''x + \delta_2),$$

wo C_1, C_2, δ_1, δ_2 vier reelle willkürliche Constanten bedeuten sollen. Es bedingt hiernach m' die Abnahme, die die Schwingungen bei ihrem Fortschreiten erfahren, und m'' die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben; die letztere ist

$$= \frac{2\pi n}{m''}$$

d. h.

$$= a\left(1 - \frac{2r\sqrt{\pi n}}{\gamma}\right).$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem von Helmholtz angegebenen überein, abgesehen davon, dass γ hier eine andere Bedeutung hat.

Wenn die Röhre an einem Ende, für welches $x = 0$ sein möge, durch einen Stempel verschlossen ist, so muss für $x = 0$ $u = 0$, also $C_2 = -C_1$ und $\delta_2 = \delta_1$ oder

$$u = C_1 \sqrt{e^{2m'x} + e^{-2m'x} - 2\cos 2m''x}\, \sin(2\pi nt + \delta)$$

sein, wo δ in gewisser Weise von x abhängt. Die Wurzelgrösse, die in diesem Ausdrucke vorkommt, verschwindet für keinen andern Werth von x, als für $x = 0$, aber sie hat eine Reihe Minima, die nur unendlich wenig von 0 verschieden sind; diese Minima entsprechen den Knoten. Die Maxima und Minima der Wurzelgrösse sind bestimmt durch die Gleichung:

$$m'(e^{2m'x} - e^{-2m'x}) + 2m'' \sin 2m''x = 0,$$

oder, wenn man Grössen von der Ordnung von γ^2 vernachlässigt, durch die Gleichung:

$$\sin 2m''x = 0.$$

Für die Knoten ist daher

$$\sin m''x = 0,$$

und der Abstand zweier aufeinander folgenden Knoten ist

$$= \frac{\pi}{m''},$$

also gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen, dividirt durch das Doppelte der Schwingungszahl.

Die Constanten C_1 und δ_1 bestimmen sich, sobald noch für einen zweiten Querschnitt der Röhre die Bewegung gegeben ist. Gesetzt, es sei für $x = l$

$$u = G \sin 2\pi nt,$$

so muss für alle Werthe von t:

$$G \sin 2\pi nt = C_1 \sqrt{e^{2m'l} + e^{-2m'l} - 2\cos 2m''l}\, \sin(2\pi nt + \delta_l)$$

sein, wo δ_l den Werth von δ für $x = l$ bedeutet; daraus folgt:

$$\delta_l = 0$$

$$C_1 = \frac{G}{\sqrt{e^{2m'l} + e^{-2m'l} - 2\cos 2m''l}}.$$

Es ergiebt sich daraus, dass bei gegebenem G ein Maximum von C_1 stattfindet, wenn an dem Orte, für den $x = l$ ist, ein Knoten liegt; es ist dann C_1 unendlich gross gegen G, nämlich

$$C_1 = \frac{G}{2m'l}$$

oder

$$= G \frac{ar}{2\gamma l \sqrt{\pi n}}.$$

Dem hier theoretisch untersuchten Falle entsprechen die im Eingange angeführten Versuche des Hrn. Kundt. Die Resultate derselben stimmen mit der für die Schallgeschwindigkeit hier abgeleiteten Formel in so fern überein, als auch

nach dieser die Schallgeschwindigkeit um so mehr verringert wird, je enger die Röhre und je tiefer der Ton wird. Die Grösse der beobachteten Verringerungen im Allgemeinen widerspricht der theoretischen Formel nicht, da in dieser der Coëfficient der Wärmeleitung ν vorkommt, der, wenn die Strahlung berücksichtigt werden soll, so weit ich sehe, auch nicht näherungsweise geschätzt werden kann. Dass bei Vermehrung des Druckes die Schallgeschwindigkeit wächst, erklärt sich daraus, dass, wie bereits oben angeführt ist, die Grössen μ', μ'' und ν abnehmen, wenn der Druck vergrössert wird. Wird die glatte Oberfläche der Röhre in eine rauhe verwandelt, so muss der Einfluss der Reibung sowohl als der Wärmeleitung zunehmen, die Schallgeschwindigkeit also kleiner werden, wie es von Hrn. Kundt beobachtet ist. In einer Hinsicht aber besteht ein wesentlicher Mangel an Uebereinstimmung zwischen dem Versuch und der Theorie. Nach dieser soll unter sonst gleichen Umständen die Verringerung der Schallgeschwindigkeit dem Radius der Röhre umgekehrt proportional sein; nach den Versuchen wächst sie bei abnehmendem Radius erheblich schneller als das Reciproke des Radius. Ich kann den Grund dieses Mangels an Uebereinstimmung nicht finden; doch möchte ich einen Umstand erwähnen, der vielleicht dabei mit im Spiele ist. Die Longitudinaltöne von Stäben — mit denen Hr. Kundt experimentirt hat — sind nicht einfache Töne; der Grundton ist von seinen harmonischen Obertönen begleitet; der einfache Ton, dem die beobachtete Schallgeschwindigkeit entsprach, konnte daher nicht genau mit dem Grundton des Stabes übereinstimmen, sondern musste höher sein, um so höher, je stärker die Obertöne im Verhältniss zum Grundtone waren; dieses Verhältniss aber hatte vielleicht verschiedene Werthe bei den Röhren von verschiedenem Durchmesser.

Ueber den Winkel der optischen Axen des Aragonits für die verschiedenen Fraunhofer'schen Linien. [1])

Hr. Heusser hat die Winkel der optischen Axen des Aragonits für farbiges Licht gemessen und seine Resultate verglichen mit den Werthen, die sich für diese Winkel aus den von Rudberg bestimmten Brechungscoëfficienten desselben Krystalls ergeben.[2]) Die Bestimmungen von Rudberg beziehen sich direkt auf die Fraunhofer'schen Linien; Herr Heusser hat seine Messungen mit farbigem Lichte ausgeführt, das er theils durch die gelbe Kochsalzflamme, theils durch absorbirende Mittel von rother, grüner und blauer Farbe herstellte, bei der Berechnung aber als übereinstimmend mit gewissen Fraunhofer'schen Linien annahm. Hr. Heusser findet erhebliche Unterschiede zwischen den aus seinen und den aus Rudberg's Beobachtungen abgeleiteten Resultaten; „wenn man aber bedenkt," sagt er, „dass die mittleren Strahlen des angewandten Lichts in keinem Fall mit den entsprechenden Linien zusammenfallen, und ausserdem in Erwägung zieht, welchen bedeutenden Einfluss auf den Winkel der optischen Axen ein kleiner Fehler in den Brechungscoëfficienten hat in dem Fall, wo jener Winkel aus den drei Brechungscoëfficienten berechnet wird, so kann man kaum eine genauere Uebereinstimmung erwarten."

Es schien mir von Interesse zu untersuchen, in wie weit jene Unterschiede dem einen, in wie weit sie dem andern der beiden Umstände zuzuschreiben sind, die Hr. Heusser anführt, und ich habe deshalb die Messungen dieses in einer Weise wiederholt, bei der sie unmittelbar auf die einzelnen Fraunhofer'schen Linien sich beziehen.

Bei dem Apparate, den ich zu diesem Zwecke zusammengesetzt habe, fallen die durch einen Spiegel in horizontaler Richtung reflectirten Lichtstrahlen durch ein Nicol'sches Prisma auf einen engen verticalen Spalt, der in dem Brennpunkte

[1]) Pogg. Ann. Bd. 108, 1859.
[2]) Pogg. Ann. Bd. 89, S. (532).

einer Linse sich befindet; nachdem sie diese Linse durchdrungen haben, treffen sie ein Flintglasprisma von etwa 45° brechendem Winkel, dessen brechende Kante vertical ist, gehen dann durch ein astronomisches Fernrohr von ungefähr 12maliger Vergrösserung, gelangen, nachdem sie aus dem Ocular dieses ausgetreten sind, an die Aragonitplatte und durchlaufen dann noch ein zweites astronomisches Fernrohr von etwa 1½facher Vergrösserung und ein zweites Nicol'sches Prisma, bevor sie in das Auge des Beobachters treten.

Ist das zweite Fernrohr auf ein unendlich weit entferntes Object eingestellt, und sind die Linsen des ersten in eine solche Entfernung gebracht, dass parallel auf das Objectiv fallende Strahlen parallel aus dem Ocular austreten, so sieht der Beobachter einen Theil des Spectrums mit seinen dunkeln Linien und auf dem farbigen Grunde, den dieser darbietet, in unzählbarer Menge die schwarzen Curven, die durch Interferenz der durch Doppelbrechung im Krystall gebildeten Strahlen erzeugt werden; ausserdem erblickt er, bei richtiger Einstellung, die beiden Fadenkreuze, mit denen die beiden Fernröhre versehen sind.

Die Aragonitplatte ist an der nach unten verlängerten Axe eines Theodolithen befestigt, der auf einem kleinen Gerüste aufgestellt ist, lässt sich aber noch relativ gegen die Axe drehen um zwei Axen, die nahe senkrecht gegen einander und gegen jene sind. Nachdem das dem Auge näher liegende Fernrohr so eingestellt ist, dass ein unendlich weit entferntes Object mit seinem Fadenkreuze gleichzeitig deutlich erscheint, wird die Axe des Theodolithen senkrecht zu der Richtung gemacht, in der diejenigen Strahlen auf das Objectiv fallen, welche im Schnittpunkte des Fadenkreuzes vereinigt werden. Zu diesem Zwecke wird an Stelle der Krystallplatte ein kleines planparalleles Glas an der Axe des Theodolithen befestigt, das Fadenkreuz durch eine Flamme mit Hülfe eines vor das Ocular gesetzten Glasplättchens beleuchtet und das Spiegelbild des Fadenkreuzes, welches das planparallele Glas giebt, aufgesucht. Durch Drehung dieses Glases relativ gegen die Axe des Theodolithen und durch Verstellung einer der Schrauben, auf welchen dieses Instrument ruht, kann man bewirken, dass, mag das

Glas die eine oder die andere Fläche dem Auge zukehren, durch Drehung der Theodolithenaxe das Fadenkreuz mit seinem Spiegelbilde sich zur Deckung bringen lässt. Ist dieses erreicht, so hat die Axe die verlangte Richtung. Nun wird bei dem andern Fernrohr die vordere Ocularlinse so weit heraus- oder hineingeschraubt, dass das Fadenkreuz desselben gleichzeitig mit dem ersten Fadenkreuze deutlich erscheint, das ganze Ocular so verschoben, dass die Fraunhofer'schen Linien in grösster Schärfe sich zeigen, und das ganze Fernrohr so gerichtet, dass die Schnittpunkte beider Fadenkreuze sich decken. Diese Operationen müssen von Neuem ausgeführt werden, wenn man zu einem andern Theile des Spectrums übergeht, da die Linsen des Oculars nicht achromatisch sind. Darauf bringt man durch Drehung des Prismas die Fraunhofer'sche Linie, auf welche die Messung sich beziehen soll, zur Deckung mit dem Verticalfaden des vom Auge entfernteren Fernrohrs und setzt dann erst die Krystallplatte an ihren Ort. Diese ändert in dem Gesichtsfelde nichts, wenn das Nicol'sche Prisma von dem Auge entfernt ist, falls ihre beiden Flächen genau parallel sind; ist diese Bedingung aber nicht erfüllt, so hört bei dem Einsetzen der Krystallplatte die Deckung der Schnittpunkte beider Fadenkreuze auf; der Verticalfaden des vom Auge weiteren Fernrohrs deckt aber immer noch die Fraunhofer'sche Linie, auf die er eingestellt war. Das Fadenkreuz dieses Fernrohrs wird bei der Messung des Winkels der scheinbaren Axen allein benutzt. Nachdem man das zweite Nicol'sche Prisma vor das Auge gebracht hat, stellt man die Krystallplatte an der Axe des Theodolithen so ein, dass durch Drehung dieser Axe die beiden Punkte der Interferenzfigur, die den optischen Axen entsprechen, zur Deckung mit dem Schnittpunkte des bezeichneten Fadenkreuzes gebracht werden können, und liest den Drehungswinkel ab, der erfordert wird, um von einer dieser Stellungen zur andern zu gelangen. Um den Einstellungen die grösste Schärfe zu geben, habe ich es am zweckmässigsten gefunden, die beiden Nicol'schen Prismen so zu stellen, dass ihre Hauptschnitte parallel sind und Winkel von 45° mit der Ebene der optischen Axen des Krystalls bilden.

Der Winkel, den man auf die angegebene Weise findet.

ist der Winkel der scheinbaren Axen der Krystallplatte für die dem Auge abgewandte Fläche derselben. Um aus ihm und dem mittleren Brechungscoëfficienten des Krystalls den Winkel der wahren optischen Axen berechnen zu können, ist es noch nöthig, die Winkel zu messen, welche jede der beiden scheinbaren Axen mit der Normale derselben Krystallfläche macht. Hierbei wird das Fadenkreuz des dem Auge näheren Fernrohrs benutzt. Man bringt die Krystallplatte einmal in die Lage, bei der dieses Fadenkreuz das Spiegelbild deckt, welches von ihm die Fläche der Platte, die früher dem Auge abgewandt war, giebt, wenn sie dem Auge zugekehrt wird; dann in die Lage, bei der der Schnittpunkt des andern Fadenkreuzes auf den der einen optischen Axe entsprechenden Punkt der Interferenzfigur fällt, wenn jene Fläche wieder dem Auge abgewandt ist; ist die Krystallplatte an der Axe des Theodolithen so eingestellt, dass man sie durch Drehung dieser aus der einen Lage in die andere überführen kann, so ist der Winkel dieser Drehung die Ergänzung zu 180° des einen der beiden gesuchten Winkel. Sind die Flächen der Krystallplatte nicht genau parallel, so findet man bei der Aufsuchung des bezeichneten Spiegelbildes zwei Spiegelbilder; diese sind von gleicher Deutlichkeit, wenn die Politur der beiden Flächen eine vollkommene ist; um entscheiden zu können, welches von ihnen der vorderen und welches der hinteren Fläche angehört, muss man dann beachten, in welcher Richtung die Schnittpunkte der beiden Fadenkreuze, die vor dem Einsetzen der Krystallplatte einander deckten, durch diese von einander geschieden sind. Bei der Aragonitplatte, an welcher ich die Messungen angestellt habe, die ich hier mittheilen will, ist die Politur der Flächen nicht eine vollkommene; hier erkennt man das der vorderen Fläche angehörige Spiegelbild unmittelbar an der grösseren Deutlichkeit.

Zur Ausführung der beschriebenen Messungen genügt bei den mittleren Theilen des Spectrums das Licht von einem mässig hellen Theile des Himmels, bei den äusseren ist aber direktes Sonnenlicht unerlässlich, und auch dieses reicht nicht aus bei der Linie *H*. Um auch hier die nöthige Lichtstärke zu erhalten, musste ich die Sonnenstrahlen durch eine Sammel-

linse concentriren, bevor sie auf den Spalt fielen. Bei beiden Enden des Spectrums liess ich mit Vortheil das Licht, bevor es zum Auge kam, durch ein blaues Glas gehen, das die Strahlen mittlerer Brechbarkeit in hohem Grade schwächte.

Hat man für eine Fraunhofer'sche Linie die Winkel gemessen, die die scheinbaren optischen Axen mit einander und mit der Normale der Krystallfläche bilden, so findet man auf bekannte Weise den Winkel der wahren optischen Axen für dieselbe Linie. Man denke sich aus dem Mittelpunkte einer Kugel Linien gezogen parallel der Normale der Krystallfläche, den beiden scheinbaren Axen, den beiden wahren Axen und der Mittellinie der letzteren; man bezeichne die Durchschnittspunkte der Kugel mit diesen Linien der Reihe nach durch N, S, S', W, W', M und verbinde diese Punkte durch grösste Kreise, wie es in beistehender Figur dargestellt ist; den Winkel WNW' nenne man C und die Bögen NW, NW', NS, NS', MW, SS' der Reihe nach a, a', x, x', c, z; dann ist:

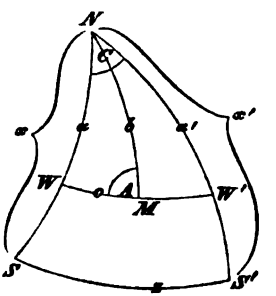


Fig. 33.

$$\cos 2c = \cos a \cos a' + \sin a \sin a' \cos C$$

und

$$\cos z = \cos x \cos x' + \sin x \sin x' \cos C.$$

Bedeutet n den mittleren Brechungscoëfficienten des Krystalls, so ist weiter:

$$(1) \qquad \begin{cases} \sin x = n \sin a \\ \sin x' = n \sin a'. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$(2) \qquad \cos 2c = \frac{\cos z}{n^2} + \cos a \cos a' - \frac{\cos x \cos x'}{n^2}.$$

Hat man z, x und x' gemessen, und kennt man n, so findet man aus den Gleichungen (1) und (2) ohne Schwierigkeit $2c$.

Man weiss, dass beim Aragonit die optischen Axen für die verschiedenen Farben dieselbe Ebene und dieselbe Mittellinie haben; benutzt man diesen Umstand, so kann man für

jede Fraunhofer'sche Linie $2c$ aus z und n berechnen, wenn man nur für eine ausser z auch x und x' gemessen hat. Bezeichnet man den Bogen MN durch b und den Winkel WMN durch A, so hat man:

$$(3) \qquad \begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos a' = \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos A \end{cases}$$

oder

$$(4) \qquad \begin{cases} \cos b = \dfrac{1}{\cos c} \cos \dfrac{a' + a}{2} \cos \dfrac{a' - a}{2} \\ \sin b \cos A = \dfrac{1}{\sin c} \sin \dfrac{a' + a}{2} \sin \dfrac{a' - a}{2}. \end{cases}$$

Berechnet man aus den Gleichungen (4) für diejenige Linie, für die z, x und x' gemessen sind, b und A', so kann man, da diese beiden Winkel für alle Farben dieselben sind, aus den Gleichungen (1), (2) und (3) für die Linien, für die nur z gemessen und n bekannt ist, $2c$ ermitteln. Eliminirt man aus den 5 Gleichungen (1), (2) und (3) die 4 Grössen a, a', x, x', so erhält man eine quadratische Gleichung für $\cos c$; da diese aber eine ziemlich verwickelte Gestalt hat, so findet man den Werth von c leichter, als durch ihre direkte Auflösung, indem man in die Gleichungen (3) einen Näherungswerth für c setzt, mit Hülfe der Werthe von a und a', die man dann erhält, aus (1) und (2) einen genaueren Werth von c berechnet und dieses Verfahren wiederholt.

Bei einer Aragonitplatte von etwa 7^{mm} Dicke fand ich an der einen Fläche die folgenden Winkel der scheinbaren optischen Axen für die verschiedenen Fraunhofer'schen Linien:

B.	30° 35′ 50″	*E.*	31° 6′ 50″
C.	30° 40′ 10″	*F.*	31° 21′ 0″
D.	30° 51′ 40″	*G.*	31° 46′ 20″
		H.	32° 9′ 30″.

Für die Linie D ergab sich dabei:

$$x = 11^\circ\ 57', \quad x' = 18^\circ\ 56';$$

die Temperatur war ungefähr 25° C. In Beziehung auf diese Angaben ist noch zu erwähnen, dass der bei H aufgeführte Winkel nicht das unmittelbare Resultat einer Messung ist; da der Verticalfaden des Fadenkreuzes vor der Linie H nicht

deutlich genug zu sehen war, so wurde derselbe einmal in die Mitte zwischen die Linien *H* und *k* (nach der Bezeichnung von Baden Powell) gestellt, dann auf die andere Seite in gleiche Entfernung von *H* gebracht, jedesmal der Winkel der scheinbaren optischen Axen gemessen und das Mittel aus den beiden so erhaltenen Werthen genommen. Die folgende Tabelle enthält in der mit *n* überschriebenen Columne die von Rudberg bestimmten mittleren Brechungscoëfficienten des Aragonits, unter *K* die mit Hülfe dieser aus meinen Messungen abgeleiteten Winkel der wahren optischen Axen, unter *H* die von Hrn. Heusser in der oben citirten Abhandlung gefundenen, unter *R* die aus Rudberg's Messungen der drei Brechungscoëfficienten berechneten[1]) Werthe derselben Winkel:

	n	*K*	*H*	*R*
B.	1,67631	18° 5′ 23″		17° 58′
C.	1,67779	18 6 55	18° 10′	17 48
D.	1,68157	18 11 7	18 12	17 50
E.	1,68634	18 16 45	18 18	18 3
F.	1,69053	18 22 14		18 9
G.	1,69836	18 31 30	18 24	18 17
H.	1,70509	18 40 20		18 26.

Zur Controle habe ich auch an der zweiten Fläche derselben Platte Messungen angestellt, hier fand ich für die Linie *D*

$$x = 10^0\,54', \quad x' = 20^0\,15'$$

und für die Winkel der scheinbaren und der wahren optischen Axen ergaben sich folgende Werthe:

B.	30° 37′ 40″	18° 5′ 22″
C.	30 42 30	18 7 11
D.	30 54 20	18 11 12
E.	31 9 30	18 16 56
F.	31 23 0	18 22 10
G.	31 48 50	18 31 48
H.	32 14 0	18 41 45.

Die Temperatur war bei allen diesen Beobachtungen mit Ausnahme der auf die Linie *H* bezüglichen nahe dieselbe, wie

[1]) Beer, Einleitung in die höhere Optik, S. 380.

bei den vorher erwähnten; bei der letzten Beobachtung dagegen war die Temperatur nur die von etwa 17° C., und dieser Umstand erklärt den vergleichungsweise grossen Unterschied von 1′25″ zwischen den beiden hier gefundenen Werthen des Winkels der optischen Axen für die Linie *H*; ich habe mich überzeugt, dass ein ähnlicher Temperaturunterschied bei den anderen Fraunhofer'schen Linien eine ähnliche Aenderung in dem Winkel der optischen Axen hervorbringt.

Ueber die Fraunhofer'schen Linien.[1])

Bei Gelegenheit einer von Bunsen und mir in Gemeinschaft ausgeführten Untersuchung über die Spectren farbiger Flammen, durch welche es uns möglich geworden ist, die qualitative Zusammensetzung complicirter Gemenge aus dem Anblick des Spectrums ihrer Löthrohrflamme zu erkennen, habe ich einige Beobachtungen gemacht, welche einen unerwarteten Aufschluss über den Ursprung der Fraunhofer'schen Linien geben und zu Schlüssen berechtigen von diesen auf die stoffliche Beschaffenheit der Atmosphäre der Sonne und vielleicht auch der helleren Fixsterne.

Fraunhofer hat bemerkt, dass in dem Spectrum einer Kerzenflamme zwei helle Linien auftreten, die mit den beiden dunkeln Linien *D* des Sonnenspectrums zusammenfallen. Dieselben hellen Linien erhält man lichtstärker von einer Flamme, in die man Kochsalz gebracht hat. Ich entwarf ein Sonnenspectrum und liess dabei die Sonnenstrahlen, bevor sie auf den Spalt fielen, durch eine kräftige Kochsalzflamme treten. War das Sonnenlicht hinreichend gedämpft, so erschienen an Stelle der beiden dunkeln Linien *D* zwei helle Linien; überstieg die Intensität jenes aber eine gewisse Grenze, so zeigten sich die beiden dunkeln Linien *D* in viel grösserer Deutlichkeit, als ohne die Anwesenheit der Kochsalzflamme.

Das Spectrum des Drummond'schen Lichtes enthält der

---

[1]) Monatsbericht der Akad. d. Wiss. zu Berlin v. Oct. 1859.

Regel nach die beiden hellen Natriumlinien, wenn die leuchtende Stelle des Kalkcylinders noch nicht lange der Glühhitze ausgesetzt war; bleibt der Kalkcylinder unverrückt, so werden diese Linien schwächer und verschwinden endlich ganz. Sind sie verschwunden oder nur schwach hervortretend, so bewirkt eine Alkoholflamme, in die Kochsalz gebracht ist und die zwischen den Kalkcylinder und den Spalt gestellt wird, dass an ihrer Stelle zwei dunkle Linien von ausgezeichneter Schärfe und Feinheit sich zeigen, die in jeder Hinsicht mit den Linien *D* des Sonnenspectrums übereinstimmen. Es sind so die Linien *D* des Sonnenspectrums in einem Spectrum, in dem sie natürlich nicht vorkommen, künstlich hervorgerufen.

Bringt man in die Flamme der Bunsen'schen Gaslampe Chlorlithium, so zeigt das Spectrum derselben eine sehr helle, scharf begrenzte Linie, die in der Mitte der Fraunhofer'schen Linien *B* und *C* liegt. Lässt man Sonnenstrahlen von mässiger Intensität durch die Flamme auf den Spalt fallen, so sieht man an dem bezeichneten Orte die Linie hell auf dunklerem Grunde; bei grösserer Stärke des Sonnenlichts aber tritt an ihrer Stelle eine dunkle Linie auf, die ganz denselben Charakter hat wie die Fraunhofer'schen Linien. Entfernt man die Flamme, so verschwindet die Linie, so weit ich habe sehen können, vollständig.

Ich schliesse aus diesen Beobachtungen, dass farbige Flammen, in deren Spectrum helle, scharfe Linien vorkommen, Strahlen von der Farbe dieser Linien, wenn dieselben durch sie hindurchgehen, so schwächen, dass an Stelle der hellen Linien dunkle auftreten, sobald hinter der Flamme eine Lichtquelle von hinreichender Intensität angebracht wird, in deren Spectrum diese Linien sonst fehlen. Ich schliesse weiter, dass die dunkeln Linien des Sonnenspectrums, welche nicht durch die Erdatmosphäre hervorgerufen werden, durch die Anwesenheit derjenigen Stoffe in der glühenden Sonnenatmosphäre entstehen, welche in dem Spectrum einer Flamme helle Linien an demselben Orte erzeugen. Man darf annehmen, dass die hellen mit *D* übereinstimmenden Linien im Spectrum einer Flamme stets von einem Natriumgehalte derselben herrühren; die dunkeln Linien *D* im Sonnenspectrum lassen daher schliessen,

dass in der Sonnenatmosphäre Natrium sich befindet. Brewster hat im Spectrum der Salpeterflamme helle Linien aufgefunden am Orte der Fraunhofer'schen Linien *A*, *a*, *B*; diese Linien deuten auf einen Kaliumgehalt der Sonnenatmosphäre. Aus meiner Beobachtung, nach der dem rothen Lithiumstreifen keine dunkle Linie im Sonnenspectrum entspricht, würde mit Wahrscheinlichkeit folgen, dass Lithium in der Atmosphäre der Sonne nicht, oder doch nur in verhältnissmässig geringer Menge vorkommt.

Die Untersuchung der Spectren farbiger Flammen hat hiernach ein neues und hohes Interesse gewonnen; ich werde gemeinschaftlich mit Bunsen dieselbe so weit führen, als es unsere Mittel gestatten. Dabei werden wir die durch meine Beobachtungen festgestellte Schwächung der Lichtstrahlen in Flammen weiter erforschen. Bei den Versuchen, die in dieser Richtung von uns bereits angestellt sind, hat sich schon eine Thatsache ergeben, die uns von grosser Wichtigkeit zu sein scheint. Das Drummond'sche Licht erfordert, damit in ihm die Linien *D* dunkel hervortreten, eine Kochsalzflamme von niederer Temperatur. Die Flamme von wässerigem Alkohol ist hierzu geeignet, die Flamme der Bunsen'schen Gaslampe aber nicht. Bei der letzteren bewirkt die kleinste Menge von Kochsalz, sobald sie überhaupt sich bemerklich macht, dass die hellen Natriumlinien sich zeigen. Wir behalten es uns vor, die Consequenzen zu entwickeln, die an diese Thatsache sich knüpfen lassen.

Ueber den Zusammenhang zwischen Emission und Absorption von Licht und Wärme.[1])

Vor einigen Wochen habe ich die Ehre gehabt, der Akademie eine Mittheilung über einige Beobachtungen zu machen, die mir namentlich deshalb von Interesse zu sein schienen, weil sie Schlüsse über die chemische Beschaffenheit der Sonnenatmosphäre ermöglichen. Von diesen Beobachtungen ausgehend, bin

[1]) Monatsbericht der Akad. d. Wiss. zu Berlin. Dec. 1859.

ich jetzt durch eine sehr einfache theoretische Betrachtung zu einem allgemeinen Satze gelangt, der mir in vielfacher Beziehung von Wichtigkeit zu sein scheint, und den ich deshalb mir erlaube der Akademie vorzulegen. Er spricht eine Eigenschaft aller Körper aus, die sich auf die Emission und Absorption von Wärme und Licht bezieht.

Wenn man in die nichtleuchtende Flamme der Bunsenschen Lampe Chlornatrium oder Chlorlithium bringt, so erhält man einen glühenden Körper, welcher nur Licht von gewisser Wellenlänge aussendet und nur Licht von derselben Wellenlänge absorbirt. In dieser Weise lässt sich das Resultat der erwähnten Beobachtungen aussprechen. Wie derselbe den dunkeln Wärmestrahlen gegenüber in Beziehung auf Emission und Absorption sich verhält, weiss man nicht; aber es erscheint als unbedenklich, sich einen Körper als möglich vorzustellen, der von allen Wärmestrahlen, den leuchtenden wie den dunkeln, nur Strahlen einer Wellenlänge aussendet und nur Strahlen derselben Wellenlänge absorbirt. Giebt man dieses zu und betrachtet überdies einen Spiegel, der alle Strahlen vollständig reflectirt, als möglich, so kann man aus den allgemeinen Grundsätzen der mechanischen Wärmetheorie sehr leicht beweisen, dass für Strahlen derselben Wellenlänge bei derselben Temperatur das Verhältniss des Emissionsvermögens zum Absorptionsvermögen bei allen Körpern dasselbe ist.

Man denke sich in Gestalt einer unbegrenzten Platte einen Körper C, der nur Strahlen von der Wellenlänge λ aussendet und nur solche absorbirt; diesem gegenübergestellt sei ein Körper c in Gestalt einer ähnlichen Platte, der Strahlen von allen möglichen Wellenlängen aussendet und absorbirt; die äusseren Flächen dieser Platten seien mit den vollkommenen Spiegeln R und r bedeckt. Wenn in diesem Systeme die Gleichheit der Temperatur sich einmal hergestellt hat, so muss jeder der beiden Körper dieselbe Temperatur behalten, also durch Absorption so viel Wärme aufnehmen, als er durch Ausstrahlung verliert. Nun betrachte man von den Strahlen, die c aussendet, zuerst diejenigen von einer Wellenlänge λ, die verschieden von λ ist. Auf diese Strahlen hat der Körper C keinen Einfluss; sie wer-

den von dem Spiegel R so reflectirt, als ob C gar nicht vorhanden wäre; ein gewisser Theil von ihnen wird dann von c absorbirt, die übrigen gelangen zum zweiten Male an den Spiegel R, werden von diesem abermals reflectirt, von c theilweise absorbirt u. s. f. Alle Strahlen von der Wellenlänge λ, die der Körper c aussendet, werden auf diese Weise nach und nach wieder von ihm aufgenommen. Da dieses für alle Werthe von λ gilt, die verschieden von A sind, so erfordert die Unveränderlichkeit der Temperatur des Körpers c, dass dieser von den Strahlen von der Wellenlänge A so viel absorbirt, als er selbst aussendet. Für diese Wellenlänge sei e das Emissionsvermögen, a das Absorptionsvermögen des Körpers c, E und A seien die entsprechenden Grössen für den Körper C. Von der Strahlenmenge E, die C aussendet, absorbirt dann c die Menge aE und wirft $(1-a)E$ zurück; hiervon absorbirt C die Menge $A(1-a)E$ und wirft $(1-A)(1-a)E$ nach c zurück, welches davon $a(1-A)(1-a)E$ absorbirt. Setzt man diese Betrachtung fort, so sieht man, dass c von E eine Strahlenmenge aufnimmt, die, wenn man der Kürze wegen

$$(1-A)(1-a) = k$$

setzt,

$$= aE(1 + k + k^2 + k^3 + \ldots),$$

d. h.

$$= \frac{aE}{1-k}$$

ist. Von der Strahlenmenge e, die c selbst aussendet, absorbirt c, wie eine ähnliche Ueberlegung zeigt, die Menge

$$\frac{a(1-A)e}{1-k}.$$

Die Bedingung dafür, dass die Temperatur von c sich nicht ändert, ist daher die Gleichung

$$e = \frac{aE}{1-k} + \frac{a(1-A)e}{1-k},$$

d. h. die Gleichung

$$\frac{e}{a} = \frac{E}{A}.$$

Zu derselben Gleichung gelangt man, wenn man die Bedingung dafür entwickelt, dass die Temperatur von C constant bleibt.

Denkt man sich den Körper c durch einen anderen ersetzt von derselben Temperatur, so findet man durch Wiederholung der angestellten Betrachtung denselben Werth für das Verhältniss des Emissionsvermögens zum Absorptionsvermögen dieses Körpers für die Strahlen derselben Wellenlänge λ. Die Wellenlänge λ und die Temperatur sind aber willkürlich. Es folgt also der Satz, dass für Strahlen derselben Wellenlänge bei derselben Temperatur das Verhältniss des Emissionsvermögens zum Absorptionsvermögen bei allen Körpern dasselbe ist.

Die Begriffe des Emissionsvermögens und des Absorptionsvermögens beziehen sich hierbei zunächst auf den Fall, dass der Körper eine unbegrenzte Platte bildet, die auf der einen Seite mit einem vollkommenen Spiegel belegt ist. Aber die Strahlenmenge, welche eine frei stehende Platte nach einer Seite hin aussendet, ist eben so gross als die Strahlenmenge, welche eine mit einem solchen Spiegel versehene Platte von der halben Dicke ausgiebt, und diese beiden Platten bringen eine gleiche Absorption bei auffallenden Strahlen hervor. Man kann hiernach bei dem ausgesprochenen Satze das Emissionsvermögen des Körpers auch definiren als die Strahlenmenge, die eine frei stehende, aus dem Körper gebildete, unbegrenzte Platte nach einer Seite hin aussendet, und das Absorptionsvermögen als die Strahlenmenge, welche dieselbe Platte absorbirt von der Einheit der Strahlenmenge, die sie trifft.

Das allen Körpern gemeinsame Verhältniss des Emissionsvermögens zum Absorptionsvermögen $\frac{e}{a}$ ist eine Function der Wellenlänge und der Temperatur. Bei niederen Temperaturen ist diese Function $= 0$ für die Wellenlängen der sichtbaren Strahlen, von 0 verschieden für grössere Werthe der Wellenlänge; bei höheren Temperaturen hat die Function auch für die Wellenlängen der sichtbaren Strahlen endliche Werthe. Bei derjenigen Temperatur, bei der die Function aufhört $= 0$ zu sein für die Wellenlänge eines gewissen sichtbaren Strahls, fangen alle Körper an, Licht von der Farbe dieses Strahls auszusenden, mit Ausnahme derjenigen, welche für diese Farbe und diese Temperatur ein verschwindend kleines Absorptionsvermögen haben; je grösser das Absorptionsvermögen ist, desto mehr

Licht strahlt der Körper aus. Die Erfahrung, dass die undurchsichtigen Körper bei derselben Temperatur erglühen, die durchsichtigen Gase hierzu aber eine viel höhere Temperatur erfordern, und dass die letzteren bei der nämlichen Temperatur immer schwächer leuchten als jene, findet hierin ihre Erklärung. Ferner folgt, dass, wenn ein glühendes Gas ein discontinuirliches Spectrum giebt, und man durch dasselbe Strahlen von hinreichender Intensität gehen lässt, die an sich ein Spectrum ohne dunkle oder helle Streifen darbieten, dunkle Streifen an den Stellen des Spectrums auftreten müssen, an denen die hellen Streifen im Spectrum des glühenden Gases lagen. Der Weg, den ich in meiner früheren Mittheilung als geeignet zur chemischen Analyse der Sonnenatmosphäre bezeichnet habe, hat hierdurch seine theoretische Begründung erhalten.

Ich benutze diese Gelegenheit, um einen Erfolg zu erwähnen, den ich auf diesem Wege seit meiner früheren Mittheilung gewonnen zu haben meine. Nach den Untersuchungen von Wheatstone, Masson, Angström und Anderen weiss man, dass im Spectrum eines elektrischen Funkens helle Linien sich zeigen, die von der Natur der Metalle abhängig sind, zwischen denen der Funke überspringt, und man kann annehmen, dass diese Linien übereinstimmen mit denjenigen, die in dem Spectrum einer Flamme von sehr hoher Temperatur sich bilden würden, wenn man in diese dasselbe Metall in passender Form brächte. Ich habe den grünen Theil des Spectrums des elektrischen Funkens zwischen Eisenelektroden untersucht und in diesem eine grosse Zahl von hellen Linien gefunden, die mit dunkeln Linien des Sonnenspectrums zu coincidiren scheinen. Bei einzelnen Linien ist die Coincidenz wohl kaum mit Sicherheit zu constatiren; aber ich habe dieselbe bei vielen Gruppen zu sehen geglaubt und zwar in der Weise, dass den helleren Linien im Funkenspectrum die dunkleren im Sonnenspectrum entsprachen; hieraus glaube ich schliessen zu dürfen, dass diese Coincidenzen nicht nur scheinbare waren. Wurde der Funke zwischen anderen Metallen, z. B. zwischen Kupferelektroden, gebildet, so fehlten diese hellen Linien. Ich halte mich für berechtigt, hieraus den Schluss zu ziehen, dass unter den Bestandtheilen der glühenden Sonnenatmosphäre sich Eisen befin-

det, einen Schluss, der übrigens sehr nahe liegt, wenn man das häufige Vorkommen des Eisens in der Erde und in den Meteorsteinen bedenkt. Von den dunkeln Linien des Sonnenspectrums, die mit hellen des Eisenspectrums zusammenzufallen scheinen, kann ich mit Bezugnahme auf die von Fraunhofer gegebene Zeichnung des Sonnenspectrums nur wenige beschreiben; es gehören zu diesen die Linie *E*, einige weniger scharfe Linien dicht neben *E* nach dem violetten Ende des Spectrums hin und eine Linie, die zwischen den beiden nächsten der drei sehr ausgezeichneten Linien sich befindet, die Fraunhofer bei *b* gezeichnet hat.

Ueber das Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht.[1])

§. 1.

Annahmen.

Die Wärmestrahlen sind ihrer Natur nach den Lichtstrahlen gleich; diese bilden eine specielle Classe jener. Die nicht sichtbaren Wärmestrahlen unterscheiden sich von den Lichtstrahlen nur durch den Werth der Schwingungsdauer oder Wellenlänge.

Alle Wärmestrahlen gehorchen bei ihrer Fortpflanzung denselben Gesetzen, die für die Lichtstrahlen erkannt worden sind.

Ein leuchtender Körper, der in einem leeren Raume sich befindet, sendet Lichtstrahlen aus, die unabhängig von den Körpern sind, auf welche sie fallen; entsprechend sind alle Wärmestrahlen, welche ein Körper aussendet, unabhängig von den Körpern, die die Umgebung jenes bilden.

Von den Wärmestrahlen, die dem Körper von seiner Um-

---

[1]) Untersuchungen über das Sonnenspectrum und die Spectren der chemischen Elemente, 2. Ausgabe, Berlin, Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung 1862.

gebung zugeschickt werden, wird ein Theil absorbirt, der andere in Richtungen, die durch Reflexion und Brechung geändert sind, wieder fortgesandt. Die von ihm gebrochenen und reflectirten Strahlen bestehen neben den von ihm ausgesendeten, ohne dass eine gegenseitige Störung stattfindet.

Durch die Wärmestrahlen, welche ein Körper aussendet, wird der Regel nach die Wärmemenge, die er enthält, einen Verlust erleiden, der der lebendigen Kraft jener Strahlen äquivalent ist, und durch die Wärmestrahlen, die er absorbirt, einen Gewinn, der äquivalent ist der lebendigen Kraft der absorbirten Strahlen. In gewissen Fällen kann aber eine Ausnahme von dieser Regel stattfinden, indem die Absorption und die Ausstrahlung andere Veränderungen des Körpers bewirkt, wie z. B. bei Körpern, die vom Lichte chemisch verändert werden, und Lichtsaugern, die durch die Ausstrahlung des Lichtes, welches sie aufgenommen haben, die Eigenschaft zu leuchten verlieren. Solche Fälle sollen ausgeschlossen werden durch die Annahme, dass der Körper die Eigenschaft besitzt, weder durch die Strahlen, die er aussendet oder absorbirt, noch durch andere Einflüsse, denen er ausgesetzt ist, irgend eine Veränderung zu erleiden, wenn seine Temperatur durch Zuführung oder Entziehung von Wärme constant erhalten wird. Unter dieser Bedingung ist nach dem Satze von der Aequivalenz von Wärme und Arbeit die Wärmemenge, welche dem Körper in einer gewissen Zeit zugeführt werden muss, um die Abkühlung zu verhindern, die in Folge seiner Strahlung eintreten würde, äquivalent der lebendigen Kraft der ausgesendeten Strahlen, und die Wärmemenge, welche ihm entzogen werden muss, um die Erwärmung durch Absorption von Wärmestrahlen aufzuheben, äquivalent der lebendigen Kraft der absorbirten Strahlen.

Ein Körper, welcher dieser Bedingung genügt, sei in eine Hülle eingeschlossen, die dieselbe Temperatur wie er hat, durch die keine Wärmestrahlen hindurchgehen können, deren Temperatur constant erhalten wird, und die derselben Bedingung genügt. Der Körper sendet Wärmestrahlen aus und wird getroffen von solchen, die theils von der Hülle ausgegangen, theils durch Reflexion von dieser zu ihm zurückgeworfen sind;

er absorbirt einen Theil dieser. Seine Temperatur muss dabei dieselbe bleiben, ohne dass ihm Wärme entzogen oder mitgetheilt wird, wie aus dem Principe folgt, aus dem der Carnot'sche Satz sich ergiebt. Es muss deshalb die lebendige Kraft der Strahlen, die er in gewisser Zeit aussendet, gleich der lebendigen Kraft der Strahlen sein, die er in derselben Zeit absorbirt.

Der zu führende Beweis, der auf diesen Schluss sich stützt, erfordert die genaue Untersuchung der Strahlen, die zwischen dem Körper und der Hülle hin- und hergehen; diese Untersuchung wird wesentlich erleichtert, wenn man sich die Hülle, ganz oder zum grössten Theile, aus Körpern gebildet denkt, die bei unendlich kleiner Dicke alle Strahlen, die auf sie fallen, vollständig absorbiren.

Ich will solche Körper vollkommen schwarze, oder kürzer schwarze nennen. Ein schwarzer Körper, in diesem Sinne des Wortes, muss dasselbe Brechungsverhältniss haben, wie das Mittel, in dem die Strahlung erfolgt; dann tritt an seiner Oberfläche keine Reflexion ein, und alle auffallenden Strahlen können vollständig absorbirt werden. Dichter Joddampf in Berührung mit atmosphärischer Luft, oder Pech in Berührung mit Glas können nahezu als schwarze Körper betrachtet werden, nicht aber Joddampf in Berührung mit Glas oder Pech in Berührung mit Luft. Es soll hier zunächst die Strahlung im leeren Raume untersucht werden; die schwarzen Körper, von welchen die Rede sein wird, müssen daher ein Brechungsverhältniss haben, welches nur unendlich wenig von 1 verschieden ist.

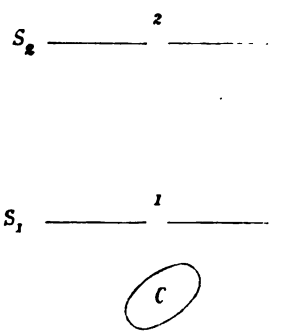
Die Annahme, dass solche schwarze Körper denkbar sind, bildet ein wesentliches Hülfsmittel bei dem Beweise, der hier geführt werden soll. Ferner wird angenommen werden, dass vollkommen diathermane Körper denkbar sind, also solche, die von auffallenden Wärmestrahlen — welcher Natur diese auch sein mögen — Nichts absorbiren, und endlich, dass ein vollkommener Spiegel denkbar ist, d. h. ein Körper, welcher alle Wärmestrahlen vollständig reflectirt. Ein vollkommener Spiegel, sowie jeder vollkommen diathermane Körper kann selbst keine Strahlen aussenden; denn thäte er es, so würde

er (in eine Hülle von gleicher Temperatur eingeschlossen) diese Hülle mehr und mehr erwärmen und sich selbst mehr und mehr abkühlen.

§. 2.
Definitionen.

Vor einem Körper C, Fig. 24, denke man sich zwei Schirme S_1 und S_2 aufgestellt, in welchen die beiden Oeffnungen 1 und 2 sich befinden, deren Dimensionen unendlich klein gegen ihre Entfernung sind, und von denen eine jede einen Mittelpunkt hat. Durch diese Oeffnungen tritt ein Bündel der Strahlen, die der Körper C aussendet. Von diesem Strahlenbündel betrachte man den Theil, dessen Wellenlängen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegen, und zerlege denselben in zwei polarisirte Componenten, deren Polarisationsebenen die auf einander rechtwinkligen, durch die Axe des Strahlenbündels gehenden Ebenen a und b sind. $Ed\lambda$ sei die Intensität der nach a polarisirten Componente oder, was dasselbe ist, der Zuwachs, den die lebendige Kraft des Aethers oberhalb des Schirmes S_2 durch diese Componente in der Zeiteinheit erfährt. Die Grösse E heisse das Emissionsvermögen des Körpers C.

Fig. 24.



Auf den Körper C falle umgekehrt durch die Oeffnungen 2 und 1 ein Strahlenbündel von der Wellenlänge λ, das nach der Ebene a polarisirt ist; von diesem absorbirt der Körper einen Theil, während er das Uebrige reflectirt oder durchlässt; das Verhältniss der Intensität der absorbirten Strahlen zu der der auffallenden sei A und heisse das Absorptionsvermögen des Körpers C.

Die Grössen E und A hängen von der Natur und dem Zustande des Körpers C ab, ausserdem aber auch von der Lage und Gestalt der Oeffnungen 1 und 2, von der Wellenlänge λ und der Richtung der Ebene a.

§. 3.

Bei diesen Festsetzungen gilt der Satz:

Das Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen ist für alle Körper bei derselben Temperatur dasselbe.

Es soll dieser Satz zuerst für den Fall bewiesen werden, dass man nur schwarze Körper mit einander vergleicht, also solche, deren Absorptionsvermögen = 1 ist; d. h. es soll gezeigt werden, dass das Emissionsvermögen aller schwarzen Körper bei derselben Temperatur dasselbe ist. Der Beweis dieses speciellen Satzes ist ähnlich dem des allgemeinen, aber einfacher; er wird daher das Verständniss des letzteren erleichtern. Ueberdies werden Folgerungen, die aus dem speciellen Satze sich ergeben, bei dem Beweise des allgemeinen gebraucht.

§. 4.

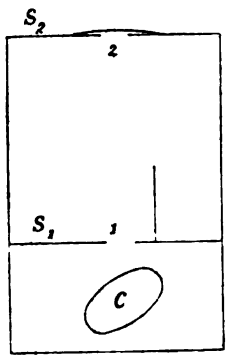
Beweis des Satzes §. 3 für schwarze Körper.

Jener Körper C sei ein schwarzer; sein Emissionsvermögen, das im Allgemeinen durch E bezeichnet ist, werde e genannt; es soll bewiesen werden, dass e ungeändert bleibt, wenn C durch irgend einen anderen schwarzen Körper von derselben Temperatur ersetzt wird.

Man denke sich den Körper C in eine schwarze Hülle eingeschlossen, von der der Schirm S_1 einen Theil ausmacht; der zweite Schirm S_2 sei wie der erste aus einer schwarzen Substanz gebildet, und beide seien durch schwarze Seitenwände ringsum mit einander verbunden, wie Fig. 25 andeutet. Die Oeffnung 2 denke man sich zuerst durch eine gleichfalls schwarze Fläche, die ich die Fläche 2 nennen will, verschlossen. Das ganze System soll dieselbe Temperatur besitzen und die Hülle von Aussen her auf constanter Temperatur erhalten werden. Nach den in §. 1 gemachten Auseinandersetzungen muss dann die lebendige Kraft der Strahlen, die der Körper C in einer gewissen Zeit aussendet, gleich sein der lebendigen Kraft der Strahlen, die er in derselben Zeit absorbirt; mit anderen Worten: die Summe der Intensitäten der Strahlen, die

er aussendet, muss gleich sein der Summe der Intensitäten der Strahlen, die ihn treffen, da er die letzteren, der Voraussetzung gemäss, vollständig absorbirt. Nun stelle man sich vor, dass die Fläche 2 entfernt und die frei gemachte Oeffnung verschlossen werde durch ein unmittelbar dahinter gesetztes Stück einer vollkommen spiegelnden Kugelfläche, die ihren Mittelpunkt in dem Mittelpunkte der Oeffnung 1 hat. Das Gleichgewicht der Temperatur wird auch dann bestehen. Jene Gleichheit der Intensität der Strahlen, die der Körper C aussendet, und derer, von welchen er getroffen wird, muss also auch jetzt stattfinden. Da aber der Körper C jetzt dieselben Strahlen aussendet, wie in dem vorher gedachten Falle, so folgt, dass die Intensität der Strahlen, welche in beiden Fällen den Körper C treffen, dieselbe ist. Durch die Entfernung der Fläche 2 sind dem Körper C die Strahlen entzogen, die jene durch die Oeffnung 1 hindurchsendete; dafür wirft der an der Oeffnung 2 angebrachte Hohlspiegel gerade diejenigen Strahlen zu dem Körper C zurück, die dieser selbst durch die Oeffnungen 1 und 2 hindurchsendet, denn der Hohlspiegel entwirft von der Oeffnung 1 ein Bild, welches mit ihr selbst zusammenfällt.[1]) Es ergiebt sich hieraus, dass die Intensität des Strahlenbündels, welches der Körper C durch die Oeffnungen 1 und 2 ausschickt, gleich ist der Intensität des Strahlenbündels, welches die schwarze Fläche 2 durch die Oeffnung 1 entsendet. Da diese Intensität unabhängig ist von der Gestalt und weiteren Beschaffenheit des schwarzen Körpers C, so ist es jene ebenfalls. Es wäre hiermit der ausgesprochene Satz bewiesen, wenn alle Strahlen der beiden eben mit einander verglichenen Strahlen-

Fig. 25.



[1]) Von der Beugung der Strahlen an den Rändern der Oeffnung 2 kann man absehen, denn die Oeffnungen 1 und 2 können unendlich klein gegen ihre Entfernung und doch noch unendlich gross gegen die Wellenlängen, d. h. so gross angenommen werden, dass die Beugungserscheinungen unmerklich sind.

bündel von der Wellenlänge λ und nach der Ebene a polarisirt wären. Die beiden Strahlenbündel sind aber aus verschiedenartigen Theilen zusammengesetzt, und aus der Gleichheit der Intensitäten der ganzen Bündel lässt sich nicht unmittelbar auf die Gleichheit der Intensitäten der entsprechenden Theile schliessen.

Die nöthige Ergänzung des Beweises wäre leicht gegeben, wenn eine Platte als möglich angenommen werden könnte, die die Eigenschaft besässe, Strahlen, deren Wellenlängen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegen und deren Polarisationsebene parallel der Ebene a ist, ungeschwächt hindurchzulassen, Strahlen von anderer Wellenlänge oder entgegengesetzter Polarisationsrichtung aber vollständig zu reflectiren. Dächte man die in Fig. 25 dargestellte Anordnung sich durch Anbringung einer solchen Platte vor der Oeffnung 1 modificirt, so gelangte man durch die in Bezug auf diese Figur angestellte Betrachtung unmittelbar zu dem zu beweisenden Satze.

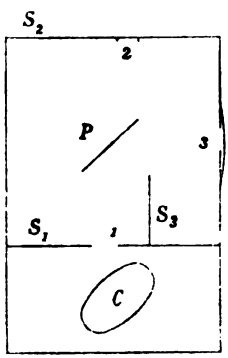
Die Annahme, dass eine solche Platte möglich sei, ist aber durch Nichts gerechtfertigt. Dagegen ist eine Platte möglich, welche von Strahlen, die sie in derselben Richtung treffen, verschieden viel hindurchlässt und reflectirt, je nach ihrer Wellenlänge und Polarisationsrichtung. Eine Platte, welche so dünn ist, dass sie in den sichtbaren Strahlen die Farben dünner Blättchen zeigt, und welche den Strahlen schief in den Weg gestellt ist, leistet dieses. Eine solche Platte soll benutzt werden bei dem Versuche, dessen Ausführung gedacht wird. Dabei soll aber eine solche Einrichtung getroffen werden, dass die beiden Strahlenbündel, um deren Vergleichung es sich handelt, nicht durch die Platte hindurchgehn, sondern von ihr reflectirt werden, und zwar unter dem Polarisationswinkel, während die Reflexionsebene mit der Ebene a zusammenfällt. Man erlangt dadurch den Vortheil, dass die senkrecht zu a polarisirten Strahlen aus der Betrachtung ganz fortfallen. Die Platte soll weiter aus einem vollkommen diathermanen Mittel gebildet sein; sie absorbirt dann keine Strahlen und sendet keine aus.

§. 5.

Bei der Fig. 25 beschriebenen Anordnung denke man sich zwischen die Oeffnungen 1 und 2 eine Platte der beschriebenen

Art gebracht, die durch P bezeichnet werden soll. Sie sei so gerichtet, dass das durch die Oeffnungen 1 und 2 tretende Strahlenbündel sie unter dem Polarisationswinkel trifft und die Einfallsebene die Ebene a ist. Die Wand, welche die Schirme S_1 und S_2 mit einander verbindet, sei so gestaltet, dass das Spiegelbild, welches die Platte P von der Oeffnung 2 entwirft, in ihr liegt; an dem Orte und von der Gestalt dieses Spiegelbildes denke man sich eine Oeffnung, welche ich die Oeffnung 3 nennen will. Die Oeffnung 2 sei durch eine schwarze Fläche von der Temperatur des ganzen Systems, die Oeffnung 3 einmal durch eine eben solche Fläche, die ich als die Fläche 3 bezeichnen werde, das andere Mal durch einen vollkommenen Hohlspiegel verschlossen, der seinen Mittelpunkt an dem Orte des Spiegelbildes hat, das die Platte P von dem Mittelpunkte der Oeffnung 1 entwirft. In beiden Fällen findet ein Gleichgewicht der Wärme statt; durch eine Betrachtung, wie sie im vorigen Paragraphen durchgeführt ist, folgt daraus, dass die Summe der Intensitäten der Strahlen, die durch Entfernung der Fläche 3 dem Körper C entzogen werden, gleich ist der Summe der Intensitäten der Strahlen, die diesem durch Anbringung des Hohlspiegels zugeführt werden. Ein schwarzer Schirm (von der Temperatur des ganzen Systems), S_3, sei so aufgestellt, dass direkt keine von den Strahlen, die die Fläche 3 aussendet, die Oeffnung 1 treffen. Die erste Summe ist dann die Intensität der Strahlen, die von der Fläche 3 ausgegangen, an der Platte P reflectirt und durch die Oeffnung 1 getreten sind; sie werde durch Q bezeichnet. Die zweite Summe setzt sich aus zwei Theilen zusammen; der eine Theil rührt von dem Körper C her und ist:

Fig. 26.



$$= \int_0^\infty d\lambda e r^2,$$

wo r eine von der Beschaffenheit der Platte P und der Wellen-

länge λ abhängige Grösse bedeutet; der zweite Theil rührt von Strahlen her, welche von einem Theile der schwarzen Wand ausgegangen sind, die die Schirme S_1 und S_2 verbindet, die Platte P durchdrungen haben, von dem Hohlspiegel und dann von der Platte P reflectirt sind; dieser Theil werde durch R bezeichnet. Es ist unnöthig, den Werth von R näher zu untersuchen; es genügt zu bemerken, dass R, ebenso wie Q, von der Beschaffenheit des Körpers C unabhängig ist. Zwischen den eingeführten Grössen besteht die Gleichung:

$$\int_0^\infty d\lambda e r^2 + R = Q.$$

Denkt man sich nun den Körper C durch einen anderen schwarzen Körper von derselben Temperatur ersetzt, und bezeichnet man für diesen mit e', was man für jenen mit e bezeichnet hat, so gilt auch die Gleichung:

$$\int_0^\infty d\lambda e' r^2 + R = Q.$$

Hieraus folgt:

$$\int_0^\infty d\lambda (e - e') r^2 = 0.$$

Man nehme nun an, dass das Brechungsverhältniss der Platte P nur wenig von der Einheit verschieden ist. Aus der Theorie der Farben dünner Blättchen folgt dann, dass

$$r = \varrho \sin^2 \frac{p}{\lambda}$$

gesetzt werden kann, wo p eine mit der Dicke der Platte P proportionale, von λ unabhängige, ϱ eine von dieser Dicke unabhängige Grösse bedeutet. Hierdurch wird die abgeleitete Gleichung:

$$\int_0^\infty d\lambda (e - e') \varrho^2 \sin^4 \frac{p}{\lambda} = 0.$$

Daraus, dass diese Gleichung für jede Dicke der Platte P, also für jeden Werth von p bestehen muss, lässt sich schliessen, dass für jeden Werth von λ

$$e - e' = 0$$

ist. Um den Beweis hierfür zu führen, setze man in Gleichung für $\sin^4 \frac{p}{\lambda}$:

$$\frac{1}{8}\left(\cos 4\,\frac{p}{\lambda} - 4\cos 2\,\frac{p}{\lambda} + 3\right)$$

und differenzire sie zweimal nach p; man erhält dadurch:

$$\int_0^\infty d\lambda\, \frac{(e-e')\varrho^2}{\lambda^2}\left(\cos 4\,\frac{p}{\lambda} - \cos 2\,\frac{p}{\lambda}\right) = 0.$$

An Stelle von λ führe man nun eine neue Grösse α die Gleichung:

$$\frac{2}{\lambda} = \alpha$$

ein und setze:

$$(e - e')\varrho^2 = f(\alpha).$$

Man erhält dadurch:

$$\int_0^\infty d\alpha f(\alpha)(\cos 2p\alpha - \cos p\alpha) = 0.$$

Erwägt man, dass, wenn $\varphi(\alpha)$ eine beliebige Function bedeutet,

$$\int_0^\infty d\alpha\, \varphi(\alpha)\cos 2p\alpha = \frac{1}{2}\int_0^\infty d\alpha\, \varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos p\alpha$$

ist, wovon man sich überzeugt, wenn man $\frac{\alpha}{2}$ für α setzt, kann man dafür schreiben:

$$\int_0^\infty d\alpha \left[f\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2f(\alpha)\right]\cos p\alpha = 0.$$

Diese Gleichung multiplicire man mit

$$dp \cos xp,$$

wo x eine willkürliche Grösse bedeutet, und integrire von $p = 0$ bis $p = \infty$. Nach dem Fourier'schen Satze, der die Gleichung:

$$\int_0^\infty d p \cos p x \int_0^\infty d \alpha \varphi(\alpha) \cos p \alpha = \frac{\pi}{2} \varphi(x)$$

ausgesprochen ist, erhält man dadurch:

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = 2 f(x)$$

oder

$$f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2 f(\alpha).$$

Hieraus folgt, dass $f(\alpha)$ entweder für alle Werthe von α verschwindet oder unendlich gross werden muss, wenn α sich der Null nähert. Wenn α sich der Null nähert, wird λ unendlich. Erinnert man sich an die Bedeutung von $f(\alpha)$ und erwägt, dass ϱ ein echter Bruch ist, und dass weder e noch e' unendlich werden können, wenn λ ins Unendliche wächst, so sieht man ein, dass der zweite Fall nicht stattfinden kann und dass daher für alle Werthe von λ

$$e = e'$$

sein muss.

In ähnlicher Weise soll der Fall behandelt werden, dass der Körper C kein schwarzer, sondern ein beliebiger ist. Von demselben soll nicht vorausgesetzt werden, dass er homogen ist; theils an seiner Oberfläche, theils in seinem Innern werden daher die Strahlen, die von der schwarzen Hülle auf ihn fallen, die mannigfaltigsten Modificationen erleiden können. Aus diesem Grunde muss als Vorbereitung zu dem zu führenden Beweise eine Untersuchung der Strahlung, die zwischen schwarzen Flächen gleicher Temperatur durch beliebige Körper hindurch stattfindet, vorgenommen werden. Dieser Untersuchung, die sich auf den eben bewiesenen Satz stützt, sind die nächsten Paragraphen gewidmet.

§. 6.

Strahlung schwarzer Flächen gegen einander.

Wenn das Strahlenbündel, welches der schwarze Körper C durch die Oeffnungen 1 und 2 aussendet, theilweise geradlinig polarisirt wäre, so müsste die Polarisationsebene des po-

larisirten Antheiles sich drehen, wenn der Körper C um die Axe des Strahlenbündels gedreht würde. Eine solche Drehung müsste daher den Werth von e ändern. Da nach der bewiesenen Gleichung eine solche Aenderung nicht eintreten kann, so hat das Strahlenbündel keinen geradlinig polarisirten Theil. Es lässt sich beweisen, dass dasselbe auch keinen circular polarisirten Theil haben kann. Der Beweis dafür soll aber hier nicht geführt werden. Auch ohne denselben giebt man zu, dass schwarze Körper sich denken lassen, in deren Structur kein Grund liegt, weshalb sie in irgend einer Richtung mehr rechts-circular polarisirte Strahlen als links-circular polarisirte Strahlen aussenden sollten. Von dieser Beschaffenheit sollen die schwarzen Körper, die in der weiteren Betrachtung vorkommen, vorausgesetzt werden; sie geben in allen Richtungen nichtpolarisirte Strahlen aus.

§. 7.

Die mit e bezeichnete Grösse hängt ausser von der Temperatur und der Wellenlänge von der Gestalt und relativen Lage der Oeffnungen 1 und 2 ab. Bezeichnet man durch w_1 und w_2 die Projectionen der Oeffnungen auf Ebenen, die senkrecht auf der Axe des betrachteten Strahlenbündels stehen, und nennt s die Entfernung der Oeffnungen, so ist:

$$e = I \frac{w_1 w_2}{s^2},$$

wo I nur eine Function der Wellenlänge und der Temperatur bedeutet.

§. 8.

Da die Gestalt des Körpers C eine willkürliche ist, so kann man für denselben auch eine Fläche substituiren, welche die Oeffnung 1 gerade ausfüllt, und welche ich die Fläche 1 nennen will; der Schirm S_1 kann dann fortgedacht werden. Auch der Schirm S_2 kann fortgedacht werden, wenn man das Strahlenbündel, auf welches sich e bezieht, als dasjenige definirt, das von der Fläche 1 auf die Fläche 2 fällt, welche die Oeffnung 2 gerade ausfüllt.

§. 9.

Eine Folgerung aus der letzten Gleichung, die sich unmittelbar darbietet, und die später benutzt werden wird, ist die, dass der Werth von e ungeändert bleibt, wenn man die Oeffnungen 1 und 2 mit einander vertauscht denkt.

§. 10.

Es soll jetzt ein Satz bewiesen werden, welcher als eine Verallgemeinerung des im letzten Paragraphen ausgesprochenen Satzes betrachtet werden kann.

Zwischen den beiden schwarzen Flächen gleicher Temperatur, 1 und 2, stelle man sich Körper vor, welche die Strahlen, die jene einander zusenden, auf beliebige Weise brechen, reflectiren und absorbiren. Es können mehrere Strahlenbündel von der Fläche 1 nach der Fläche 2 gelangen; unter diesen wähle man eins, betrachte von demselben bei 1 den Theil, dessen Wellenlängen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegen, und zerlege diesen in zwei Componenten, deren Polarisationsebenen die auf einander senkrechten (sonst beliebigen) Ebenen a_1 und b_1 sind. Was von der ersten Componente in 2 ankommt, zerlege man in zwei Componenten, deren Polarisationsebenen die auf einander senkrechten (sonst beliebigen) Ebenen a_2 und b_2 sind. Die Intensität der nach a_2 polarisirten Componente sei $K d\lambda$. Von dem Strahlenbündel, welches auf demselben Wege wie das vorige von 2 nach 1 geht, betrachte man bei 2 den Theil, dessen Wellenlängen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegen, und zerlege diesen in zwei nach a_2 und b_2 polarisirte Componenten. Was von der ersten Componente in 1 ankommt, zerlege man in zwei Componenten, deren Polarisationsebenen a_1 und b_1 sind. Die Intensität der nach a_1 polarisirten Componente sei $K' d\lambda$. Dann ist

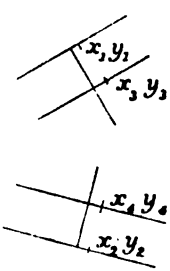
$$K = K'.$$

Der Beweis dieses Satzes soll zunächst unter der Voraussetzung geführt werden, dass die betrachteten Strahlen auf ihrem Wege keine Schwächung erleiden, unter der Voraussetzung also, dass die Brechungen und Reflexionen ohne Verlust geschehen, dass Absorption nicht stattfindet, und dass die

aus 1 nach a_1 polarisirt austretenden Strahlen in 2 nach a_2 polarisirt ankommen, so wie umgekehrt.

Durch den Mittelpunkt von 1 lege man eine Ebene senkrecht zur Axe des hier austretenden oder ankommenden Strahlenbündels und denke sich in dieser ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt jener Mittelpunkt ist. x_1, y_1 seien die Coordinaten eines Punktes der Ebene, Fig. 27. In der Einheit der Entfernung von dieser Ebene denke man sich eine zweite, ihr parallele und in dieser ein Coordinatensystem, dessen Axen parallel denen jenes sind und dessen Anfangspunkt in der Axe des Strahlenbündels liegt. x_3, y_3 seien die Coordinaten eines Punktes dieser Ebene. In ähnlicher Weise lege man durch den Mittelpunkt von 2 eine Ebene senkrecht zur Axe des hier austretenden oder auffallenden Strahlenbündels und führe in dieser ein rechtwinkliges Coordinatensystem ein, dessen Anfangspunkt der genannte Mittelpunkt ist. x_2, y_2 seien die Coordinaten eines Punktes der Ebene. In der Einheit der Entfernung von dieser Ebene und ihr parallel denke man sich endlich eine vierte und in derselben ein Coordinatensystem, dessen Axen den Axen der x_2, y_2 parallel sind und dessen Anfangspunkt in der Axe des Strahlenbündels liegt. x_4, y_4 seien die Coordinaten eines Punktes dieser vierten Ebene.

Fig. 27.



Von einem beliebigen Punkte (x_1, y_1) geht ein Strahl nach einem beliebigen Punkte (x_2, y_2); die Zeit, die er gebraucht, um von jenem Punkte nach diesem zu gelangen, sei T; sie ist eine Function von x_1, y_1, x_2, y_2, welche als bekannt vorausgesetzt werden soll. Wenn die Punkte (x_3, y_3) und (x_4, y_4) auf dem Wege des genannten Strahles liegen, so ist (wenn der Kürze wegen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles im leeren Raume als Einheit angenommen wird) die Zeit, die der Strahl gebraucht, um von (x_3, y_3) nach (x_4, y_4) zu gelangen,

$$= \mathrm{T} - \sqrt{1 + (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} - \sqrt{1 + (x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2}.$$

Gesetzt, die Punkte (x_3, y_3), (x_4, y_4) wären gegeben und die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) gesucht, so würde man diese finden können aus der Bedingung, dass der eben aufgestellte Ausdruck ein Minimum ist. Nimmt man an, dass die 8 Coordinaten x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4 unendlich klein sind, so drücken hiernach die folgenden Gleichungen die Bedingung dafür aus, dass die vier Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) auf einem Strahle liegen:

$$x_3 = x_1 - \frac{\partial T}{\partial x_1} \qquad x_4 = x_2 - \frac{\partial T}{\partial x_2}$$
$$y_3 = y_1 - \frac{\partial T}{\partial y_1} \qquad y_4 = y_2 - \frac{\partial T}{\partial y_2}.$$

Nun sei (x_1, y_1) ein Punkt der Projection der Fläche 1 auf die Ebene der x_1, y_1, und dx_1, dy_1 ein Element dieser Projection, in dem der Punkt (x_1, y_1) liegt und das von einer höheren Ordnung unendlich klein ist, als die Flächen 1 und 2 es sind. (x_3, y_3) sei ein Punkt eines Strahls, der von (x_1, y_1) ausgehend die Fläche 2 trifft, dx_3, dy_3 ein Flächenelement, in dem der Punkt (x_3, y_3) liegt, von derselben Ordnung wie dx_1, dy_1. Die Intensität der Strahlen von den bezeichneten Wellenlängen und der gewählten Polarisationsrichtung, die von $dx_1\ dy_1$ ausgehend durch $dx_3\ dy_3$ treten, ist dann nach §. 7:

$$d\lambda\ I\, dx_1\, dy_1\ dx_3\, dy_3.$$

Nach der gemachten Voraussetzung gelangt diese Strahlenmenge ungeschwächt auf die Fläche 2 und bildet ein Element der mit $K d\lambda$ bezeichneten Grösse. Es ist K das gehörig begrenzte Integral

$$I \iiiint dx_1\, dy_1\ dx_3\, dy_3.$$

Hier ist die Integration nach x_3 und y_3 über diejenigen Werthe auszudehnen, welche diese Grössen nach den für sie aufgestellten Gleichungen erhalten, während x_1 und y_1 constante Werthe behalten und x_2, y_2 alle Werthe annehmen, die den Punkten der Projection der Fläche 2 auf die Ebene der x_2, y_2 entsprechen; dann ist die Integration nach x_1, y_1 über die Projection der Fläche 1 auszuführen. Das in der bezeichneten Weise begrenzte Doppelintegral

$$\iint dx_3\, dy_3$$

ist aber

$$= \iint \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2} \frac{\partial y_3}{\partial y_2} - \frac{\partial x_3}{\partial y_2} \frac{\partial y_3}{\partial x_2} \right) dx_2\, dy_2$$

oder nach den Gleichungen für x_3, y_3

$$= \iint \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1\, \partial x_2} \frac{\partial^2 T}{\partial y_1\, \partial y_2} - \frac{\partial^2 T}{\partial x_1\, \partial y_2} \frac{\partial^2 T}{\partial x_2\, \partial y_1} \right) dx_2\, dy_2,$$

wo die Integration über die Projection der Fläche 2 auszudehnen ist. Hiernach wird:

$$K = I \iiiint \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1\, \partial x_2} \frac{\partial^2 T}{\partial y_1\, \partial y_2} - \frac{\partial^2 T}{\partial x_1\, \partial y_2} \frac{\partial^2 T}{\partial x_2 \partial y_1} \right) dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2,$$

wo die Integration über die Projectionen der Flächen 1 und 2 zu nehmen ist.

Behandelt man auf dieselbe Weise die mit K' bezeichnete Grösse und benutzt dabei, dass ein Strahl dieselbe Zeit gebraucht, um den Weg zwischen zwei Punkten in dem einen oder in dem anderen Sinne zurückzulegen, so findet man für K' denselben Ausdruck, der für K gefunden ist.

Hierdurch ist der ausgesprochene Satz bewiesen unter der beschränkenden Voraussetzung, unter der er zunächst bewiesen werden sollte. Diese Beschränkung wird aber unmittelbar gehoben durch eine von Helmholtz in seiner physiologischen Optik S. 169 gemachte Bemerkung. Helmholtz sagt hier (bei etwas anderer Bezeichnung): „Ein Lichtstrahl gelange nach beliebig vielen Brechungen, Reflexionen u. s. w. von dem Punkte 1 nach dem Punkte 2. In 1 lege man durch seine Richtung zwei beliebige auf einander senkrechte Ebenen a_1 und b_1, nach welchen seine Schwingungen zerlegt gedacht werden. Zwei eben solche Ebenen a_2 und b_2 werden durch den Strahl in 2 gelegt. Alsdann lässt sich Folgendes beweisen: Wenn die Quantität i nach der Ebene a_1 polarisirten Lichts von 1 in der Richtung des besprochenen Strahls ausgeht und davon die Quantität k nach der Ebene a_2 polarisirten Lichts in 2 ankommt, so wird rückwärts, wenn die Quantität i nach a_2 po-

larisirten Lichts von 2 ausgeht, dieselbe Quantität k nach a_2 polarisirten Lichts in 1 ankommen[1])."

Benutzt man diesen Satz und bezeichnet mit γ den Werth des Verhältnisses $\frac{k}{i}$ für die beiden Strahlen, die zwischen den Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) in dem einen und dem anderen Sinne sich bewegen, so erhält man sowohl für K als für K' einen Ausdruck, der von dem gefundenen nur dadurch sich unterscheidet, dass unter den Integralzeichen noch γ als Factor auftritt.

Die Gleichheit von K und K' findet hiernach auch dann statt, wenn γ einen verschiedenen Werth für die Strahlen hat, in welche eines der verglichenen Strahlenbündel getheilt werden kann; sie hört z. B. nicht auf, wenn ein Theil des Strahlenbündels durch einen Schirm aufgefangen wird.

§. 11.

Von denselben Strahlenbündeln, die im vorigen Paragraphen mit einander verglichen sind, gilt auch der folgende Satz: Von dem Strahlenbündel, welches von 1 nach 2 geht, betrachte man bei 2 den Theil, dessen Wellenlängen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegen, und zerlege diesen in zwei Componenten, die nach a_2 und b_2 polarisirt sind; die Intensität der ersten Componente sei $Hd\lambda$. Von dem Strahlenbündel, welches von 2 nach 1 geht, betrachte man bei 2 den Theil, dessen Wellenlängen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegen, und zerlege diesen in 2 Componenten, die nach a_2 und b_2 polarisirt sind. Was von der ersten Componente in 1 ankommt, sei $H'd\lambda$. Dann ist

$$H = H'.$$

[1]) Der Satz von Helmholtz gilt, wie dieser bemerkt, nicht, wenn die Polarisationsebene des Strahles eine Drehung erfährt, wie magnetische Kräfte sie nach der Entdeckung Faraday's hervorbringen; man hat daher bei den folgenden Betrachtungen magnetische Kräfte sich als nicht wirksam zu denken. Helmholtz beschränkt seinen Satz auch durch die Annahme, dass das Licht keine Aenderung der Brechbarkeit erfahre, wie sie bei der Fluorescenz vorkommt; diese Beschränkung hört auf nöthig zu sein, wenn man bei der Anwendung des Satzes immer nur Strahlen einer Wellenlänge ins Auge fasst.

Der Beweis dieses Satzes ist der folgende. K und K sollen dieselbe Bedeutung wie im vorigen Paragraphen haben; L und L' seien die Grössen, die aus K und K' entstehen, wenn die Ebene a_1 mit der Ebene b_1 vertauscht wird. Dann ist $L = L'$, ebenso wie $K = K'$. Weiter ist

$$H = K + L,$$

weil senkrecht auf einander polarisirte Strahlen nicht interferiren, wenn sie auf eine gemeinschaftliche Polarisationsebene zurückgeführt sind, falls sie Theile eines nichtpolarisirten Strahles sind, und nach §. 6 die Fläche 1 nichtpolarisirte Strahlen aussendet.

Endlich hat man

$$H' = K' + L',$$

weil zwei Strahlen, deren Polarisationsebenen senkrecht auf einander sind, nicht interferiren. Aus diesen Gleichungen folgt: $H = H'$.

§. 12.

Es habe Fig. 25 dieselbe Bedeutung, die in §. 4 angegeben ist, nur sei der Körper C kein schwarzer, sondern ein beliebiger. Die Oeffnung 2 sei durch die Fläche 2 verschlossen. Diese Fläche sendet durch die Oeffnung 1 auf den Körper C ein Strahlenbündel, das von diesem zum Theil absorbirt, zum Theil durch Brechungen und Reflexionen nach verschiedenen Richtungen zerstreut wird. Von diesem Strahlenbündel betrachte man zwischen 2 und 1 den Theil, dessen Wellenlängen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegen, und zerlege denselben in zwei Componenten, die nach der Ebene a und der auf dieser senkrechten Ebene polarisirt sind. Was von der ersten Componente der Absorption durch den Körper C entgeht, also die schwarze Hülle trifft, in die der Körper C eingeschlossen ist, sei $M' d\lambda$. Von den Strahlen, welche die Theile dieser Hülle dem Körper C zusenden, werden gewisse durch die Oeffnung 1 auf die Fläche 2 fallen; durch die Vermittelung des Körpers C wird so ein Strahlenbündel erzeugt, welches durch die Oeffnung 1 nach der Fläche 2 geht. Von diesem betrachte man den Theil, dessen Wellenlängen zwischen λ und $\lambda + d\lambda$ liegen, und zer-

lege denselben in zwei Componenten, die nach a und der auf a senkrechten Ebene polarisirt sind. Die Intensität der ersten Componente sei $M d\lambda$. Dann ist

$$M = M'.$$

Die Richtigkeit dieses Satzes ergiebt sich aus dem Satze des vorigen Paragraphen, wenn man diesen auf alle Strahlenbündel anwendet, welche die Fläche 2 und je ein Element der schwarzen Hülle, die den Körper C umgiebt, durch Vermittlung des Körpers C mit einander austauschen, und dann die Summe der Gleichungen bildet, die man so erhält.

§. 13.

Beweis des Satzes §. 3 für beliebige Körper.

Man denke sich die in Fig. 26 dargestellte und in §. 5 beschriebene Anordnung; nur der Körper C sei kein schwarzer, sondern ein beliebiger. In den beiden dort bezeichneten Fällen findet auch dann das Gleichgewicht der Wärme statt; auch dann muss daher die lebendige Kraft, die durch Entfernung der schwarzen Fläche 3 dem Körper C entzogen wird, der lebendigen Kraft gleich sein, die diesem durch Anbringung des Hohlspiegels zugeführt wird. Die in §. 5 gebrauchten Zeichen sollen in unveränderter Bedeutung hier benutzt werden; die Zeichen E und A sollen die in §. 2 angegebene Bedeutung haben.

Wird die Fläche 3 entfernt, so werden dem Körper C die Strahlen entzogen, die diese Fläche ihm zusendete; die Intensität des Theiles dieser Strahlen, den er absorbirte, ist

$$= \int_0^\infty d\lambda e r A.$$

Nun sind die Strahlen aufzusuchen, die dem Körper durch Anbringung des Hohlspiegels zugeführt werden. Alle diese Strahlen müssen von dem Hohlspiegel nach der Platte P, von dieser nach der Oeffnung 1 geworfen werden und diese in Richtungen passiren, als kämen sie von der Oeffnung 2 her. Sie haben, bevor sie den Hohlspiegel treffen, entweder schon eine Reflexion von demselben erlitten, oder nicht. In dem

ersten Falle können sie nur durch Vermittlung des Körpers C wieder zu dem Hohlspiegel zurückgelangt sein auf dem Wege, der dem eben beschriebenen entgegengesetzt ist. Es soll zunächst vorausgesetzt werden, dass der Körper C eine solche Lage hat, dass von Strahlen, die durch die Oeffnungen 2 und 1 zu ihm gelangen, nur ein unendlich kleiner Bruchtheil von ihm wieder durch die Oeffnung 1 nach der Oeffnung 2 zurückgeworfen wird. Dann hat von den Strahlen, um deren Untersuchung es sich handelt, nur ein unendlich kleiner Bruchtheil eine mehrmalige Reflexion am Hohlspiegel erlitten, und es ist ausreichend, die Strahlen zu betrachten, welche nur einmal am Hohlspiegel reflectirt sind. Von diesen ist ein Theil vom Körper C ausgegangen, der andere von der schwarzen Hülle. Der erste Theil hat eine zweimalige Reflexion an der Platte P erfahren; die lebendige Kraft, die von ihm der Körper C absorbirt, ist

$$= \int_0^\infty d\lambda E r^2 A.$$

Der zweite Theil, welcher von der schwarzen Hülle ausgegangen ist, kann wiederum als aus zwei Theilen bestehend angesehen werden, aus einem, der ohne, und einem zweiten, der durch Vermittlung des Körpers C zum Hohlspiegel gelangt ist. Jener rührt von Strahlen her, die von der dem Hohlspiegel gegenüberliegenden schwarzen Wand ausgegangen sind und die Platte P durchdrungen haben, von dem Hohlspiegel nach der Platte P und von dieser nach der Oeffnung 1 reflectirt sind. Ohne zu untersuchen, von welchem Theile der schwarzen Wand diese Strahlen ausgegangen sind, findet man ihre Intensität mit Hülfe des §. 11 bewiesenen Satzes. Bei Rücksicht auf diesen ergibt sich die Intensität derjenigen von diesen Strahlen, die von dem Körper C absorbirt werden,

$$= \int_0^\infty d\lambda e r (1-r) A.$$

Um endlich die Intensität der Strahlen zu finden, welche von der schwarzen Hülle ausgehend durch Vermittlung des Körpers

C nach dem Hohlspiegel, von diesem nach dem Körper C zurückgelangen und hier absorbirt werden, nenne man N den Werth, in welchen die §. 12 mit M bezeichnete Grösse dadurch übergeht, dass die Platte P an ihren Ort gebracht und die Fläche 3 entfernt wird; die genannte Intensität ist dann

$$= \int_0^\infty d\lambda N r^2 A.$$

Der Unterschied von M und N rührt allein her von der Aenderung, welche die von der schwarzen Hülle durch die Oeffnung 1 auf den Körper C fallenden Strahlen durch Anbringung der Platte P und Entfernung der Fläche 3 erleiden. Denkt man sich, dass die Platte P an ihren Ort gebracht, die Fläche 3 aber nicht entfernt werde, so kann M gar keine Aenderung erfahren, da alle Strahlenbündel, welche nach der Oeffnung 1 gehen, ungeändert bleiben; das von der Fläche 2 herkommende Strahlenbündel z. B. erfährt durch Reflexion an der Platte P einen Verlust, der gerade ersetzt wird durch die Reflexion der von der Fläche 3 ausgehenden Strahlen. Der Unterschied $M - N$ ist daher allein durch die Entfernung der Fläche 3 hervorgebracht und ist also gleich dem Theile von M, der herrührt von den Strahlen, die die Fläche 3 durch Vermittlung der Platte P nach der Oeffnung 1 sendet. Nach der Voraussetzung, die in diesem Paragraphen über die Lage des Körpers C gemacht ist, ist daher $M - N$ unendlich klein gegen die Intensität der Strahlen von gleicher Wellenlänge, welche die Fläche 3 durch Vermittlung der Platte P nach der Oeffnung 1 sendet, also auch unendlich klein gegen die Intensität der Strahlen von gleicher Wellenlänge und der Polarisationsebene a, welche die Fläche 2 bei Abwesenheit der Platte P nach der Oeffnung 1 sendet, daher endlich auch unendlich klein gegen die §. 12 durch M' bezeichnete Grösse (vorausgesetzt dass $1 - A$ nicht unendlich klein ist). Da aber, wie an dem eben angeführten Orte gezeigt, $M' = M$ ist, so kann man also setzen

$$N = M = M'.$$

Nach der von M' gegebenen Definition ist aber

$$M = e\,(1 - A),$$

und daher

$$\int_0^\infty d\lambda\, N r^2 A = \int_0^\infty d\lambda\, e\,(1 - A)\, r^2 A.$$

Die am Anfange dieses Paragraphen ausgesprochene Behauptung wird daher durch die Gleichung ausgedrückt:

$$\int_0^\infty d\lambda\, e r A = \int_0^\infty d\lambda\, E r^2 A + \int_0^\infty d\lambda\, e r\,(1 - r)\, A + \int_0^\infty d\lambda\, e\,(1 - A)\, r^2 A,$$

oder durch die Gleichung:

$$\int_0^\infty d\lambda\,(E - Ae)\, A r^2 = 0.$$

Durch dieselben Betrachtungen, die in §. 5 in Bezug auf eine ähnliche Gleichung angestellt sind, gelangt man von dieser zu dem Schlusse, dass für jeden Werth von λ

$$\frac{E}{A} = e,$$

oder, wenn man für e seinen Werth aus §. 7 setzt:

$$\frac{E}{A} = I\frac{w_1 w_2}{s^2}$$

ist.

Hierdurch ist der Satz §. 3 bewiesen unter der Voraussetzung, dass von dem Strahlenbündel, welches von der Fläche 2 durch die Oeffnung 1 auf den Körper C fällt, kein endlicher Theil durch diesen nach der Fläche 2 zurückgeworfen wird; dass der Satz auch ohne diese Beschränkung gilt, sieht man ein, wenn man erwägt, dass, wenn die genannte Voraussetzung nicht erfüllt ist, man den Körper C nur unendlich wenig zu drehen braucht, um ihr zu genügen, und dass durch eine solche Drehung die Grössen E und A nur unendlich kleine Aenderungen erleiden können.

§. 14.

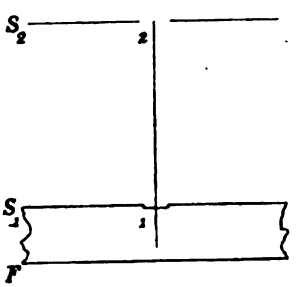
Eine Verallgemeinerung des Satzes §. 3.

Die durchgeführten Betrachtungen setzten voraus, dass der Raum, in dem die Strahlung erfolgt, ein leerer ist. Dieselben

Betrachtungen gelten aber auch, wenn dieser Raum durch irgend ein vollkommen diathermanes Mittel angefüllt ist; nur wird die Function I dann eine andere sein, als in jenem Falle. Das Zeichen I möge für den leeren Raum beibehalten und I' die entsprechende Function von Wellenlänge und Temperatur für ein gewisses diathermanes Mittel genannt werden; ist n das Brechungsverhältniss desselben bei der Temperatur und für die Wellenlänge, auf welche I und I' sich beziehen, so besteht eine einfache Relation zwischen I', I und n; dieselbe ergiebt sich, wie hier gezeigt werden soll, aus dem eben bewiesenen Satze.

Man denke sich eine von zwei parallelen Ebenen begrenzte Schicht des diathermanen Mittels, welche auf der einen Seite mit der schwarzen Fläche F in Berührung steht. Die Dicke der Schicht sei = 1. Für diesen Körper soll das Absorptionsvermögen A und das Emissionsvermögen E in Beziehung auf ein gewisses Strahlenbündel aufgesucht werden. Die Oeffnungen 1 und 2, welche die Gestalt des Strahlenbündels bestimmen, sollen sich in den Schirmen S_1 und S_2 befinden, von denen der erste die bisher als frei gedachte Fläche der Schicht bedeckt, und der zweite jenem parallel ist; die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Oeffnungen sei senkrecht zu den Schirmen. Von einem Strahlenbündel von gewisser Wellenlänge und Polarisationsrichtung, welches von der Oeffnung 2 nach der Oeffnung 1 gelangt, wird in der letzteren ein Bruchtheil, der durch ϱ bezeichnet werden möge, reflectirt; das Uebrige gelangt zur Fläche F und wird hier vollständig absorbirt; es ist daher

Fig. 28.



$$A = 1 - \varrho.$$

Um E zu finden, bezeichne man durch x, y, durch x_1, y_1 und durch x_2, y_2 die Coordinaten eines Punktes der Fläche F, der Oeffnung 1 und der Oeffnung 2, gerechnet von demjenigen Punkte, der in der Axe des Strahlenbündels sich be-

findet. Liegen diese drei Punkte in einem Strahle, so muss, wenn s wieder die Entfernung der beiden Oeffnungen bedeutet,

$$n\left(1+\frac{(x_1-x)^2}{2}+\frac{(y_1-y)^2}{2}\right)+\left(s+\frac{(x_2-x_1)^2}{2s}+\frac{(y_2-y_1)^2}{2s}\right)$$

ein Minimum in Beziehung auf x_1 und y_1 sein; d. h. es muss sein:

$$x=x_1-\frac{x_2-x_1}{ns},\ y=y_1-\frac{y_2-y_1}{ns}.$$

Sind w_1 und w_2 die Flächen der beiden Oeffnungen, so findet man durch eine Betrachtung, wie sie in grösserer Allgemeinheit in §. 10 angestellt ist, die Intensität der Strahlen (von der Polarisationsebene a und Wellenlängen, die zwischen λ und $\lambda+d\lambda$ liegen), welche, von F auf die Oeffnung 1 fallend, Theile nach der Oeffnung 2 hinsenden,

$$=I'\,d\lambda\,w_1\,w_2\left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\frac{\partial y}{\partial y_2}-\frac{\partial x}{\partial y_2}\frac{\partial y}{\partial x_2}\right),$$

d. h.

$$=\frac{I'\,d\lambda\,w_1\,w_2}{n^2s^2}.$$

Von diesen Strahlen geht der Bruchtheil $1-\rho$ durch die Oeffnung 1 und gelangt zur Oeffnung 2. Es ist also

$$E=(1-\rho)\frac{I'\,w_1\,w_2}{n^2s^2}.$$

Setzt man diese Werthe von A und E in die Gleichung

$$\frac{E}{A}=I\frac{w_1\,w_2}{s^2},$$

so ergiebt sich:

$$I'=n^2I.$$

§. 15.

Einige Folgerungen aus dem Satze §. 3.

Wenn man einen bestimmten Körper, einen Platindraht z. B., allmälig erhitzt, so sendet er, bis seine Temperatur eine gewisse geworden ist, nur Strahlen aus, deren Wellenlängen grösser sind, als die der sichtbaren Strahlen. Bei einer gewissen Temperatur fangen Strahlen von der Wellenlänge des äussersten Roth an sich zu zeigen; steigt die Temperatur höher und höher, so kommen Strahlen von kleinerer und kleinerer

Wellenlänge hinzu, in der Art, dass bei jeder Temperatur Strahlen von einer entsprechenden Wellenlänge neu hinzutreten, während die Intensität der Strahlen grösserer Wellenlängen wächst. Wendet man den bewiesenen Satz auf diesen Fall an, so sieht man, dass die Function I, für eine Wellenlänge, gleich Null ist für alle Temperaturen unterhalb einer gewissen, der Wellenlänge entsprechenden Temperatur und für höhere Temperaturen mit diesen wächst. Hieraus folgt, wenn man nun denselben Satz auf andere Körper anwendet, dass alle Körper, wenn ihre Temperatur allmälig erhöht wird, bei derselben Temperatur Strahlen von derselben Wellenlänge auszusenden beginnen, also bei derselben Temperatur roth zu glühen, bei einer höheren, allen gemeinsamen, Temperatur gelbe Strahlen u. s. w. auszugeben anfangen. Die Intensität der Strahlen von gewisser Wellenlänge, welche verschiedene Körper bei derselben Temperatur ausschicken, kann aber eine sehr verschiedene sein; sie ist proportional mit dem Absorptionsvermögen der Körper für Strahlen der in Rede stehenden Wellenlänge. Bei derselben Temperatur glüht deshalb Metall lebhafter als Glas, und dieses mehr als ein Gas. Ein Körper, der bei den höchsten Temperaturen ganz durchsichtig bliebe, würde niemals glühen. In einen aus Platindraht gebogenen Ring von etwa 5^{mm} Durchmesser brachte ich etwas phosphorsaures Natron und erhitzte dasselbe in der wenig leuchtenden Flamme der Bunsen'schen Gaslampe. Das Salz schmolz, bildete eine flüssige Linse und blieb dabei vollkommen klar; aber es leuchtete auch gar nicht, während der dasselbe berührende Platinring das lebhafteste Licht ausstrahlte.

Draper[1]) hat aus Versuchen den Schluss gezogen, dass alle festen Körper bei derselben Temperatur zu glühen beginnen. Bei seinen Versuchen hat er aber bemerkt, dass gewisse Körper, wie Kalk, Marmor, Flussspath, schon bei einer niedrigeren Temperatur leuchteten, als sie es nach diesem Satze hätten thun sollen; er nennt dieses Leuchten Phosphoresciren und sagt, dass es durch die Farbe sich deutlich von dem Glühen unterscheide. Welchen Namen man aber auch

[1]) Phil. Mag. XXX. p. 345; Berl. Ber. 1847.

diesem Leuchten geben möge, es ist im Widerspruche mit dem Satze §. 3, und ein Körper, der es zeigt, muss daher der Voraussetzung nicht genügen, die bei dem Beweise dieses Satzes gemacht ist, er muss bei gleichbleibender Temperatur nicht unverändert bleiben; das Phosphoresciren ist nicht eine reine Wirkung der Wärme, ist nicht ausschliesslich durch die Temperatur bedingt, sondern wird durch Veränderungen in dem Körper hervorgebracht; haben diese Veränderungen — mögen sie chemische oder von anderer Natur sein — aufgehört, so muss auch die Phosphorescenz verschwunden sein.

§. 16.

Aus dem Satze §. 3 folgt, dass ein Körper, der von Strahlen einer Polarisationsrichtung mehr absorbirt, als von denen einer anderen, in demselben Verhältniss Strahlen von der ersten Polarisationsrichtung mehr aussendet, als von denen der zweiten. Es muss hiernach, wie es bekanntlich geschieht, ein glühender undurchsichtiger Körper, der eine glatte Oberfläche hat, in Richtungen, die schief zu dieser Oberfläche sind, Licht aussenden, das theilweise polarisirt ist, und zwar senkrecht zu der Ebene, die durch den Strahl und die Normale der Oberfläche geht; denn von einfallenden Strahlen, die senkrecht zur Einfallsebene polarisirt sind, reflectirt der Körper weniger, absorbirt also mehr, als von Strahlen, deren Polarisationsebene die Einfallsebene ist. Man kann nach jenem Satze den Polarisationszustand der ausgesendeten Strahlen leicht angeben, wenn man das Gesetz der Reflexion auffallender Strahlen kennt.

Eine zur optischen Axe parallel geschliffene Turmalinplatte absorbirt bei gewöhnlicher Temperatur von Strahlen, die sie senkrecht treffen, mehr, wenn die Polarisationsebene dieser der Axe parallel ist, als wenn die Polarisationsebene senkrecht zur Axe steht. Vorausgesetzt, dass die Turmalinplatte diese Eigenschaft bei der Glühhitze behält, muss sie bei dieser in einer zu ihr senkrechten Richtung Strahlen aussenden, die theilweise polarisirt sind, und zwar in der durch die optische Axe gelegten Ebene, in einer Ebene also, die senkrecht zu derjenigen ist, die die Polarisationsebene des Turmalins ge-

nannt wird. Ich habe diese auffallende, aus der entwickelten Theorie sich ergebende Folgerung durch den Versuch geprüft, und sie hat sich bestätigt. Die benutzten Turmalinplatten ertrugen, in die Flamme der Bunsen'schen Lampe gebracht, lange Zeit eine mässige Glühhitze, ohne eine bleibende Veränderung zu erleiden; nur an den Ecken zeigten sie sich nach dem Erkalten getrübt. Die Eigenschaft, hindurchgehendes Licht zu polarisiren, kam ihnen auch in der Glühhitze zu, wenngleich in erheblich geringerem Grade, als bei niederer Temperatur. Es zeigte sich dieses, indem man durch ein doppeltbrechendes Prisma durch die Turmalinplatte hindurch nach einem Platindrahte sah, der in derselben Flamme glühte. Die beiden Bilder des Platindrahtes hatten eine ungleiche Helligkeit, doch war ihr Unterschied viel geringer, als wenn die Turmalinplatte ausserhalb der Flamme sich befand. Es wurde dem doppeltbrechenden Prisma die Stellung gegeben, bei der der Unterschied der Lichtstärke der beiden Bilder des Platindrahtes ein Maximum war; gesetzt, es wäre das hellere Bild das obere gewesen; es wurden dann, nach Entfernung des Platindrahtes, die beiden Bilder der Turmalinplatte mit einander verglichen. Es war das obere Bild, nicht auffallend, aber unzweifelhaft, dunkler als das untere; die beiden Bilder erschienen gerade, wie zwei gleiche, glühende Körper erschienen wären, von denen der obere eine niedrigere Temperatur als der untere besessen hätte.

§. 17.

Noch eine Folgerung aus dem bewiesenen Satze möge hier zum Schlusse Platz finden. Wenn ein Raum von Körpern gleicher Temperatur umschlossen ist, und durch diese Körper keine Strahlen hindurchdringen können, so ist ein jedes Strahlenbündel im Innern des Raumes seiner Qualität und Intensität nach gerade so beschaffen, als ob es von einem vollkommen schwarzen Körper derselben Temperatur herkäme, ist also unabhängig von der Beschaffenheit und Gestalt der Körper und nur durch die Temperatur bedingt. Die Richtigkeit dieser Behauptung sieht man ein, wenn man erwägt, dass ein Strahlenbündel, welches dieselbe Gestalt und die entgegengesetzte Rich-

tung, als das gewählte hat, bei den unendlich vielen Reflexionen, die es nach einander an den gedachten Körpern erleidet, vollständig absorbirt wird. In dem Innern eines undurchsichtigen, glühenden Hohlkörpers von gewisser Temperatur findet hiernach auch immer dieselbe Helligkeit statt, welches auch im Uebrigen die Beschaffenheit desselben sein möge.

Chemische Analyse durch Spectralbeobachtungen [1]).

Es ist bekannt, dass manche Substanzen die Eigenschaft haben, wenn sie in eine Flamme gebracht werden, in dem Spectrum derselben gewisse helle Linien hervortreten zu lassen. Man kann auf diese Linien eine Methode der qualitativen Analyse gründen, welche das Gebiet der chemischen Reactionen erheblich erweitert und zur Lösung bisher unzugänglicher Probleme führt. Wir beschränken uns hier zunächst nur darauf, diese Methode für die Metalle der Alkalien und alkalischen Erden zu entwickeln und ihren Werth an einer Reihe von Beispielen zu erläutern.

Die erwähnten Linien zeigen sich um so deutlicher, je höher die Temperatur und je geringer die eigene Leuchtkraft der Flamme ist. Die von Einem von uns angegebene Gaslampe [2]) liefert eine Flamme von sehr hoher Temperatur und sehr kleiner Leuchtkraft; dieselbe ist daher vorzugsweise geeignet zu Versuchen über die, jenen Substanzen eigenthümlichen hellen Linien.

Auf Taf. II sind die Spectren dargestellt, welche die genannte Flamme giebt, wenn die so rein wie möglich dargestellten Chlorverbindungen von Kalium, Natrium, Lithium, Strontium, Calcium, Baryum in ihr verflüchtigt werden. Das Sonnenspectrum ist, um die Orientirung zu erleichtern, beigefügt.

---

[1]) Kirchhoff und R. Bunsen, Pogg. Ann. Bd. 110. 1860.

[2]) Bunsen, Pogg. Ann. Bd. 100, S. 85.

Die zu den Versuchen benutzte Kaliumverbindung wurde durch Glühen von chlorsaurem Kali, welches zuvor sechs bis achtmal umkrystallisirt war, dargestellt.

Das Chlornatrium setzten wir aus reinem kohlensauren Natron und Salzsäure zusammen, und reinigten dasselbe gleichfalls durch öfters wiederholtes Umkrystallisiren.

Das Lithionsalz war durch vierzehnmalige Fällung mit kohlensaurem Ammoniak gereinigt.

Zur Darstellung der Calciumverbindung diente ein möglichst reiner, in Salzsäure gelöster Marmor. Aus der Lösung desselben wurde durch fractionirte Fällung mit kohlensaurem Ammoniak kohlensaurer Kalk in zwei Portionen niedergeschlagen, von welchen nur die zuletzt niederfallende in salpetersauren Kalk verwandelt wurde. Das so erhaltene Kalksalz lösten wir zu wiederholten Malen in absolutem Alkohol auf und verwandelten es endlich nach Verflüchtigung des Alkohols und Fällung mit kohlensaurem Ammoniak durch Salzsäure in die Chlorverbindung.

Um das Chlorbaryum rein zu erhalten, extrahirten wir die käufliche Verbindung zu wiederholten Malen durch Zusammenreiben und Kochen mit nicht ganz absolutem Alkohol. Der so extrahirte, von Alkohol befreite, in Wasser gelöste Rückstand ward fractionirt in zwei Portionen gefällt, nur die zweite in Salzsäure gelöst und das erhaltene Chlorbaryum noch weiter durch wiederholtes Umkrystallisiren gereinigt.

Um das Chlorstrontium möglichst rein zu gewinnen, wurde die käufliche Verbindung wiederholt aus Alkohol umkrystallisirt, fractionirt in zwei Portionen mit kohlensaurem Ammoniak gefällt, die zweite Fällung in Salpetersäure gelöst und das salpetersaure Salz durch Zusammenreiben und Auskochen mit Alkohol von den letzten Spuren Kalk befreit. Aus dem so gereinigten Producte wurde endlich durch Fällen mit kohlensaurem Ammoniak und Auflösen des Niederschlags in Salzsäure das Chlorstrontium erhalten. Alle diese Reinigungen geschahen, so weit es ausführbar war, in Platingefässen.

In Fig. I Taf. 3 ist der Apparat abgebildet, dessen wir uns meistens zur Beobachtung der Spectren bedient haben.

A ist ein innen geschwärzter Kasten, dessen Boden die Gestalt eines Trapezes hat und der auf drei Füssen ruht; die beiden schiefen Seitenwände desselben, die einen Winkel von etwa 58° mit einander bilden, tragen die beiden kleinen Fernröhre *B* und *C*. Die Ocularlinsen des ersteren sind entfernt und ersetzt durch eine Platte, in der ein aus zwei Messingschneiden gebildeter Spalt sich befindet, der in den Brennpunkt der Objectivlinse gestellt ist. Vor dem Spalte steht die Lampe *D* so, dass der Saum ihrer Flamme von der Axe des Rohres *B* getroffen wird. Etwas unterhalb der Stelle, wo die Axe den Saum trifft, taucht in denselben das zu einem kleinen Oehr gebogene Ende eines sehr feinen Platindrahtes, der von dem Träger *E* gehalten wird; diesem Oehr ist eine Perle der zu untersuchenden, vorher entwässerten Chlorverbindung angeschmolzen. Zwischen den Objectiven der Fernröhre *B* und *C* steht ein Hohlprisma *F* von 60° brechendem Winkel, das mit Schwefelkohlenstoff angefüllt ist. Das Prisma ruht auf einer Messingplatte, die um eine verticale Axe drehbar ist. Diese Axe trägt an ihrem unteren Ende den Spiegel *G* und darüber den Arm *H*, der als Handhabe dient, um das Prisma und den Spiegel zu drehen. Gegen den Spiegel ist ein kleines Fernrohr gerichtet, welches dem hindurchblickenden Auge das Spiegelbild einer in geringer Entfernung aufgestellten horizontalen Skale zeigt. Durch Drehung des Prismas kann man das ganze Spectrum der Flamme bei dem Verticalfaden des Fernrohrs *C* vorbeiführen und jede Stelle des Spectrums mit diesem Faden zur Deckung bringen. Einer jeden Stelle des Spectrums entspricht eine an der Skale zu machende Ablesung. Ist das Spectrum sehr lichtschwach, so wird der Faden des Fernrohrs *C* beleuchtet mit Hülfe einer Linse, die einen Theil der von einer Lampe ausgehenden Strahlen durch eine kleine Oeffnung wirft, die in der Ocularröhre des Fernrohrs *C* seitlich angebracht ist.

Die Taf. II dargestellten, mit Hülfe der oben erwähnten reinen Chlorverbindungen erzeugten Spectren haben wir mit denjenigen verglichen, welche man erhält, wenn man die Bromide, Iodide, Oxydhydrate, die schwefelsauren und koh-

lensauren Salze der entsprechenden Metalle in folgende Flammen bringt:

in die Flamme des Schwefels,
„ „ „ „ Schwefelkohlenstoffs,
„ „ „ „ wasserhaltigen Alkohols,
„ „ nicht leuchtende Flamme des Leuchtgases,
„ „ Flamme des Kohlenoxydgases,
„ „ „ „ Wasserstoffs und
„ „ Knallgasflamme.

Bei dieser umfassenden und zeitraubenden Untersuchung, deren Einzelnheiten wir übergehen zu dürfen glauben, hat sich herausgestellt, dass die Verschiedenheit der Verbindungen, in denen die Metalle angewandt wurden, die Mannigfaltigkeit der chemischen Processe in den einzelnen Flammen und der ungeheuere Temperaturunterschied dieser letzteren keinen Einfluss auf die Lage der den einzelnen Metallen entsprechenden Spectrallinien ausübt.

Wie bedeutend die erwähnten Temperaturunterschiede sind, ergiebt sich aus der folgenden Betrachtung.

Man gelangt zu einer Schätzung der Temperatur einer Flamme mit Hülfe der Gleichung

$$t = \frac{\Sigma gw}{\Sigma ps},$$

in der t die fragliche Temperatur der Flamme, g das Gewicht eines der mit Sauerstoff verbrennenden Stoffe, w die Verbrennungswärme desselben, p das Gewicht und s die specifische Wärme eines der Verbrennungsproducte bedeutet.

Nimmt man die Verbrennungswärme

des	Schwefels . . .	zu	2240° C.
„	Schwefelkohlenstoffs	„	3400
„	Wasserstoffs . .	„	34462
„	Grubengases . .	„	13063
„	Elayls	„	11640
„	Ditetryls	„	11529
„	Kohlenoxyds . .	„	2403

an und setzt nach Regnault die specifische Wärme bei constantem Druck

befand sich hinter der Glasröhre. Indem der Ruhmkorff'sche Apparat abwechselnd in und ausser Thätigkeit gesetzt wurde, war es leicht, ohne Messung sich mit Schärfe davon zu überzeugen, dass in dem glänzenden Spectrum des Funkens die hellen Linien des Flammenspectrums unverrückt vorhanden waren. Ausser diesen traten in dem Funkenspectrum noch andere helle Linien auf, von denen ein Theil der Anwesenheit von fremden Metallen in den Elektroden, ein anderer dem Stickstoff, der die Röhren erfüllte, nachdem der Sauerstoff einen Theil der Elektroden oxydirt hatte, zugeschrieben werden muss. [1])

Es erscheint hiernach unzweifelhaft, dass die hellen Linien der gezeichneten Spectren als sichere Kennzeichen der Anwesenheit der betreffenden Metalle betrachtet werden dürfen. Sie können als Reactionsmittel dienen, durch welche diese Stoffe schärfer, schneller und in geringeren Mengen sich nachweisen lassen, als durch irgend ein anderes analytisches Hülfsmittel.

Die abgebildeten Spectren beziehen sich auf den Fall, dass der Spalt so weit ist, dass von den dunkeln Linien des Sonnenspectrums nur die deutlichsten wahrnehmbar sind, dass die Vergrösserung des Beobachtungs-Fernrohres eine geringe (etwa viermalige) und die Lichtstärke eine mässige ist. Diese Bedingungen scheinen uns die vortheilhaftesten, wenn es sich darum handelt, eine chemische Analyse durch Spectralbeobachtungen auszuführen. Der Anblick der Spectren kann unter anderen Bedingungen ein wesentlich anderer sein. Wird die Reinheit des Spectrums vermehrt, so zerfallen viele von den als einfach gezeichneten Linien in mehrere, die Natriumlinie

---

[1]) Als wir bei einem Versuche mit Strontiumelektroden ein mit Wasserstoff statt mit Stickstoff gefülltes Röhrchen anwandten, verwandelte sich der Funkenstrom sehr bald in einen Lichtbogen, während die Wände des Röhrchens sich mit einem grauen Beschlage bedeckten. Beim Oeffnen des Röhrchens unter Steinöl zeigte es sich, dass das Wasserstoffgas verschwunden und ein luftleerer Raum entstanden war. Das Gas scheint daher bei den ungeheuren Temperaturen des elektrischen Funkens das Strontiumoxyd, welches nicht völlig von der Oberfläche des Metalls entfernt worden war, reducirt zu haben.

z. B. in zwei; wird die Lichtstärke vermehrt, so zeigen sich in mehreren der gezeichneten Spectren neue Linien, und die Verhältnisse der Helligkeiten der alten werden andere. Im Allgemeinen wächst bei Vermehrung der Lichtstärke die Helligkeit einer dunkleren Linie schneller als die einer helleren, doch so, dass jene nicht diese überholt. Ein deutliches Beispiel hierfür bieten die beiden Lithiumlinien. Nur eine Ausnahme haben wir von dieser Regel beobachtet, und zwar bei der Linie *Ba* η, welche bei geringer Lichtstärke gar nicht wahrnehmbar ist, während *Ba* γ sehr deutlich erscheint, und bei grosser Lichtstärke sehr viel heller als diese ist. Diese Thatsache scheint uns von Wichtigkeit, und wir werden dieselbe einer weiteren Untersuchung unterwerfen.

Es sollen jetzt die Eigenthümlichkeiten der einzelnen Spectren, deren Kenntniss in praktischer Hinsicht von Wichtigkeit ist, näher besprochen, und die Vortheile, welche die auf sie gegründete chemisch-analytische Methode bietet, hervorgehoben werden.

Natrium.

Von allen Spectralreactionen ist die des Natriums am empfindlichsten. Die gelbe Linie *Na* α, die einzige, welche das Natriumspectrum aufzuweisen hat, fällt mit der Fraunhofer'schen Linie *D* zusammen und zeichnet sich durch ihre besonders scharfe Begrenzung und ihre ausserordentliche Helligkeit aus. Ist die Flammentemperatur sehr hoch und die Menge der angewandten Substanz sehr gross, so zeigen sich in den nächsten Umgebungen der Linie Spuren eines continuirlichen Spectrums. Schon an sich sehr schwache, in ihre Nähe fallende Linien anderer Stoffe erscheinen dann noch mehr geschwächt und werden daher nicht selten erst sichtbar, wenn die Natriumreaction zu erlöschen beginnt.

An der Sauerstoff-, Chlor-, Iod- und Brom-Verbindung, an dem schwefelsauren und kohlensauren Salze zeigt sich die Reaction am deutlichsten. Allein selbst bei den kieselsauren, borsauren, phosphorsauren und anderen feuerbeständigen Salzen fehlt sie nicht.

Schon Swan [1]) hat auf die Kleinheit der Kochsalzmengen aufmerksam gemacht, welche die Natriumlinie noch deutlich hervorbringen können.

Folgender Versuch zeigt, dass die Chemie keine einzige Reaction aufzuweisen hat, welche sich auch nur im Entferntesten mit dieser spectralanalytischen Bestimmung des Natriums an Empfindlichkeit vergleichen liesse. Wir verpufften in einer vom Standorte unseres Apparates möglichst entlegenen Ecke des Beobachtungszimmers, welches ungefähr 60 Kubikmeter Luft fasst, 3 Milligramm chlorsaures Natron mit Milchzucker, während die nicht leuchtende Lampe vor dem Spalt beobachtet wurde. Schon nach wenigen Minuten gab die allmälig sich fahlgelblich färbende Flamme eine starke Natriumlinie, welche erst nach 10 Minuten wieder völlig verschwunden war. Aus dem Gewichte des verpufften Natronsalzes und der im Zimmer enthaltenen Luft lässt sich leicht berechnen, dass in einem Gewichtstheile der letzteren nicht einmal $\frac{1}{20000000}$ Gewichtstheil Natronrauch suspendirt sein konnte. Da sich die Reaction in der Zeit einer Secunde mit aller Bequemlichkeit beobachten lässt, in dieser Zeit aber nach dem Zufluss und der Zusammensetzung der Flammengase nur ungefähr 50 ccm oder 0,0647 Gramm Luft, welche weniger als $\frac{1}{2000000}$ des Natronsalzes enthalten, in der Flamme zum Glühen gelangen, so ergiebt sich, dass das Auge noch weniger als $\frac{1}{3000000}$ Milligramm des Natronsalzes mit der grössten Deutlichkeit zu erkennen vermag. Bei einer solchen Empfindlichkeit der Reaction wird es begreiflich, dass nur selten in glühender atmosphärischer Luft eine deutliche Natronreaction fehlt. Die Erde ist auf mehr als zwei Drittel ihrer Oberfläche mit einer Kochsalzlösung bedeckt, welche von den zu Schaumfällen sich überstürzenden Meereswogen unaufhörlich in Wasserstaub verwandelt wird. Die Meerwassertröpfchen, welche auf diese Art in die Atmosphäre gelangen, verdunsten und hinterlassen kochsalzhaltige Sonnenstäubchen, die zwar einen der Grösse nach wechselnden, aber wie es scheint nur selten fehlenden Gemengtheil der Atmosphäre ausmachen, und die vielleicht

[1]) Pogg. Ann. Bd. C, S. 311.

dazu bestimmt sind, den kleinen Organismen die Salze zuzuführen, welche die grösseren Pflanzen und Thiere dem Boden entnehmen. Dieser durch Spectralanalyse leicht erweisliche Kochsalzgehalt der Luft verdient noch in einer anderen Hinsicht Beachtung. Wenn es nämlich, wie man jetzt wohl kaum mehr bezweifeln kann, katalytische Einflüsse sind, welche die miasmatische Verbreitung der Krankheiten vermitteln, so möchte eine antiseptisch wirkende Substanz, wie das Kochsalz, selbst in verschwindend kleiner Menge wohl kaum ohne wesentlichen Einfluss auf solche Vorgänge in der Luft sein können. Aus täglichen, längere Zeit fortgesetzten Spectralbeobachtungen wird sich leicht erkennen lassen, ob die Intensitätsänderungen der durch die atmosphärischen Natriumverbindungen erzeugten Spectrallinie *Na α* mit dem Erscheinen und mit der Verbreitungsrichtung endemischer Krankheiten in irgend einem Zusammenhange steht.

In der unerhörten Empfindlichkeit dieser Natronreaction ist zugleich der Grund zu suchen, dass alle der Luft ausgesetzten Gegenstände nach einiger Zeit bei dem Erhitzen in der Flamme die Natriumlinie zeigen, und dass es nur bei wenigen Verbindungen gelingt, selbst wenn man sie zehn- und mehrmal aus Wasser, das nur mit Platingefässen in Berührung kam, umkrystallisirt, die letzte Spur der Linie *Na α* zu beseitigen. Ein haarförmiger Platindraht, den man durch Ausglühen von jeder Spur Natron befreit hat, zeigt die Reaction auf das Deutlichste wieder, wenn man ihn einige Stunden der Luft ausgesetzt hat. Nicht minder zeigt sie der Staub, welcher sich in Zimmern aus der Luft absetzt, so dass z. B. das Abklopfen eines bestäubten Buches schon genügt, um in einer Entfernung von mehreren Schritten das heftigste Aufblitzen der *Na α*-Linie zu bewirken.

Lithium.

Der glühend leuchtende Dampf der Lithiumverbindungen giebt zwei scharf begrenzte Linien, eine gelbe sehr schwache *Li β* und eine rothe, glänzende Linie *Li α*. An Sicherheit und Empfindlichkeit übertrifft auch diese Reaction alle in

der analytischen Chemie bisher bekannten. Der Natriumreaction steht sie indessen an Empfindlichkeit etwas nach, vielleicht nur weil das Auge für gelbe Strahlen empfindlicher ist als für rothe. Durch Verpuffen von 9 Milligr. kohlensaurem Lithium mit einem grossen Ueberschuss von Milchzucker und chlorsaurem Kali in der ungefähr 60 Cubikmeter fassenden Luft des Zimmers war die Linie schon deutlich sichtbar. Das Auge kann daher auf diese Weise, wie eine, der oben angeführten ähnliche Rechnung zeigt, noch weniger als $\frac{9}{1000000}$ eines Milligramms kohlensaures Lithium mit der grössten Schärfe erkennen. 0,05 Gramm desselben Salzes auf die erwähnte Art verpufft, ertheilte der Luft desselben Zimmers die Fähigkeit, länger als eine Stunde andauernd die *Li α*-Linie hervorzubringen.

Die Sauerstoff-, Chlor-, Jod- und Bromverbindung ist am geeignetsten zur Erkennung des Lithiums. Aber auch das kohlensaure, schwefelsaure und selbst das phosphorsaure Salz eignen sich fast ebenso gut zu diesem Zwecke. Lithionhaltige Fossilien, wie Triphyllin, Triphan, Petalit, Lepidolith, brauchen nur in die Flamme gehalten zu werden, um ohne weiteres die Linie *Li α* im intensivsten Glanze zu geben. Auf diese Weise lässt sich Lithion in manchen Feldspäthen, z. B. in Orthoklas von Baveno, unmittelbar nachweisen. Die Linie zeigt sich dann nur einige Augenblicke lang, gleich nach dem Einbringen der Probe in die Flamme. So zeigten sich als lithionhaltig die Glimmer von Altenberg und Penig, als frei von Lithium dagegen Glimmer von Miask, Aschaffenburg, Modum, Bengalen, Pennsylvanien etc. Wo in natürlich vorkommenden Silicaten nur ein verschwindend kleiner Lithiongehalt auftritt, entzieht sich derselbe der unmittelbaren Beobachtung. Die Prüfung geschieht dann in solchen Fällen am besten auf folgende Weise: man digerirt und verdampft eine kleine Menge der zu prüfenden Substanz mit Flusssäure oder Fluorammonium, dampft etwas Schwefelsäure über dem Rückstande ab und zieht die trockene Masse mit absolutem Alkohol aus. Die zur Trockenheit abgedampfte alkoholische Lösung wird dann noch einmal mit Alkohol extrahirt und die so erhaltene Flüssigkeit auf einer möglichst flachen Glasschale verdunstet. Der Anflug,

welcher dabei zurückbleibt, lässt sich leicht mittels eines Radirmessers zusammenschaben und am Platindrähtchen in die Flamme bringen. $\frac{1}{10}$ Milligr. davon reicht gewöhnlich für den Versuch vollkommen aus. Andere Verbindungen, als kieselsaure, in denen man noch die letzten Spuren Lithion entdecken will, werden nur durch Eindampfen mit Schwefelsäure oder auf irgend einem anderen Wege in schwefelsaure Salze verwandelt und dann ebenso behandelt.

Mit Hülfe dieses Verfahrens lässt sich leicht die unerwartete Thatsache ausser Zweifel setzen, dass das Lithion zu den am allgemeinsten in der Natur verbreiteten Stoffen gehört. Dasselbe liess sich mit der grössten Leichtigkeit schon in 40 Cubikcentimeter Meerwasser nachweisen, welches unter 39° 14′ westl. Länge und 41° 41′ nördl. Breite im Atlantischen Ocean geschöpft war. Asche von Fucoideen (Kelp), welche vom Golfstrom an die Schottischen Küsten getrieben werden, enthielt erhebliche Spuren davon. Sämmtliche Orthoklase und Quarze aus dem Granit des Odenwaldes, die wir geprüft haben, zeigten sich lithionhaltig. Ein sehr reines Trinkwasser aus einer Quelle am granitischen westlichen Abhange des Neckarthales in Schlierbach bei Heidelberg enthielt Lithion, während die im bunten Sandstein entspringende Quelle, welche die Wasserleitung des hiesigen chemischen Laboratoriums speist, frei davon war. Mineralwasser, bei welchen Lithium kaum noch in 1 Liter nach dem gewöhnlichen analytischen Verfahren nachgewiesen werden kann, zeigt die *Li* α-Linie oft schon, wenn man nur einen Tropfen davon an einem Platindraht in die Flamme bringt [1]). Alle von uns untersuchten Odenwälder Aschen aus Hölzern, welche auf Granitboden wachsen, sowie Russische und andere käufliche Pottaschen enthalten Lithion. Selbst in den Aschen des Tabaks, der Wein-

---

[1]) Wenn es sich darum handelt, eine Flüssigkeit in die Flamme zu bringen, so biegt man aus dem einen Ende eines pferdehaardicken Platindrahtes einen kleinen mit einem Durchmesser versehenen Ring und schlägt denselben platt. Lässt man in das so gebildete Oehr einen Flüssigkeitstropfen fallen, so bleibt eine für den Versuch hinreichende Menge darin hängen.

blätter, des Rebholzes und der Weinbeeren[1]), sowie in der Asche der Feldfrüchte, welche in der Rheinebene bei Waghäusel, Deidesheim und Heidelberg auf nicht granitischem Boden gezogen werden, fehlt das Lithion eben so wenig, als in der Milch der Thiere, welche mit jenen Feldfrüchten genährt werden.[2])

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass ein Gemenge von flüchtigen Natron- und Lithionsalzen neben der Reaction des Natriums die des Lithiums mit einer kaum merklich verminderten Schärfe und Deutlichkeit zeigt. Die rothe Linie des letzteren erscheint durch eine kleine in die Flamme gebrachte Perle noch deutlich sichtbar, wenn diese Perle nur $\frac{1}{1000}$ Lithiumsalz enthält, wobei das Auge für sich an der Flamme selbst nichts als das gelbe Licht des Natriums ohne jede Andeutung einer röthlichen Färbung wahrnimmt. In Folge der grösseren Flüchtigkeit der Lithionsalze hält die Natronreaction gewöhnlich etwas länger an. Wo es sich daher um die Erkennung sehr kleiner Spuren von Lithion neben Natron handelt, muss die Probeperle in die Flamme geschoben werden, während man schon durch das Fernrohr blickt. Man gewahrt dann die Lithiumlinie oft nur auf wenige Augenblicke unter den ersten Verflüchtigungsproducten.

Wo es sich bei der technischen Gewinnung der Lithiumverbindungen um die Auswahl des zu benutzenden Rohmaterials und die Auffindung einer zweckmässigen Darstellungsmethode handelt, gewährt die Spectralanalyse ein Hülfsmittel von unschätzbarem Werthe. So genügt es z. B. schon, von verschiedenen Soolmutterlaugen nur einen Tropfen in der Flamme zu verdampfen und durch das Fernrohr zu beobachten, um sich sogleich zu überzeugen, dass in vielen dieser Salinenrückstände ein reiches, bisher übersehenes Lithionmaterial gegeben ist. Dabei kann man im Verlaufe der Darstellung jeden Ver-

[1]) In den bei der fabrikmässigen Weinsäurengewinnung fallenden Mutterlaugen concentrirt sich das Lithion so sehr, dass man aus denselben erhebliche Mengen davon darstellen kann.

[2]) Herr Dr. Folwarczny hat sogar in der Asche des menschlichen Blutes und Muskelfleisches durch die Linie $Li\,\alpha$ leicht Lithiumverbindungen nachweisen können.

lust an Lithion in den Nebenproducten und Abfällen durch die Spectralreaction unmittelbar verfolgen und so leicht zweckmässigere Darstellungsmethoden als die bisher gebräuchlichen sich aufsuchen.[1])

Kalium.

Die flüchtigen Kaliumverbindungen geben in der Flamme ein sehr ausgedehntes continuirliches Spectrum, welches nur zwei charakteristische Linien zeigt; die eine *Kaα* in dem äussersten an die ultrarothen Strahlen grenzenden Roth, genau auf die dunkle Linie *A* des Sonnenspectrums fallend, die andere *Kaβ* weit in Violet nach dem anderen Ende des Spectrums hin ebenfalls einer Fraunhofer'schen Linie entsprechend. Eine sehr schwache, mit der Fraunhofer'schen Linie *B* zusammenfallende Linie, die ausserdem noch, aber nur bei der intensivsten Flamme, sichtbar wird, ist wenig charakteristisch. Die blaue Linie ist ziemlich schwach, eignet sich aber fast eben so gut wie die rothe Linie zur Erkennung des Kaliums. Die Lage beider Linien in der Nähe der beiden Grenzen der für das Auge wahrnehmbaren Strahlen macht die Reaction zu einer weniger empfindlichen. In der Luft unseres Zimmers wurde sie erst sichtbar, als wir gegen 1 Gramm mit Milchzucker gemengtes chlorsaures Kali abbrannten. Man kann daher dem Auge auf diese Weise nur ungefähr $\frac{1}{1000}$ Milligr. chlorsaures Kali noch sichtbar machen.

Kalihydrat und sämmtliche Verbindungen des Kalis mit flüchtigen Säuren zeigen die Reaction ohne Ausnahme. Kalisilicate und ähnliche feuerbeständige Salze dagegen bringen sie für sich allein nur bei sehr vorwiegendem Kaligehalt hervor. Bei geringerem Kaligehalt darf man die Probeperle nur mit etwas kohlensaurem Natron zusammenschmelzen, um die charak-

[1]) Wir erhielten nach einer solchen verbesserten Methode aus zwei Mineralwasserkrügen (gegen vier Liter) einer Soolmutterlauge, welche durch Eindampfen mit Schwefelsäure $1^{K},2$ Rückstand gaben, eine halbe Unze kohlensaures Lithion von der Reinheit des käuflichen, dessen Handelswerth ungefähr 140 fl. per Pfund beträgt. Eine grosse Zahl anderer Soolmutterlaugen, die wir untersuchten, zeigten einen ähnlichen Reichthum an Lithiumverbindungen.

teristischen Linien zum Vorschein zu bringen. Die Gegenwart von Natronsalzen verhindert mithin die Reaction nicht und beeinträchtigt die Empfindlichkeit derselben nur wenig. Orthoklas, Sanidin und Adular lassen sich dadurch leicht von Albit, Oligoklas, Labrador und Anorthit unterscheiden. Um verschwindend kleine Kalispuren noch nachzuweisen, braucht man die Silicate nur mit einem grossen Ueberschuss von Fluorammonium auf einem Platindeckel schwach zu glühen und den Rückstand am Platindraht in die Flamme zu bringen. Auf diese Weise findet man, dass fast alle Silicate kalihaltig sind. Lithionsalze stören die Reaction eben so wenig. So genügt es z. B. schon, den Aschenstumpf einer Cigarre in die Flamme vor dem Spalt zu halten, um sogleich die gelbe Linie des Natriums und die beiden rothen des Kaliums und Lithiums, welches letztere Metall in den Tabaksaschen fast niemals fehlt, auf das Deutlichste hervorzubringen.

Strontium.

Die Spectren der alkalischen Erden stehen denen der Alkalien an Einfachheit bedeutend nach. Das des Strontiums ist besonders durch die Abwesenheit grüner Streifen charakterisirt. Acht Linien darin sind sehr ausgezeichnet, sechs rothe nämlich, eine orange und eine blaue. Die Orangelinie $Sr\,\alpha$, welche dicht neben der Natriumlinie nach Roth hin auftritt, die beiden rothen Linien $Sr\,\beta$, $Sr\,\gamma$ und endlich die blaue Linie $Sr\,\delta$ sind ihrer Lage und Intensität nach die wichtigsten. Um die Empfindlichkeit der Reaction zu prüfen, erhitzten wir eine wässerige Chlorstrontiumlösung von bekanntem Salzgehalt in einem Platinschälchen rasch über einer grossen Flamme, bis das Wasser verdunstet war und die Schale zu glühen anfing. Hierbei decrepitirte das Salz zu mikroskopischen Partikelchen, die sich in Gestalt eines weissen Rauches in die Atmosphäre erhoben. Eine Wägung des Salzrückstandes in der Schale ergab, dass auf diese Weise 0,077 Grm. Chlorstrontium in Gestalt eines feinen Staubes in die 77000 Grm. wiegende Luft des Zimmers übergegangen war. Nachdem die Luft des Zimmers mittelst eines aufgespannten, rasch in Bewegung gesetzten Regenschirmes gleichmässig durcheinander gemengt war, zeigten

sich die charakteristischen Linien des Strontiumspectrums sehr schön ausgebildet. Man kann nach diesem Versuche die noch nachweisbare Chlorstrontiummenge zu $\frac{6}{100000}$ eines Milligramms anschlagen.

Die Chlorverbindung und die übrigen Halogenverbindungen des Strontiums geben die Reaction am deutlichsten. Strontianerdehydrat und kohlensaure Strontianerde zeigen sie viel schwächer; schwefelsaure noch schwächer; die Verbindungen mit feuerbeständigen Säuren am schwächsten, oder gar nicht. Man bringt daher die Probeperle zunächst für sich und dann nach vorgängiger Befeuchtung mit Salzsäure in die Flamme. Hat man Schwefelsäure in der Perle vorauszusetzen, so hält man sie vor dem Befeuchten mit Salzsäure einige Augenblicke in den reducirenden Theil der Flamme, um das schwefelsaure Salz in die durch Chlorwasserstoffsäure zersetzbare Schwefelverbindung umzuändern. Zur Erkennung des Strontiums in Verbindungen mit Kieselsäure, Phosphorsäure, Borsäure oder anderen feuerbeständigen Säuren verfährt man am besten auf folgende Weise: Zum Aufschliessen der Probe mit kohlensaurem Natron dient, statt eines Platintiegels, eine conische Spirale von Platindraht. Dieselbe wird in der Flamme weissglühend gemacht und in entwässertes, fein pulverisirtes, lockeres kohlensaures Natron getaucht, welches wo möglich noch so viel Wasser enthält, dass die nöthige Menge des Salzes schon bei dem ersten Eintauchen daran hängen bleibt. In dieser Spirale lässt sich die Schmelzung viel schneller als in einem Platintiegel bewerkstelligen, da die zu erhitzende Masse des Platins nur gering ist und das zu schmelzende Salz mit der Flamme in unmittelbare Berührung kommt. Hat man die aufzuschliessende, fein pulverisirte Substanz mittelst einer kleinen Platinschaufel in die glühend flüssige Soda eingetragen und einige Minuten im Glühen erhalten, so braucht man die mit ihrer Spitze nach oben gekehrte Spirale nur auf den Rand des Lampentellers aufzuklopfen, um den Inhalt derselben in Gestalt einer grossen erkaltenden Kugel auf dem Teller zu erhalten. Man bedeckt die Kugel mit einem Blättchen Schreibpapier und zerdrückt dieselbe mittelst einer elastischen Messerklinge, die man auch nach Entfernung des Papiers benutzt, um

die Masse weiter noch zum feinsten Pulver zu zerdrücken. Dieses wird an den Rand des etwas abwärts geneigten Tellers zusammengehäuft, vorsichtig mit heissem Wasser übergossen, das man durch sanftes Hin- und Herneigen des Tellers über der aufgehäuften Substanz hin und her fliessen lässt, und endlich die über dem Bodensatz stehende Flüssigkeit abdekantirt. Es gelingt leicht, unter abwechselndem Erwärmen des Tellers durch mehrmalige Wiederholung dieser Operation die löslichen Salze auszuziehen, ohne den Bodensatz aufzurühren und erhebliche Mengen davon zu verlieren. Wendet man statt des Wassers eine Kochsalzlösung an, so gelingt die Operation noch leichter und sicherer. Der Rückstand enthält das Strontium als kohlensaures Salz, von dem schon einige Zehntel Milligramm am Platindraht mit etwas Salzsäure befeuchtet die intensivste Reaction geben. Es wird auf diese Art möglich, ohne Platintiegel, ohne Reibschale, ohne Digerirschale und ohne Trichter und Filter alle erforderlichen Operationen des Aufschliessens, Zerkleinerns, Digerirens und Auswaschens in wenigen Minuten auszuführen.

Die Reaction des Kaliums und Natriums wird durch die Gegenwart des Strontiums nicht gestört. Auch die Lithiumreaction tritt neben den drei erwähnten in voller Deutlichkeit auf, wenn die Lithiummenge gegen die des Strontiums nicht zu gering ist. Die Lithiumlinie $Li\,\alpha$ erscheint dann als ein schmaler, intensiv rother, scharf begrenzter Streifen auf dem schwächer rothen Grunde des breiten Strontiumstreifens $Sr\,\beta$.

Calcium.

Das Calciumspectrum lässt sich schon auf den ersten Blick von den vier bisher betrachteten Spectren daran unterscheiden, dass es in Grün eine höchst charakteristische und intensive Linie, $Ca\,\beta$, enthält. Als zweites nicht minder charakteristisches Kennzeichen kann die ebenfalls sehr intensive Orangelinie $Ca\,\alpha$ dienen, welche erheblich weiter nach dem rothen Ende des Spectrums hin liegt als die Natronlinie $Na\,\alpha$ und die Orangelinie des Strontiums $Sr\,\alpha$. Durch Abbrennen eines Gemenges von Chlorcalcium, chlorsaurem Kali und Milchzucker erhält man einen Rauch, dessen Reaction ungefähr von gleicher Empfind-

lichkeit ist mit dem unter denselben Verhältnissen hervorgebrachten Chlorstrontiumrauch. Aus einem auf diese Weise angestellten Versuche ergab sich, dass $\frac{6}{100000}$ Milligramm Chlorcalcium noch leicht und mit völliger Sicherheit erkannt werden können. Nur die in der Flamme flüchtigen Calciumverbindungen zeigen die Reaction, und zwar mit um so grösserer Deutlichkeit, je flüchtiger sie sind. Chlorcalcium, Jodcalcium, Bromcalcium stehen in dieser Beziehung oben an. Schwefelsaurer Kalk giebt das Spectrum erst, nachdem er angefangen hat basisch zu werden, dann aber sehr glänzend und lange andauernd. Ebenso entwickelt sich die Reaction des kohlensauren Kalks am deutlichsten, nachdem die Kohlensäure entwichen ist.

Verbindungen des Calciums mit feuerbeständigen Säuren verhalten sich in der Flamme indifferent; werden sie durch Chlorwasserstoffsäure angegriffen, so lässt sich die Reaction einfach auf folgende Weise erhalten: Man bringt einige Milligramme oder selbst nur einige Zehntel Milligramme der fein pulverisirten Substanz an das etwas befeuchtete plattgeschlagene Platinöhr in den wenig heissen Theil der Flamme, bis das Pulver ohne zu schmelzen angefrittet ist. Lässt man einen Tropfen Salzsäure in das Oehr fallen, so bleibt derselbe zum grössten Theil darin hängen. Schiebt man diesen Tropfen vor dem Spalt des Spectralapparates in den heissesten Theil der Flamme, so verdampft er, und zwar in Folge des Leidenfrostschen Phänomens, ohne ins Kochen zu gerathen. Blickt man, während der Tropfen verdampft, durch das Fernrohr, so erscheint in dem Augenblick, wo die letzten Antheile der Flüssigkeit in Dampf verwandelt werden, ein glänzendes Calciumspectrum, welches bei geringem Kalkgehalt nur einen Moment aufblitzt, bei erheblicheren Kalkmengen aber mehr oder weniger lange anhält.

Nur in Silicaten, welche von Salzsäure angegriffen werden, lässt sich der Kalk auf diese Weise finden; in nicht durch Salzsäure angreifbaren Silicaten gelingt die Nachweisung am besten folgendermassen: Einige Milligramm der zu prüfenden, auf das Feinste pulverisirten Substanz werden auf einem flachen Tiegeldeckel von Platin mit ungefähr einem Gramm halb zer-

flossenem Fluorammonium versetzt und der Deckel in die Flamme gehalten, bis er nach Verflüchtigung des Fluorammoniums glüht. Man befeuchtet den auf dem Deckel befindlichen Salzanflug mit 1 bis 2 Tropfen Schwefelsäure, und entfernt den Ueberschuss derselben durch abermaliges Erhitzen über der Flamme. Wird der jetzt aus schwefelsauren Salzen bestehende Anflug auf dem Deckel mit dem Fingernagel oder einem Spatelchen zusammengeschabt und ungefähr ein Milligramm davon mittelst des Drahtes in die Flamme gebracht, so erhält man, wenn *Ka*, *Na* und *Li* vorhanden sind, zunächst die charakteristischen Reactionen dieser drei Körper neben oder nach einander. Ist noch Kalk und Strontian vorhanden, so erscheinen deren Spectren gewöhnlich erst etwas später, nachdem das *Ka*, *Na* und *Li* verflüchtigt ist. Bei sehr geringem Calcium- oder Strontiumgehalt bleibt die Reaction dieser Metalle aus; man erhält sie dann aber sogleich, wenn man den im Reductionsraum der Flamme einige Augenblicke behandelten Draht mit Salzsäure betropft und wieder in die Flamme bringt.

Alle diese Proben, die Erhitzung für sich oder mit Salzsäure, die Behandlung mit Fluorammonium für sich oder mit Schwefelsäure und Salzsäure geben dem Mineralogen und mehr noch dem Geognosten eine Reihe höchst einfacher Kennzeichen an die Hand, um viele in der Natur auftretende Substanzen, und namentlich die einander so ähnlichen aus kalkhaltigen Doppelsilicaten bestehenden Mineralien noch in den kleinsten Splitterchen mit einer Sicherheit zu bestimmen, wie sie sonst kaum bei einem reichlich zu Gebote stehenden Material durch weitläuftige und zeitraubende Analysen erreichbar ist. Einige Beispiele werden dies am besten zeigen.

1. Ein Tropfen Meerwasser am Platindraht verflüchtigt zeigt eine starke Natriumreaction, und nach Verflüchtigung des Kochsalzes eine schwache Calciumreaction, die durch Befeuchten des Drahtes mit Salzsäure auf Augenblicke höchst intensiv wird. Behandelt man einige Decigramme Meerwasserrückstand auf die beim Lithium angegebene Weise mit Schwefelsäure und Alkohol, so erhält man leicht die Reaction des Kaliums und Lithiums. Die Gegenwart des Strontiums im Meerwasser kann am besten in den Kesselsteinen der See-

dampfschiffe nachgewiesen werden. Die filtrirte salzsaure Lösung desselben hinterlässt nach dem Abdampfen und Auflösen in möglichst wenig Alkohol eine von basischem Eisenchlorid gelblich gefärbte Trübung, die sich nach einigen Tagen absetzt und auf einem Filterchen gesammelt und mit Alkohol ausgewaschen werden kann. Das in einem feinen Platindraht verbrannte Filter giebt neben den Calciumlinien ein vollständiges und intensives Strontiumspectrum.

2. Soolwasser zeigen oft schon unmittelbar die Kalium-, Natrium-, Lithium-, Calcium- und Strontiumreaction. Bringt man z. B. einen Tropfen des Dürkheimer oder Kreuznacher Mineralwassers in die Flamme, so erhält man die Linien *Na α*, *Li α*, *Ca α* und *Ca β*. Wendet man statt des Soolwassers einen Tropfen seiner Mutterlauge an, so entstehen dieselben Linien mit dem intensivsten Glanze. In dem Maasse als das Chlornatrium und Chlorlithium verdampft und das Chlorcalcium basischer wird, entwickeln sich allmählich die charakteristischen Linien des Strontiumspectrums, welches sich nach und nach immer glänzender in seiner ganzen Vollständigkeit zeigt. Man erhält hier also durch den blossen Anblick eines einzigen in der Flamme verflüchtigten Tropfens in wenigen Augenblicken die vollständige Analyse eines Gemenges von fünf Stoffen.

3. Der Aschenstumpf einer Cigarre mit etwas *HCl* befeuchtet und in die Flamme gehalten, giebt die Linien *Na α*, *Ka α*, *Li α*, *Ca α*, *Ca β*.

4. Kaliglas von einer Verbrennungsröhre gab sowohl mit als ohne Salzsäure *Na α* und *Ka α*, mit Fluorammonium und Schwefelsäure behandelt noch *Ca α*, *Ca β* und Spuren von *Li α*.

5. Orthoklas von Baveno giebt für sich oder mit Salzsäure nur *Na α* nebst Spuren von *Ka α* und *Li α*; mit Fluorammonium und Schwefelsäure die intensiven Linien *Na α*, *Ka α* und etwas schwächer *Li α*. Nach Verflüchtigung der so nachgewiesenen Bestandtheile, mit *HCl* in die Flamme gebracht, giebt die Probe nur ein kaum unterscheidbares Aufblitzen der Linien *Ca α* und *Ca β*. Der nach diesen Prüfungen dem Platindrahte angefrittete Rückstand zeigt, mit salpetersaurem Kobaltoxydul befeuchtet und geglüht, die für Thonerde charakteristische Färbung. Nimmt man noch die bekannte Reaction auf Kiesel-

erde hinzu, so ergiebt sich aus diesen in wenigen Minuten ausführbaren Prüfungen, dass der Orthoklas von Baveno Kieselerde, Thonerde, Kali mit Spuren von Natron, Kalkerde und Lithion enthält, so wie dass jede Spur von Baryterde und Strontianerde darin fehlt.

6. Adular vom Gotthard verhielt sich ganz ähnlich wie der Orthoklas von Baveno, nur dass die Lithiumreaction völlig, die Calciumreaction fast völlig fehlte.

7. Labradorit von St. Paul giebt für sich nur die Natriumlinie *Na α*, nicht aber das Calciumspectrum. Die mit Chlorwasserstoffsäure befeuchtete Probe aber bringt die Calciumlinien *Ca α* und *Ca β* sehr glänzend hervor. Bei der Probe mit Fluorammonium erhält man noch eine schwache Kaliumreaction und kaum bemerkbare Spuren von Lithium.

8. Labradorit aus dem Kugeldiorit von Corsika verhielt sich ebenso, nur dass die Spuren der Lithiumreaction fehlten.

9. Mosandrit aus Brevig und Tscheffkinit aus dem Ilmengebirge gaben für sich nur die Natriumreaction, bei der Behandlung mit Salzsäure aber die Calciumlinien *Ca α* und *Ca β*.

10. Melinophan von Lamoe gab für sich nur *Na α*, mit Salzsäure aber noch *Ca α*, *Ca β* und *Li α*.

11. Scheelit und Sphen geben schon bei Behandlung mit Salzsäure die Calciumreaction sehr intensiv.

12. Finden sich geringe Mengen Strontium neben dem Calcium, so wählt man am zweckmässigsten die Linie *Sr δ* zur Erkennung der ersteren. Mit Hülfe derselben gelingt es leicht, in sehr vielen neptunischen Kalksteinen einen geringen Strontiumgehalt nachzuweisen. *Na α*, *Li α*, *Ka α*, besonders *Li α*, zeigen sich schon unmittelbar bei dem Glühen des Kalksteins in der Flamme. Durch Salzsäure in Chlorcalcium verwandelt und in dieser Form in die Flamme gebracht, geben diese Gesteine dieselben Linien und ausserdem häufig noch deutlich genug die Linie *Sr δ*. Dieselbe erscheint aber nur auf kürzere Zeit, indem sie sich in Folge der Verdampfungsprocesse in der Flamme allmählich entwickelt und kurz vor dem Erblassen des Kalkspectrums am deutlichsten hervorzutreten pflegt.

Auf diesem Wege wurden die Linien *Na α*, *Li α*, *Ka α*, *Ca α*, *Ca β*, *Sr δ* bei folgenden Kalksteinen gefunden:

Silurkalk[1]) von Kugelbad bei Prag,
Wellenkalk (Muschelkalk) von Rohrbach bei Heidelberg,
Liaskalk von Malsch in Baden,
Kreide aus England.

Folgende Kalksteine zeigten nur die Linien *Na α*, *Li α*, *Ka α*, *Ca α*, *Ca β*, ohne die blaue Strontiumlinie:

Marmor von Auerbach aus dem Granit[2]),
Devonkalk von Gerolstein in der Eifel,
Kohlenkalk von Planitz in Sachsen,
Zechstein von Nordhausen am Harz,
Jurakalk vom Streitberg in Franken.

Man sieht schon aus diesen wenigen Versuchen, dass umfassendere und sorgfältige spectralanalytische Untersuchungen über den Lithium-, Kalium-, Natrium- und Strontiumgehalt verschiedener Kalkbildungen mit Beziehung auf die Altersfolge und locale Verbreitung derselben von grossem geologischen Interesse sind, und vielleicht zu unerwarteten Aufschlüssen über die Natur der früheren Oceane und Meeresbecken, in welchen die Bildung jener Kalkgebirge erfolgte, führen können.

Baryum.

Das Baryumspectrum ist das verwickeltste unter den Spectren der Metalle der Alkalien und alkalischen Erden. Von den bisher betrachteten unterscheidet es sich schon auf den ersten Blick durch die grünen Linien *Ba α* und *Ba β*, welche alle übrigen an Intensität übertreffen und bei schwacher Reaction zuerst erscheinen und zuletzt wieder verschwinden. *Ba γ* ist weniger empfindlich, aber immer noch als charakteristische Linie zu betrachten. Die verhältnissmässig ziemlich grosse

---

[1]) Die Lithiumlinie war bei dieser Gebirgsart nicht mit Sicherheit zu erkennen, die Linie *Sr δ* dagegen sehr stark.

[2]) Mittelst des oben beschriebenen Verfahrens mit Alkohol wurde aus 20 Grm. dieses Marmors so viel salpetersaurer Strontian erhalten, dass sich damit ein vollständiges intensives Strontiumspectrum hervorbringen liess. Ob sich auch die übrigen aufgeführten Kalksteine, auf diese Art behandelt, als strontiumhaltig erweisen, haben wir nicht untersucht.

Ausdehnung des Spectrums ist Ursache, dass überhaupt die Spectralreaction der Baryumverbindungen etwas weniger empfindlich ist als die der bisher betrachteten Körper. 0,3 Grm. chlorsaurer Baryt mit Milchzucker gaben in unserem Zimmer verbrannt, nachdem die Luft vermittelst eines aufgespannten Regenschirmes gehörig durchgemengt war, längere Zeit auf das deutlichste die Linie *Ba α*. Man kann daher aus einer der beim Natrium ausgeführten ähnlichen Rechnung schliessen, dass durch die Reaction noch weniger als ungefähr $\frac{1}{1000}$ Milligramm mit völliger Deutlichkeit angezeigt wird.

Chlorbaryum, Brombaryum, Jodbaryum, Fluorbaryum, Baryterdehydrat, kohlensaurer und schwefelsaurer Baryt zeigen die Reaction am ausgezeichnetsten, und können daher durch unmittelbares Erhitzen in der Flamme erkannt werden.

Durch Salzsäure angreifbare, Baryterde enthaltende Silicate geben die Reaction, wenn sie, wie beim Kalk angegeben, mit einem Tropfen Salzsäure in die Flamme gebracht werden, ebenfalls. So erzeugt z. B. Barytharmotom, auf diese Weise behandelt, die Linie *Ca α* und *Ca β* neben den Linien *Ba α* und *Ba β*.

Verbindungen der Baryterde mit feuerbeständigen Säuren, die sich mit und ohne Salzsäure in der Flamme indifferent verhalten, schliesst man am besten auf die beim Strontium angegebene Weise mit kohlensaurem Natron auf und prüft den dadurch erhaltenen kohlensauren Baryt. Kommen in solchen Verbindungen *Ca*, *Ba* und *Sr* in sehr ungleichen Mengen gemeinschaftlich vor, so löst man die durch Aufschliessen erhaltenen kohlensauren Salze in einem Tropfen Salpetersäure und zieht aus dem abgedampften Rückstand den Kalk durch Alkohol aus. Der Rückstand enthält dann noch Baryt und Strontium, die sich, wenn sie nicht in allzu ungleicher Menge vorkommen, leicht neben einander erkennen lassen. Handelt es sich darum, die letzten noch wahrnehmbaren Spuren von *Sr* oder *Ba* nachzuweisen, so verwandelt man den Rückstand durch Glühen mit Salmiak in Chlorverbindungen, aus denen sich das Chlorstrontium durch Alkohol in der zur Erkennung hinlänglich concentrirten Form leicht ausziehen lässt. Sind unter den nachzuweisenden Stoffen nicht einzelne in verschwindend kleinen Mengen vorhanden, so werden alle solche

vorgängige Scheidungen ganz unnöthig, wie folgender Versuch zeigt: Ein Gemenge von Chlornatrium, Chlorkalium, Chlorlithium, Chlorcalcium, Chlorstrontium und Chlorbaryum, welches von jedem dieser sechs Stoffe höchstens $\frac{1}{10}$ Milligramm enthielt, wurde in die Flamme gebracht und beobachtet. Zuerst erschien die intensiv gelbe Natronlinie *Na α* auf dem Untergrunde eines schwachen continuirlichen Spectrums. In dem Maasse, als dieses zu erblassen begann, entwickelte sich die scharf begrenzte intensiv rothe Linie des Lithiums *Li α* und jenseits derselben, noch weiter von der Natriumlinie entfernt die mattere Kaliumlinie *Ka α*, indess die Baryumlinien *Ba α* und *Ba β* in ihrer charakteristischen Lage und eigenthümlichen Schattirung auf das Deutlichste hervortraten. Indem sich darauf die Verbindungen des Kaliums, Lithiums und Baryums nach und nach verflüchtigten, erblassten oder verschwanden ihre Linien wieder allmählich der Reihe nach, bis sich nach einigen Minuten aus den immer weniger überlagerten Linien des Calciums und Strontiums, wie aus einem Nebelbilde, die Linien *Ca α*, *Ca β* und *Sr α*, *Sr β*, *Sr γ* und *Sr δ* mit aller Schärfe in ihrer charakteristischen Form, Schattirung und Lage hervorhoben, um dann erst nach sehr langer Zeit wieder zu erblassen und gänzlich zu verschwinden.

Die Abwesenheit irgend eines oder mehrerer dieser Gemengtheile giebt sich bei diesen Beobachtungen augenblicklich durch die Abwesenheit der ihnen zugehörigen Linien zu erkennen.

Für Denjenigen, welcher die einzelnen Spectren aus wiederholter Anschauung kennt, bedarf es einer genauen Messung der einzelnen Linien nicht; ihre Farbe, ihre gegenseitige Lage, ihre eigenthümliche Gestalt und Abschattirung, die Abstufungen ihres Glanzes sind Kennzeichen, welche selbst für den Ungeübten zur sicheren Orientirung vollkommen hinreichen. Diese Kennzeichen sind den Unterscheidungsmerkmalen zu vergleichen, welche wir bei den als Reactionsmittel benutzten, ihrem äusseren Ansehen nach höchst verschiedenartigen Niederschlägen antreffen. Wie es als Charakter einer Fällung gilt, dass sie gelatinös, pulverförmig, käsig, körnig oder krystallinisch ist, so

zeigen auch die Spectrallinien ihr eigenthümliches Verhalten, indem die einen an ihren Rändern scharf begrenzt, die anderen entweder nur nach einer oder nach beiden Seiten entweder gleichartig oder ungleichartig verwaschen, oder indem die einen breiter, die anderen schmäler erscheinen. Und wie wir nur diejenigen Niederschläge, welche bei möglichst grosser Verdünnung der zu fällenden Substanz noch zum Vorschein kommen, als Erkennungsmittel verwenden, so benutzt man auch in der Spectralanalyse zu diesem Zwecke nur diejenigen Linien, welche zu ihrer Erzeugung die geringste Menge Substanz und eine nicht allzu hohe Temperatur erfordern. In Beziehung auf solche Kennzeichen stehen sich daher beide Methoden ziemlich gleich. Dagegen gewährt die Spectralanalyse rücksichtlich der als Reactionsmittel benutzten Farbenerscheinungen eine Eigenthümlichkeit, die ihr unbedingt einen Vorzug vor jeder anderen analytischen Methode sichern muss. Unter den Niederschlägen, die zur Erkennung von Stoffen bestimmt sind, erscheinen die meisten weiss und nur einige gefärbt. Dabei ist die Färbung der letzteren nur wenig constant und variirt in den verschiedensten Abstufungen, je nach der dichteren oder mehr zertheilten Form der Fällung. Oft reicht schon die kleinste Beimengung eines fremden Stoffes hin, eine charakteristische Färbung bis zur Unkenntlichkeit zu verwischen. Feinere Farbenunterschiede der Niederschläge kommen daher als chemische Kennzeichen gar nicht mehr in Frage. Bei der Spectralanalyse dagegen erscheinen die farbigen Streifen unberührt von solchen fremden Einflüssen und unverändert durch die Dazwischenkunft anderer Stoffe. Die Stellen, welche sie im Spectrum einnehmen, bedingen eine chemische Eigenschaft, die so unwandelbarer und fundamentaler Natur ist, wie das Atomgewicht der Stoffe, und lassen sich daher mit einer fast astronomischen Genauigkeit bestimmen. Was aber der spectralanalytischen Methode eine ganz besondere Bedeutung verleiht, ist der Umstand, dass sie die Schranken, bis zu welchen bisher die chemischen Kennzeichen der Materie reichten, fast ins Unbegrenzte hinausrückt. Sie verspricht uns über die Verbreitung und Anordnung der Stoffe in den geologischen Formationen die werthvollsten Aufschlüsse. Schon die wenigen Versuche,

welche diese Abhandlung enthält, führen zu dem unerwarteten Aufschlusse, dass nicht nur Kalium und Natrium, sondern auch Lithium und Strontium zu den zwar nur in geringer Menge. aber allgemein verbreiteten Stoffen unseres Erdkörpers gezählt werden müssen.

Für die Entdeckung bisher noch nicht aufgefundener Elemente dürfte die Spectralanalyse eine nicht minder wichtige Bedeutung gewinnen. Denn wenn es Stoffe giebt, die so sparsam in der Natur verbreitet sind, dass uns die bisherigen Mittel der Analyse bei ihrer Erkennung und Abscheidung im Stiche lassen, so wird man hoffen dürfen, viele solcher Stoffe durch die einfache Betrachtung ihrer Flammenspectren noch in Mengen zu erkennen und zu bestimmen, die sich auf gewöhnlichem Wege jeder chemischen Wahrnehmung entziehen. Dass es wirklich solche bisher unbekannte Elemente giebt, davon haben wir uns bereits zu überzeugen Gelegenheit gehabt. Wir glauben, auf unzweifelhafte Resultate der spectralanalytischen Methode gestützt, mit völliger Sicherheit schon jetzt die Behauptung aufstellen zu können, dass es neben dem Kalium, Natrium und Lithium noch ein viertes der Alkaliengruppe angehöriges Metall giebt, welches ein eben so charakteristisches und einfaches Spectrum giebt wie das Lithium — ein Metall, das mit unserem Spectralapparate nur zwei Linien zeigt, eine schwache blaue, die mit der Strontiumlinie *Sr δ* fast zusammenfällt, und eine andere blaue, die nur um Weniges weiter nach dem violetten Ende des Spectrums hin liegt und an Intensität und Schärfe der Begrenzung mit der Lithiumlinie wetteifert.

Bietet einerseits die Spectralanalyse, wie wir im Vorstehenden gezeigt zu haben glauben, ein Mittel von bewunderungswürdiger Einfachheit dar, die kleinsten Spuren gewisser Elemente in irdischen Körpern zu entdecken, so eröffnet sie andererseits der chemischen Forschung ein bisher völlig verschlossenes Gebiet, das weit über die Grenzen der Erde, ja selbst unseres Sonnensystems, hinausreicht. Da es bei der in Rede stehenden analytischen Methode ausreicht, das glühende Gas, um dessen Analyse es sich handelt, zu sehen, so liegt der Gedanke nahe, dass dieselbe auch anwendbar sei auf die Atmosphäre der Sonne und der helleren Fixsterne. Sie bedarf

aber hier einer Modification wegen des Lichtes, welches die Kerne dieser Weltkörper ausstrahlen. In seiner Abhandlung: „Ueber das Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht“[1]) hat Einer von uns durch theoretische Betrachtungen nachgewiesen, dass das Spectrum eines glühenden Gases umgekehrt wird, d. h. dass die hellen Linien in dunkele sich verwandeln, wenn hinter dasselbe eine Lichtquelle von hinreichender Intensität gebracht wird, die an sich ein continuirliches Spectrum giebt. Es lässt sich hieraus schliessen, dass das Sonnenspectrum mit seinen dunkeln Linien nichts Anderes ist, als die Umkehrung des Spectrums, welches die Atmosphäre der Sonne für sich zeigen würde. Hiernach erfordert die chemische Analyse der Sonnenatmosphäre nur die Aufsuchung derjenigen Stoffe, die, in eine Flamme gebracht, helle Linien hervortreten lassen, die mit den dunkeln Linien des Sonnenspectrums coincidiren.

An dem angeführten Orte sind als experimentelle Belege für den erwähnten theoretisch abgeleiteten Satz die folgenden Versuche angeführt:

Die helle rothe Linie im Spectrum einer Gasflamme, in die eine Perle von Chlorlithium gebracht ist, verwandelt sich in eine schwarze, wenn man volles Sonnenlicht durch die Flamme gehen lässt.

Ersetzt man die Perle von Chlorlithium durch eine von Chlornatrium, so zeigt sich im Sonnenspectrum die dunkle Doppellinie *D* (die mit der hellen Natriumlinie coincidirt) in ungewöhnlicher Deutlichkeit.

In dem Spectrum des Drumond'schen Lichtes tritt die dunkle Doppellinie *D* auf, wenn man seine Strahlen durch die Flamme von wässerigem Alkohol gehen lässt, in den man Chlornatrium gebracht hat.[2])

---

[1]) Kirchhoff, Pogg. Ann., Bd. CIX, S. 275. Oben S. 570.

[2]) In der Märznummer des *Phil. Mag.* für 1860 erinnert Stokes daran, dass Foucault schon im Jahre 1849 eine Beobachtung gemacht hat, die der oben erwähnten ähnlich ist. Bei der Untersuchung des elektrischen Bogens zwischen Kohlenspitzen bemerkte dieser (*l'Institut* 1849 p. 45), dass in dem Spectrum desselben helle Linien am Orte der Doppel-

Es schien uns nicht ohne Interesse, noch mehr Bestätigungen jenes merkwürdigen theoretischen Satzes zu erhalten. Es ist uns dies durch die Versuche, die nun beschrieben werden sollen, gelungen.

Wir machten einen dicken Platindraht in einer Flamme glühend und brachten ihn durch einen elektrischen Strom seinem Schmelzpunkte nahe. Der Draht gab ein glänzendes Spectrum ohne jede Spur von hellen oder dunkeln Linien. Wurde zwischen den Draht und den Spalt des Apparates eine Flamme von sehr wässerigem Alkohol gebracht, in dem Kochsalz aufgelöst war so zeigte sich die dunkle Linie *D* in grosser Deutlichkeit.

In dem Spectrum eines Platindrahtes, der allein durch eine Flamme glühend gemacht ist, kann man die dunkle Linie *D* hervorrufen, wenn man vor ihn ein Reagenzglas hält, auf dessen Boden man etwas Natriumamalgam gebracht hat, und dieses bis zum Kochen erhitzt. Dieser Versuch ist deshalb wichtig, weil er zeigt, dass weit unter der Glühhitze der Natriumdampf genau an derselben Stelle des Spectrums seine absorbirende Wirkung ausübt, wie bei den höchsten Temperaturen, welche wir hervorzubringen vermögen, und bei denjenigen, die in der Sonnenatmosphäre stattfinden.

Die helleren Linien der Spectren von *Ka*, *Sr*, *Ca*, *Ba* umzukehren, ist uns gelungen bei Anwendung von Sonnenlicht und von Mischungen der chlorsauren Salze dieser Metalle mit Milchzucker. Vor dem Spalte des Apparates war eine kleine eiserne Rinne aufgestellt; in diese wurde die Mischung gebracht, volles Sonnenlicht längs der Rinne auf den Spalt geleitet und die Mischung durch einen glühenden Draht seitlich

---

linie *D* des Sonnenspectrums vorhanden sind, und dass der Bogen die dunkle Linie *D* verstärkt oder erzeugt, wenn man durch ihn die Strahlen der Sonne oder einer der glühenden Kohlenspitzen gehen lässt und dann zu einem Spectrum auseinander legt. Die im Texte erwähnte Beobachtung giebt die Erklärung dieser interessanten, schon vor 11 Jahren von Foucault bemerkten Erscheinung und zeigt, dass dieselbe nicht bedingt ist durch die Eigenschaften des in vieler Hinsicht noch so räthselhaften elektrischen Lichtes, sondern herrührt von einer Natriumverbindung, die in der Kohle enthalten war und durch den Strom in glühendes Gas verwandelt wurde.

entzündet. Das Beobachtungsfernrohr war mit dem Schnittpunkt seiner schräg gestellten Fäden auf die helle Linie des Flammenspectrums, deren Umkehrbarkeit geprüft werden sollte, eingestellt; der Beobachter concentrirte seine Aufmerksamkeit darauf, zu beurtheilen, ob im Augenblicke der Verpuffung eine dunkle durch den Schnittpunkt des Fadenkreuzes gehende Linie sich zeigte. Auf diese Weise war es bei richtiger Mischung der abbrennenden Gemenge sehr leicht, die Umkehrbarkeit der Linien *Ba α* und *Ba β* und der Linie *Ka β* zu constatiren. Die letzte von diesen fällt mit einer der deutlichsten, aber von Fraunhofer nicht bezeichneten, dunkeln Linie des Sonnenspectrums zusammen; diese Linie erscheint im Augenblicke der Verpuffung des Kalisalzes sehr viel deutlicher als sonst. Um auf die beschriebene Weise die Umkehrung der hellen Linien des Strontiumspectrums zu sehen, muss der chlorsaure Strontian auf das Sorgfältigste getrocknet sein; eine Spur Feuchtigkeit bewirkt, dass bei der Verpuffung herumspritzende Salztheilchen die Flamme erfüllen, die Sonnenstrahlen dämpfen und das positive Strontiumspectrum zum Vorschein kommen lassen.

Wir haben uns in dieser Abhandlung darauf beschränkt, die Spectren der Metalle der Alkalien und alkalischen Erden und diese auch nur in so weit zu untersuchen, als es für die Analyse irdischer Stoffe nöthig ist. Wir behalten uns vor, diesen Untersuchungen die weitere Ausdehnung zu geben, die wünschenswerth ist in Beziehung auf die Analyse irdischer Körper und auf die Analyse der Atmosphären der Gestirne.

Heidelberg, im April 1860.

Zur Geschichte der Spectral-Analyse und der Analyse der Sonnenatmosphäre. [1])

In meinen „Untersuchungen über das Sonnenspectrum und die Spectren der chemischen Elemente[2])“

[1]) Pogg. Ann. Bd. 118. 1862.

[2]) Abhandl. der Berl. Akademie 1861.

habe ich einige kurze historische Bemerkungen über ältere Arbeiten gemacht, die sich auf die in denselben behandelten Gegenstände beziehen. Ich habe dabei gewisse Veröffentlichungen mit Stillschweigen übergangen; einige, weil ich sie nicht kannte, andere, weil sie mir von keinem erheblichen Interesse für die Geschichte der in Rede stehenden Entdeckungen zu sein schienen. Nachdem ich jene kennen gelernt und mich überzeugt habe, dass diesen von anderen Seiten mehr Gewicht beigelegt wird, als ich ihnen zuschrieb, will ich jene historischen Bemerkungen hier zu vervollständigen suchen.

1. Ich habe vor Allem unter denjenigen, die sich mit der Beobachtung der Spectren farbiger Flammen beschäftigt haben, Herschel und Talbot zu erwähnen, deren Namen hier um so weniger mit Stillschweigen übergangen werden dürfen, als sie bereits mit Bestimmtheit den Nutzen bezeichnet haben, den diese Beobachtung dem Chemiker zu gewähren im Stande ist. Die Kenntniss ihrer Arbeiten verdanke ich zum grossen Theile Hrn. A. Miller, der einen Nachweis derselben in der Nummer vom 19. April 1862 der „Chemical News" gegeben hat. In dem Bande der Edinburgh. Phil. Trans. 1822, p. 455, heisst es hier, beschreibt J. Herschel kurz die Spectren von Chlorstrontium, Chlorkalium, Chlorkupfer, salpetersaurem Kupfer und Borsäure. Derselbe Beobachter sagt in dem Artikel Light, Encycl. Metrop. 1827, p. 438: „Salts of soda give a copious and purely homogeneous yellow, of potash a beautiful pale violet." Er führt dann die Farben an, welche Salze von Kalk, Strontian, Lithiom, Baryt, Kupfer und Eisen geben und fährt fort: „Of all salts the muriates succeed best, from their volatility. The same colours are exhibited also, when any of the salts in question are put in powder into the wick of a spirit-lamp" .... „The colours thus communicated by the different bases to flame afford, in many cases, a ready and neat way of detecting extremely minute quantities of them" ... „The pure earths, when violently heated, as has recently been practised by Lieutenant Drummond, by directing on small spheres of them the flames of several spirit-lamps, urged by oxygen gas, yield from their surfaces lights of extraordinary splendour, which, when examined by prismatic analysis, are

found to possess the peculiar definite rays in excess which characterise the tints of flames coloured by them, so that can be no doubt that these tints arise from the molecules of the colouring matter reduced to vapour, and held in a state of violent ignition."

Talbot sagt[1]): „The flame of sulphur and nitre contains a red ray, which appears to me of a remarkable nature." .... „This red ray appears to possess a definite refrangibility, and to be characteristic of the salts of potash, as the yellow ray is of the salts of soda, although, from its feeble illuminating power, it is only to be detected with a prism. If this should be admitted, I would further suggest that whenever the prism shows a homogeneous ray of any colour, to exist in a flame, this ray indicates the formation or the presence of a definite chemical compound." Etwas weiter sagt er bei der Besprechung des Spectrums von Rothfeuer nach Erwähnung der so oft auftretenden gelben Linie: „the other lines may be attributed to the antimony, strontia etc., which enter into this composition. For instance, the orange ray may be the effect of the strontia, since Mr. Herschel found in the flame of muriate of strontia a ray of that colour. If this opinion should be correct and applicable to the other definite rays, a glance at the prismatic spectrum of a flame may show it to contain substances which it would otherwise require a laborious chemical analysis to detect." In einer späteren Mittheilung[2]) sagt derselbe Physiker nach der treffenden Beschreibung der Lithium- und Strontiumspectren: „Hence, I hesitate not to say that optical analysis can distinguisch the minutest portions of these two substances from each other with as much certainty, if not more, than any other known method."

Es ist durch diese Aeusserungen der Gedanke der „chemischen Analyse durch Spectralbeobachtungen" vollkommen klar ausgedrückt; — aber durch andere (von Hrn. A. Miller

[1]) Brewster's Journ. of Science, V, 1826, Chemical News April 27, 1861.

[2]) London and Edinburgh Phil. Mag. Third Series, 1834, vol. IV, p. 114; Chemical News, April 27, 1861.

bei seinem Berichte nicht erwähnte) Aussprüche derselben Beobachter, die in denselben Abhandlungen vorkommen, aus welchen die vorigen Citate genommen sind, wird den vorher angeführten Schlüssen geradezu widersprochen und die Basis dieser Analyse völlig in Frage gestellt.

Herschel sagt in seinem Artikel Light, fast unmittelbar vor den oben angegebenen Worten[1]): „In gewissen Fällen, wenn die Verbrennung sehr stark ist, z. B. wenn man in die Flamme einer Oellampe mit dem Löthrohr bläst, oder in dem oberen Ende der Flamme einer Spirituslampe, oder wenn Schwefel in einen weissglühenden Schmelztiegel geworfen wird, entsteht eine grosse Menge von reinem und homogenem, gelbem Licht; und im letzteren Falle macht dasselbe fast das ganze Licht aus. Dr. Brewster hat dasselbe gelbe Licht dann gefunden, wenn man erhitzten, mit Wasser vermischten Weingeist anzündet."

Talbot erklärt[2]): „Hence the yellow rays may indicate the presence of soda, but they nevertheless frequently appear, where no soda can be supposed to be present." Er führt dann an, dass das gelbe, von Herschel entdeckte Licht des brennenden Schwefels identisch mit dem gelben Lichte der Flamme des kochsalzhaltigen Alkohols ist, und erzählt, dass er zu der Vermuthung geleitet sei, dass das gelbe Licht, welches entstand, wenn in einer Flamme Salz auf einen Platinstreifen gestreut wurde, „was owing to the water of crystallisation rather than to the soda; but then", fährt er fort, „it is not easy to explain why the salts of potash, etc., should not produce it likewise. Wood, ivory, paper, etc., when placed in the gasflame, give off, besides their bright flame, more or less of this yellow light, which I have always found the same in its characters. The only principle which these various bodies have in common with the salts of soda is water; yet I think that the formation or presence of water cannot be the origin of this yellow light, because ignited sulphur produces the very same, a substance with which water is

---

[1]) Herschel, vom Licht; übersetzt von Schmidt, S. 265.

[2]) Brewster's Journal V, 1826.

Ausdehnung des Spectrums ist Ursache, dass überhaupt die Spectralreaction der Baryumverbindungen etwas weniger empfindlich ist als die der bisher betrachteten Körper. 0,3 Grm. chlorsaurer Baryt mit Milchzucker gaben in unserem Zimmer verbrannt, nachdem die Luft vermittelst eines aufgespannten Regenschirmes gehörig durchgemengt war, längere Zeit auf das deutlichste die Linie *Ba α*. Man kann daher aus einer der beim Natrium ausgeführten ähnlichen Rechnung schliessen, dass durch die Reaction noch weniger als ungefähr $\frac{1}{1000}$ Milligramm mit völliger Deutlichkeit angezeigt wird.

Chlorbaryum, Brombaryum, Jodbaryum, Fluorbaryum, Baryterdehydrat, kohlensaurer und schwefelsaurer Baryt zeigen die Reaction am ausgezeichnetsten, und können daher durch unmittelbares Erhitzen in der Flamme erkannt werden.

Durch Salzsäure angreifbare, Baryterde enthaltende Silicate geben die Reaction, wenn sie, wie beim Kalk angegeben, mit einem Tropfen Salzsäure in die Flamme gebracht werden, ebenfalls. So erzeugt z. B. Barytharmotom, auf diese Weise behandelt, die Linie *Ca α* und *Ca β* neben den Linien *Ba α* und *Ba β*.

Verbindungen der Baryterde mit feuerbeständigen Säuren, die sich mit und ohne Salzsäure in der Flamme indifferent verhalten, schliesst man am besten auf die beim Strontium angegebene Weise mit kohlensaurem Natron auf und prüft den dadurch erhaltenen kohlensauren Baryt. Kommen in solchen Verbindungen *Ca*, *Ba* und *Sr* in sehr ungleichen Mengen gemeinschaftlich vor, so löst man die durch Aufschliessen erhaltenen kohlensauren Salze in einem Tropfen Salpetersäure und zieht aus dem abgedampften Rückstand den Kalk durch Alkohol aus. Der Rückstand enthält dann noch Baryt und Strontium, die sich, wenn sie nicht in allzu ungleicher Menge vorkommen, leicht neben einander erkennen lassen. Handelt es sich darum, die letzten noch wahrnehmbaren Spuren von *Sr* oder *Ba* nachzuweisen, so verwandelt man den Rückstand durch Glühen mit Salmiak in Chlorverbindungen, aus denen sich das Chlorstrontium durch Alkohol in der zur Erkennung hinlänglich concentrirten Form leicht ausziehen lässt. Sind unter den nachzuweisenden Stoffen nicht einzelne in verschwindend kleinen Mengen vorhanden, so werden alle solche

Die Versuche von Wheatstone[1]), Masson, Ångström, van der Willigen und Plücker über das Spectrum des elektrischen Funkens oder Lichtes (die schon in meinen „Untersuchungen über das Sonnenspectrum und die Spectren der chemischen Elemente", Abhandlungen der Akad. d. Wissensch. zu Berlin, 1861 S. 70, angeführt sind), sowie die Versuche von Despretz[2]), aus denen dieser Physiker schloss, dass die hellen Linien des Spectrums des Lichtes einer galvanischen Säule eine von der Stromstärke unabhängige Lage haben, konnten der Ansicht zur Stütze dienen, dass die hellen Linien des Spectrums eines glühenden Gases ausschliesslich durch die einzelnen chemischen Bestandtheile desselben bedingt sind; aber den Beweis für diese Ansicht konnten sie nicht liefern. Hierzu waren die Bedingungen bei ihnen zu verwickelt, die Vorgänge, die in einem elektrischen Funken stattfinden, zu wenig gekannt. Dazu kommt noch, um die Beweiskraft dieser Versuche in Bezug auf die genannte Frage zu erschüttern: die Verschiedenheit der Farbe des elektrischen Lichtes in verschiedenen Theilen einer Geissler'schen Röhre, der Umstand, dass van der Willigen bei denselben Elektroden und unveränderter chemischer Beschaffenheit des Gases, in dem die Elektricität überging, verschiedene Spectren erhielt, wenn er die Dichtigkeit dieses Gases in genügenden Grenzen änderte, und endlich eine Beobachtung von Ångström, die dieser beiläufig erwähnt. Ångström sagt[3]): „Schon Wheatstone hat bemerkt, dass, wenn die Pole aus zwei verschiedenen Metallen bestehen, das Spectrum die Linien beider Metalle enthält. Es war deshalb von Interesse zu untersuchen, ob eine Verbindung derselben Metalle, besonders eine chemische, auch die Linien beider Metalle gebe, oder sich dieselbe durch Auftreten neuer Linien auszeichne. Es zeigte sich, dass das

---

[1]) Wheatstone experimentirte nicht allein mit dem Funken der Elektrisirmaschine, sondern auch mit dem Volta'schen und dem Inductions-Funken. Report of the British Association for the Advancement of Science 1835; Chemical News March 23, 1861; Chemical News March 30, 1861.

[2]) Compt. rend. XXXI, p. 419 (1850).

[3]) Pogg. Ann. Bd. 94 S. 150.

erste der Fall ist. Der einzige Unterschied bestand bloss darin, dass gewisse Linien fehlten oder sich mit grösserer Schwierigkeit zeigten; aber wenn sie sich zeigten, erschienen sie immer an denselben Stellen, wie bei den einzelnen Metallen." „Bei *Zn Sn*", heisst es aber in dem folgenden Absatz, „waren die Linien im Blau etwas nach dem Violetten verschoben, aber höchst unbedeutend." Hätte eine solche Verschiebung, wenn auch eine noch so kleine, hier wirklich stattgefunden, so wäre daraus zu schliessen: entweder, dass die hellen Linien des elektrischen Funkens anderen Gesetzen folgen, als die eines glühenden Gases, oder, dass die letzteren nicht ausschliesslich durch die einzelnen chemischen Bestandtheile desselben bedingt sind.

Es konnte die in Beziehung auf die Linien glühender Gase aufgestellte Frage nur entschieden werden durch Versuche unter den möglich einfachsten Verhältnissen, durch Beobachtung der Spectren von Flammen. Solche Beobachtungen sind wieder 1845 von Hrn. A. Miller angestellt; aber diese haben zur Lösung jener Frage keinen Beitrag geliefert. Hr. A. Miller hat das Verdienst, zuerst Abbildungen von Flammenspectren veröffentlicht zu haben; aber diese Abbildungen sind wenig gelungen. Allerdings sagt Hr. Crookes in Beziehung auf dieselben bei dem Wiederabdruck der zugehörigen Abhandlung [1]): „We cannot, of course, give the coloured diagrams, with which it was originally illustrated; but we can assure our readers that, after making allowance for the imperfect state of chromolithographie sixteen years ago, the diagrams of the spectra given by Prof. Miller are more accurate in several respects than the coloured spectra figured in recent numbers of the scientific periodicals." Dieser „Versicherung" des Hrn. Crookes gegenüber kann ich aber anführen, dass ich versuchsweise die Abbildungen des Hrn. Miller mehrfach Personen vorgelegt habe, die mit den betreffenden Spectren vertraut waren, und sie aufgefordert die Zeichnungen aufzusuchen, die die Spectren von Strontium, von Calcium und

[1]) Chemical News Mai 18, 1861.

von Barium darstellen sollen, ohne dass es Einem gelungen wäre, die richtigen zu finden.

Es hat zuerst Swan bei Gelegenheit seiner classischen Arbeit „über die prismatischen Spectren der Flammen von Kohlenwasserstoffverbindungen“ (die schon in den Abhandlungen der Akad. der Wissensch. zu Berlin 1861, S. 68, und in der gemeinsamen Abhandlung von Bunsen und mir Pogg. Ann. Bd. 110 S. 168 angeführt ist) durch Versuche zu entscheiden gesucht, ob die fast immer auftretende gelbe Linie ausschliesslich durch Natriumverbindungen hervorgebracht sein könne. Er prüft, wie klein die Menge Kochsalz ist, die diese Linie noch deutlich zeigt; er findet diese Menge über alle Vorstellung klein, und schliesst dann: „betrachten wir die fast universelle Verbreitung der Natriumsalze und die merkwürdige Energie derselben zur Hervorbringung eines gelben Lichtes, so scheint es sehr wahrscheinlich, dass die gelbe Linie *R*, welche in dem Spectrum fast aller Flammen erscheint, jedesmal von der Anwesenheit kleiner Natriummengen herrührt.“ Der eigentliche Zweck der in Rede stehenden Arbeit war die Vergleichung der Spectren verschiedener Kohlenwasserstoffflammen. „Das Resultat dieser Vergleichung war: dass in allen Spectren, erzeugt durch Substanzen von der Form C_rH_s, oder der Form $C_rH_sO_t$, die hellen Linien identisch sind. In einigen Fällen zwar sind gewisse, sehr schwache Linien, die im Spectrum der Bunsen'schen Lampe vorkommen, nicht sichtbar. Die Helligkeit der Linien variirt mit dem Verhältniss der Kohle zum Wasserstoff in der verbrennenden Substanz und ist am grössten, wo die meiste Kohle vorhanden ist“ . . . „Die absolute Identität, welche diesem nach zwischen den Spectren unähnlicher Kohlenwasserstoffverbindungen existirt, ist eine nicht wenig merkwürdige; denn sie beweist, 1) dass die Lage der Linien im Spectrum nicht variirt mit dem Verhältniss von Kohle und Wasserstoff in dem verbrennenden Körper, wie hervorgeht, wenn man die Spectren des Lichts vom leichten Kohlenwasserstoff CH_2, ölbildendem Gase C_2H_2 und Terpentinöl $C_{10}H_8$ vergleicht; 2) dass die Gegenwart des Sauerstoffs den Charakter der Spectren nicht ändert, da Aether C_4H_5O und Holzgeist $C_2H_4O_2$ Spectra geben, die

identisch sind mit denen von Paraffin $C_{20}H_{20}$ und Terpentinöl $C_{10}H_8$."

„In gewissen Fällen wenigstens afficirt die Beimengung anderer Substanzen zu den Kohlenwasserstoffverbindungen die Linien des Spectrums nicht. So habe ich gefunden, dass ein Gemisch von Alkohol und Chloroform mit einer Flamme brennt, die eine sehr leuchtende grüne Hülle hat — ein charakteristisches Kennzeichen der Anwesenheit des Chlors —, und in deren Spectrum sind keine Linien sichtbar. Facht man indess die Flamme mit dem Löthrohr an, so nimmt das Licht der Hülle ab, und die gewöhnlichen Linien des Kohlenwasserstoffspectrums werden sichtbar."

Swan hat durch diese Arbeit einen äusserst schätzenswerthen Beitrag zur Beantwortung der hier mehrfach aufgestellten Frage, ob die hellen Linien eines glühenden Gases ausschliesslich von den einzelnen chemischen Bestandtheilen desselben abhängen, geliefert; aber er hat die Frage in ihrer Allgemeinheit und mit Bestimmtheit nicht beantwortet; er hat sie sich auch nicht gestellt; er wollte seine Untersuchung auf die Spectren der Kohlenwasserstoffflammen beschränken; zur Untersuchung jener gelben Linie wurde er dabei durch das so häufige Vorkommen derselben auch in diesen Spectren veranlasst.

Niemand hat sich, wie es scheint, jene Frage vor Bunsen und mir mit Klarheit vorgelegt; es war das wichtigste Ziel unserer gemeinsamen Arbeit, dieselbe zu beantworten; durch Versuche, die in der mannigfaltigsten Weise abgeändert wurden, und die zum grössten Theile neu waren, wurden wir zu der Entscheidung geführt, die die Grundbedingung für die „chemische Analyse durch Spectralbeobachtungen" bildet.

2. Auch in Beziehung auf die Geschichte der chemischen Analyse der Sonnenatmosphäre habe ich hier noch Einiges anzuführen.

Den Kern der von mir entwickelten Theorie der Chemie der Sonne bildet ein Satz, der kurz ausgesprochen lautet: für jede Gattung von (Wärme- oder Licht-) Strahlen ist das Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen für alle Körper bei derselben Temperatur

das gleiche. Aus diesem Satze folgt leicht, dass ein glühender Körper, der nur Lichtstrahlen von gewissen Wellenlängen aussendet, auch nur Lichtstrahlen von denselben Wellenlängen absorbirt; woraus dann weiter sich ergiebt, wie aus den dunkeln Linien des Sonnenspectrums auf die Bestandtheile der Sonnenatmosphäre geschlossen werden kann.

In seinen „optischen Untersuchungen“[1]) stellt Ångström S. 144 den Satz auf, dass ein Körper „im glühenden Zustande gerade alle die Lichtarten aussenden muss, welche er in gewöhnlicher Temperatur absorbirt.“ Dem Satze folgen die Worte: „Die Prüfung der Richtigkeit dieses Satzes ist indess grossen Schwierigkeiten unterworfen, weil ein ins Glühen versetzter Körper unter ganz anderen Elasticitätsverhältnissen auftritt, als unter welchen sein Absorptionsvermögen geprüft wurde.“ Diese Worte sind in der Verbindung, in der sie stehen, unverständlich; sie würden verständlich, wenn man annähme, dass Ångström in seinem Satze eigentlich hätte sagen wollen: ein Körper müsse in glühendem Zustande gerade alle die Lichtarten aussenden, welche er bei derselben Temperatur absorbirt. Eine solche Interpretation wird aber durch die unmittelbar folgende Auseinandersetzung Ångström's keineswegs begünstigt. Diese lautet: „Einen indirecten Beweis von der Richtigkeit des Satzes liefert indess der von Hrn. Niepce de Saint-Victor entdeckte Zusammenhang zwischen der Farbe, welche ein Körper der Alkoholflamme ertheilt, und der, welche das Licht entwickelt auf einer Silberscheibe, die mit dem in Rede stehenden Körper chlorirt worden. Da nämlich die Silberscheibe, mit Chlor allein behandelt, alle Farbennüancen des Sonnenspectrums annimmt, mit einem färbenden Körper zugleich behandelt, aber fast ausschliesslich die Farbe des Körpers zeigt, so kann dies nicht anders geschehen, als dass die so zubereitete Silberscheibe ausschliesslich gerade die Farbe absorbirt, welche dem färbenden Körper angehört.“ Ohne zu versuchen im Uebrigen diesem „Beweise“ zu folgen, erkennt man, dass bei demselben die Ausstrahlung einer Koch-

[1]) Pogg. Ann. Bd. 94 (1853).

salzflamme z. B. in Beziehung gesetzt wird zu der Absorption einer kalten, mit Kochsalz behandelten Silberplatte.

Der Sinn, den man dem Satze beilegen könnte, wird aber ganz und gar in Frage gestellt durch eine Bemerkung, die Ångström S. 143 macht. Es heisst hier: „Dabei ist jedoch wohl zu merken, dass ein Medium nicht bloss die Schwingungsbewegungen absorbirt, welche es am leichtesten annimmt, sondern auch die, welche zu ihm [1]) in einem einfachen Verhältniss stehen, wie Octave, Terz etc." Um den Widerspruch zu erkennen, in dem diese Behauptungen mit einander stehen, denke man sich einen Körper, der gewisse Schwingungsbewegungen mit gleicher Leichtigkeit, und andere gar nicht annehmen kann; nach dem Satze Ångström's S. 144 kann dieser Körper nur die ersteren Schwingungsbewegungen absorbiren, nach der Bemerkung desselben S. 143 muss er, ausser auf sie, auch noch auf gewisse andere eine Absorption ausüben.

Man sieht, dass der Satz, der die Grundlage der chemischen Analyse der Sonnenatmosphäre bildet, Ångström schon vorgeschwebt hat, aber freilich nur in unbestimmten Umrissen. Der theoretischen Betrachtung, durch welche Ångström denselben herzuleiten sucht, liegt derselbe Gedanke zu Grunde, den später Stokes [2]) bei Besprechung meiner ersten Veröffentlichung über die Umkehrung der Flammenspectren in richtigerer Weise ausgeführt hat. Stokes vergleicht hier die Absorption, die eine Flamme auf solche Strahlen ausübt, wie sie sie selbst aussendet, mit der Resonanz, die in einem tonfähigen Körper erregt wird durch Tonwellen von der Höhe derer, die dem Körper selbst zukommen. Diese Vergleichung kann, wenn es gelingt sie weiter auszuführen, die wichtigsten Resultate gewähren; wie Stokes sie gegeben hat, ist sie von Interesse, weil sie ein der Anschauung nahe liegendes Bild für jene Absorption liefert; einen Beweis für den Satz, dass ein glühender Körper, der nur Lichtstrahlen von gewissen Wellenlängen aussendet auch nur Lichtstrahlen

---

[1]) Ihm ist wohl ein Fehler der Uebersetzung und dafür ihnen zu lesen.

[2]) Phil. Mag. March 1860.

von denselben Wellenlängen absorbirt, enthält sie aber nicht: die Theorie der Resonanz und die Theorie der Entstehung und der Absorption der Licht- und Wärmestrahlen sind bis jetzt zu wenig ausgebildet, als dass auf einem solchen Wege der genannte Satz sich gegenwärtig beweisen liesse.

3. In den Trans. of the R. Soc. of Edinburgh für 1858 befindet sich eine Abhandlung von Balfour Stewart, in der dieser sehr interessante Versuche über Wärmestrahlung und Absorption von theilweise diathermanen Platten beschreibt. Er findet hier, dass eine Steinsalzplatte weniger diatherman ist für Strahlen, die eine andere auf 100° C. erwärmte Steinsalzplatte aussendet, als für solche, die von einer Russfläche bei derselben Temperatur ausgehen. Hieraus und aus ähnlichen Erscheinungen, die Platten von Glas und Glimmer zeigen, folgert er: „that every body which sifts heat in its passage through its substance, is more opaque with regard to heat radiated by a thin slice of its own substance, than it is with regard to ordinary heat.“ Er erinnert dann an das von Prevost zuerst erkannte Princip, nach dem ein Körper in einer Umgebung von gleicher Temperatur so viel Wärme absorbiren muss, als er selbst ausstrahlt, und sagt dann: „Considering, therefore, the heat of any temperature to consist of heterogeneous rays, we may state the law thus: The absorption of a plate equals its radiation, and that for every description of heat.“

Dieser Schluss kann ein strenger nicht sein, schon deshalb nicht, weil aus Versuchen, die nur ein Mehr und ein Minder kennen gelehrt haben, mit Strenge keine Gleichheit geschlossen werden kann. Der Satz, zu dem er führt, kann nicht als durch ihn bewiesen angesehen werden, sondern nur als eine Hypothese, die einer schärferen Prüfung und überdies auch einer näheren Präcisirung der in ihr vorkommenden Ausdrücke bedarf. Stewart selbst betrachtet auch nicht seinen Satz als hierdurch streng bewiesen; denn unmittelbar nach dem Ausspruche desselben sagt er: „A more rigid demonstration may be given thus“: und geht dann in tiefere Betrachtungen ein, die einen solchen strengeren Beweis liefern sollen, und aus denen man auch näher erkennt, welche

Bedeutung den Ausdrücken absorption und radiation beizulegen ist. Aber diese Betrachtungen haben nicht die nöthige Allgemeinheit und die nöthige Schärfe, um ihren Zweck zu erreichen, so dass trotz derselben der Satz von Stewart eine Hypothese bleibt, der einige Wahrscheinlichkeit gegeben ist.

Stewart findet aus seinen Versuchen, dass theilweise diathermane Platten um so mehr Wärme ausstrahlen, je dicker sie sind, und schliesst hieraus mit vollkommenem Rechte, dass eine Strahlung ebensowohl von dem Inneren der Körper, als von ihrer Oberfläche ausgeht. Er knüpft hieran die Frage: „are we to suppose each particle of each substance to have at a given temperature an independent radiation of its own, equal, of course, in all directions? A priori", fährt er fort, „this is the most probable supposition, and it seems likewise to be conformable to experiment." Das in diesen Worten ausgesprochene Princip bildet den Prüfstein für die Richtigkeit jenes Satzes bei dem Beweise, den Stewart für denselben zu geben sucht. Er sagt: „the question arises, is the law of an equal and independent radiation of each particle of a body theoretically consistent with equilibrium of temperature? That is, suppose we have any irregularly-shaped inclosure walled round with a variaty of substances, and each particle of each substance radiating into the inclosure, from the sides of which it is reflected many times backwards and forwards before it is finally absorbed, — this being the case, will the law of equal and independent radiation, and those of reflection and refraction so fit with one another, that every particle of the walls of the inclosure shall absorb precisely as much heat as it radiates? It will be endeavoured to show that these laws are so adapted to each other." Mit Benutzung des Gesetzes „von der gleichen und unabhängigen Strahlung" und der Gesetze der Reflexion und Brechung bildet nun Stewart die Gleichung, die den zu beweisenden Satz von der Gleichheit der Absorption und Radiation für jede Wärmegattung ausspricht. Es zeigt sich, dass diese Gleichung keinen Widerspruch enthält, sondern eine mögliche Eigenschaft der inneren Strahlung in einem Körper ausdrückt. Er schliesst daraus, dass der Satz von der Gleichheit der Absorption und Radiation

für jede Strahlengattung bestehen muss. Es ist das offenbar ein Fehlschluss. Durch die bezeichnete Betrachtung wird der Satz nur als möglich, nicht als nothwendig nachgewiesen.

Die in Rede stehende Betrachtung ist, weiter, von Stewart nicht in der Allgemeinheit durchgeführt, die in den oben citirten Worten ausgesprochen ist, sondern nur für einen sehr speciellen Fall. Im Anschluss an diese Worte sagt er: „and I shall select for the proof a definite form and description of inclosure; the conclusions arrived at rendering it highly probable (if not rigidly demonstrating) that the same adaptation will hold good for every inclosure, however irregular or varied.“ Der Fall, den er betrachtet, ist der, dass ein, durch eine Ebene begrenzter, im Uebrigen unbegrenzter Körper einer schwarzen Fläche, die jener Ebene parallel ist, gegenübersteht. In dem Beweise, den Stewart in diesem Falle für seine Behauptung giebt, ist endlich noch ein Fehler, der sich in dem Resultate verräth, zu dem der Verfasser gelangt. Er schliesst: „We have, therefore, two laws necessary to the equilibrium of temperature, — 1st, That the absorption of a particle is equal to its radiation, and that for every description of heat; 2^{d}, That the flow of heat from the interior upon the surface of a substance of indefinite thickness, is proportional caeteris paribus to its index of refraction, and that for every description of heat.“ Dieses zweite Gesetz (welches die oben bezeichnete Gleichung ausspricht, die, wie erwähnt, eine mögliche Eigenschaft der inneren Strahlung in einem Körper angiebt) ist nicht richtig; die in ihm bezeichnete Grösse ist nicht dem Brechungsverhältniss, sondern dem Quadrat desselben proportional.[1]) Bei einer späteren Gelegenheit[2]) äussert Stewart selbst (aber ohne seine frühere, damit im Widerspruch stehende Behauptung zu erwähnen): „Now if R denotes the radiation of lamplack, and p the index of refraction of an uncrystallized medium, it may be shown, that the internal radiation as thus defined is equal to Rp^2.

---

[1]) S. oben. S. 594.

[2]) Report of the Brit. Ass. for the Advancement of Sc. for 1861. p. 107.

4. Hr. A. Miller sagt am Schlusse seiner schon oben erwähnten Abhandlung über gefärbte Flammen: „It may be interesting to remark, in connection with the speculations on the absorptive action of the sun's atmosphere, that if solar light be transmitted through a flame exhibiting wellmarked black lines, the lines reappear in the compound spectrum, provided the light of day be not too intense compared with that of the coloured flame. This may be seen in the red light of the nitrate of strontia, and less perfectly in the green of the chloride of copper. It would, therefore, appear that luminous atmospheres exist in which not only certain rays are wanting, but which exercise a positive absorptive influence on other lights.“ In seinem Berichte „on spectrum analysis“ in der Nummer der Chemical News vom 19. April 1862 führt Hr. Miller diese Zeilen an, ohne eine Bemerkung über das Verhältniss zu machen, in dem seine Beobachtungen und sein aus derselben gezogener Schluss zu dem, was ich gefunden habe, stehen. In der Nummer vom 18. Mai 1862 desselben Journals schreibt Hr. Crookes mit Bezug auf dieselben Worte: „This paragraph shows that Prof. Miller has anticipated, by nearly sixteen years, the remarkable discovery, ascribed to Kirchhoff, of the opacity of certain coloured flames to light of their own colour.“

Man braucht nur mit einiger Aufmerksamkeit die Worte des Hrn. Miller zu lesen, um zu erkennen, dass der Schluss, zu dem er kommt, gerade das Gegentheil von meinem Schlusse ist, dabei aber auch einzusehen, dass sein Schluss ein unrichtiger ist. Lässt man schwaches Tageslicht durch eine gefärbte Flamme gehen, so macht sich die Absorption dieser nicht bemerklich; ihre hellen Linien erscheinen heller als die Umgebung, weil in ihnen zu dem Tageslichte noch das Licht der Flamme hinzukommt.

5. Bald nach meiner ersten, kurzen Veröffentlichung [1]) über die chemische Analyse der Sonnenatmosphäre erhielt ich folgende briefliche Mittheilung von Prof. W. Thomson:

„Prof. Stokes mentioned to me at Cambridge sometime

[1]) Monatsberichte der K. Akad. der Wissensch. zu Berlin) Oct. 1859.

probably about ten years ago, that Prof. Miller had made an experiment testing to a very high degree of accuracy the agreement of the double dark line D of the solar spectrum with the double bright line constituting the spectrum of the spirit lamp burning with salt. I remarked that there must be some physical connexion between two agencies presenting so marked a characteristic in common. He assented and said, he believed a mechanical explanation of the cause was to be had on some such principles as the following: Vapour of sodium must possess by its molecular structure a tendency to vibrate in the periods corresponding to the degree of refrangibility of the double line D. Hence the presence of sodium in a source of light, must tend to originate light of that quality. On the other hand vapour of sodium in an atmosphere round a source must have a great tendency to retain in itself i. e. to absorb and to have its temperature raised by light from the source of the precise quality in question. In the atmosphere around the sun, therefore, there must be present vapour of sodium, which, according to the mechanical explanation thus suggested, being particularly opaque for light of that quality, prevents such of it as is emitted from the sun from penetrating to any considerable distance through the surrunding atmosphere. The test of this theory must be had in ascertaining whether or not vapour of sodium has the special absorbing power anticipated. I have the impression that some Frenchmen did make this out by experiment, but I can find no reference on that point.

I am not sure whether Prof. Stokes' suggestion of a mechanical theory has ever appeared in print. I have given it in my lectures regularly for many years, always pointing out along with it that solar and stellar chemistry were to the studied by investigating terrestrial substances giving bright lines in the spectra of artificial flames corresponding to the dark lines of the solar and stellar spectra."

In der Nummer des Phil. Mag. für Febr. 1862 sagt Prof. Thomson p. 158: „The last eight or nine years Stokes' principles of solar and stellar chemistry have been taught in the public lecture on natural philosophy in the university of

Glasgow; and it has been shown as a first result, that there certainly is sodium in the sun's atmosphere. The recent application of these principles in the splendid researches of Bunsen and Kirchhoff (who made an independent discovery of Stokes' theory), has demonstrated with equal certainty that there are iron and manganese, and several of our other known metals in the sun."

Aus jenem Briefe — der auf meine Veranlassung Phil. Mag. Ser. 4. Vol. XX, p. 20 und in einer Uebersetzung Ann. d. ch. et de ph. Ser. 8, Vol. 62 p. 190 abgedruckt ist — sieht man, dass vor vielen Jahren schon Stokes gesprächsweise die Idee geäussert hat, dass man vielleicht aus den dunkeln Linien des Sonnenspectrums würde auf die chemische Beschaffenheit der Sonnenatmosphäre schliessen können. Dass diese Idee richtig ist — dass nämlich eine Flamme die ihr hypothetisch von Stokes zugeschriebene Absorption ausübt, und dass die hellen Linien des Spectrums eines glühenden Gases mit Sicherheit auf die chemischen Bestandtheile desselben zu schliessen erlauben — ist erst durch meine theoretischen Betrachtungen und durch die Versuche, die ich theils mit Bunsen, theils allein angestellt habe, erwiesen; und eben deshalb wahrscheinlich ist früher (während eines Zeitraums von etwa 10 Jahren) von Niemandem etwas über jene, gesprächsweise von Stokes geäusserte Idee durch den Druck veröffentlicht worden. Es steht in einem auffallenden Widerspruche hiermit, wenn jetzt Prof. Thomson sagt: „durch Stokes' Principien der Chemie der Sonne und der Fixsterne ist gezeigt, dass sicher sich Natrium in der Sonnenatmosphäre befindet," und dann weiter: „die Anwendung dieser Principien von Bunsen und Kirchhoff (die unabhängig Stokes' Theorie gefunden haben) hat mit gleicher Sicherheit die Anwesenheit von anderen Metallen in der Sonne nachgewiesen."

Verlag von **Joh. Ambr. Barth** in Leipzig.

Gleichzeitig ist erschienen:

WISSENSCHAFTLICHE

ABHANDLUNGEN

von

H. Helmholtz.

Erster Band.

938 Seiten gr. 8°. Mit eingedruckten Fig., 2 lith. Tafeln und Portrait.

Preis 20 Mark.

Der zweite Band wird im Laufe des Jahres 1882 erscheinen.

Inhaltsübersicht des ersten Bandes.

Zur Lehre von der Energie: Bericht über die Theorie der physiologischen Wärmeerscheinungen für 1845. — Ueber die Erhaltung der Kraft. — Erwiderung auf die Bemerkungen von Hrn. Clausius. — Ueber Eigenschaften des Eises. — **Hydrodynamik:** Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. — Sur le mouvement le plus général d'un fluide. — Sur le mouvement des fluides. — Réponse à la Note de M. S. Bertrand du octobre. — Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen. — Ueber ein Theorem, geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper betreffend, nebst Anwendung auf das Problem, Luftballons zu lenken. — Ueber Reibung tropfbarer Flüssigkeiten. — Zur Theorie der stationären Ströme in reibenden Flüssigkeiten. — **Schallbewegung:** Bericht über die theoretische Akustik betreffenden Arbeiten im Jahre 1848 und 1849. — Ueber Combinationstöne. — Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. — Ueber den Einfluss der Reibung in der Luft auf die Schallbewegung. — Zur Theorie der Zungenpfeifen. — Ueber die Vocale. — Ueber die Klangfarbe der Vocale. — Ueber Klangfarben. — Ueber die Bewegung der Violinsaiten. — Ueber musikalische Temperatur. — Ueber die arabisch-persische Tonleiter. — **Elektrodynamik:** Ueber die Dauer und den Verlauf der durch Stromesschwankungen inducirten Ströme. — Telephon und Klangfarbe. — Ueber einige Gesetze der Vertheilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern mit Anwendung auf die thierisch-elektrischen Versuche. — Ueber eine allgemeine Transformationsmethode der Probleme über elektrische Vertheilung. — Ueber die physiologische Wirkung kurzdauernder elektrischer Schläge im Innern von ausgedehnten leitenden Massen. — Ueber elektrische Oscillationen. — Ueber die Gesetze der inconstanten elektrischen Ströme in körperlich ausgedehnten Leitern. — Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Erste Abhandlung. — Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper. — Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrodynamischen Wirkungen. — Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Zweite Abhandlung. — Vergleich des

Ampère'schen und Neumann'schen Gesetzes für die elektrodynamischen Kräfte. — Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Dritte Abhandlung. — Kritisches zur Elektrodynamik. — Versuche über die im ungeschlossenen Kreise durch Bewegung inducirten elektromotorischen Kräfte. — Bericht betreffend Versuche über die elektromagnetische Wirkung elektrischer Convection, ausgeführt von Hrn. Henry A. Rowland. — Ueber die auf das Innere magnetisch oder dielektrisch polarisirter Körper wirkenden Kräfte. — **Galvanismus:** Ueber galvanische Polarisation in gasfreien Flüssigkeiten. — Bericht über Versuche des Hrn. Dr. E. Root aus Boston, die Durchdringung des Platins mit elektrolytischen Gasen betr. — Ueber galvanische Ströme, verursacht durch Concentrationsunterschiede; Folgerungen aus der mechanischen Wärmetheorie. — Studien über elektrische Grenzschichten. — Ueber Bewegungsströme am polarisirten Platina. — Eine elektrodynamische Wage. — Ueber galvanische Polarisation des Quecksilbers und darauf bezügliche neue Versuche des Hrn. Arthur König.

W. Rowan Hamilton

Elemente der Quaternionen.

Deutsch von

Paul Glan,

Docent für Physik an der Universität Berlin.

Ersten Bandes I. Theil.

Seite 1—132. gr. 8°. Mit Figuren. 1881. ℳ 4.—

Ersten Bandes II. Theil.

Seite 133—411. 1882. ℳ 8.—

H.'s „Elements of Quaternions" ist bekanntlich das grundlegende Werk über die Rechnung mit Quaternionen und wird als solches mit zunehmender Ausbreitung dieser Rechnungsart immer mehr geschätzt werden. — Exemplare des engl. Originals sind nicht mehr zugänglich und die günstige Aufnahme, welche diese deutsche Ausgabe sofort gefunden, beweist, dass eine gute Uebersetzung ein wirkliches Bedürfniss war. Die deutsche Ausgabe wird in 2 Bände eingetheilt sein, von welchen der erste in 3 Theilen ausgegeben wird.

Alfr. Donadt

Das mathematische Raumproblem

und

die geometrischen Axiome.

8°. 68 Seiten. 1881. ℳ 1.60.

Verlag von Joh. Ambr. Barth in Leipzig.

H. Noth

Oberlehrer am Gymnasium zu Freiberg in Sachsen

Die Arithmetik der Lage

Ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Raumlehre.

Mit Berücksichtigung

ebener geometrischer Gebilde erster und zweiter Ordnung.

gr. 8°. 90 Seiten. Mit Figuren. 1881. ℳ 2.40.

Durch die „Arithmetik der Lage" wird eine Idee vollständig realisirt, die zuerst von Leibniz (im Jahre 1679) ausgesprochen und in neuester Zeit von dem genialen Mathematiker H. Grassmann weiter verfolgt wurde, die Idee einer Arithmetik, durch welche die Lage der Raumelemente direkt ausgedrückt wird, ohne dass hierzu Grössenverhältnisse benutzt werden. Mit Hilfe von Berechnungen, deren Gesetze mit denen der gewöhnlichen Arithmetik (der Addition, Subtraction, Multiplication und Division) übereinstimmen, wird hier z. B. die Lage von Punkten und unbegrenzten geraden Linien berechnet. Hierbei stellen sich (unter anderen) besonders merkwürdige und einfache Beziehungen zwischen den Punkten von Curven und ihren Tangenten heraus. So ist z. B. der Durchschnittspunkt von je zwei Tangenten eines Kegelschnittes die mittlere Proportionale zwischen den beiden Berührungspunkten etc. Besonders beachtenswerth erscheint ferner der Umstand, dass durch die „Arithmetik der Lage" die Zahlentheorie mit der Raumlehre von einer völlig neuen Seite aus in Fühlung gebracht wird.

Van der Waals

Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes.

Uebersetzt und mit Zusätzen versehen

von

F. Roth.

176 Seiten. 8°. Mit 2 Tafeln. 1881. Preis ℳ 4.—

Die unter Mitwirkung des Verfassers bearbeitete Uebersetzung enthält auch die seit dem Erscheinen der Originalausgabe (Leiden 1873) vom Autor durch die königl. niederl. Akad. d. W. veröffentlichten weiteren Arbeiten (1880), durch welche seine Theorie zu einem gewissen Abschluss geführt wird, ausserdem sind die einschlägigen Arbeiten anderer Autoren berücksichtigt.

Unter der Presse:

Thermochemische Untersuchungen

von Prof. **Julius Thomsen**, an der Univ. Kopenhagen.

Verlag von **Joh. Ambr. Barth** in Leipzig.

Clausius, R., Die Potentialfunction und das Potential. Ein Beitrag zur mathematischen Physik. 3. Auflage. 178 Seiten gr. 8°. ℳ 4.—

du Bois-Reymond, P., Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln. I. Heft Theorie der Charakteristiken. 255 Seiten. gr. 8°. 1864. ℳ 5.20.

Hüfner, G., Quantitat. Spectralanalyse und ein neues Spectrophotometer. 26 Seiten. 8°. Mit 1 Tafel. 1878. ℳ 1.—
Sep.-Abdr. a. d. Journal f. prakt. Chemie.

Lohrmann's Mondkarte. 25 Blatt in Kupferstich, nebst 2 Erläuterungstafeln u. Portrait Lohrmann's. Mit selenograph. Ortsbestimmungen (49,4 Seiten) nach F. W. u. M. Opelt, herausg. v. Jul. Schmidt (Athen). gr. 4°. 1878. In Mappe. ℳ 50.—

Magnus, G., Hydraulische Untersuchungen (I.) 59 Seiten. 8°. Mit 2 Tafeln. 1855. ℳ 1.20.

—— —— (II.) 32 Seiten. 8°. Mit 2 Tafeln. 1859. ℳ —90.
Aus den Annalen d. Physik separat abgedruckt.

Melde, Fr., Die Lehre von den Schwingungscurven nach fremden und eigenen Untersuchungen. 228 Seiten gr. 8° mit Atlas von 11 lith. Tafeln in gr. 4°. 1864. ℳ 8.—

Opelt, F. W., Allgemeine Theorie der Musik, auf den Rhythmus der Klangwellenpulse gegründet. gr. 4°. 80 Seiten. Mit 3 Tafeln. 1852. ℳ 4.—

Opelt, M., Der Mond. Populäre Darstellung der Verhältnisse u. Erscheinungen, welche von diesem Körper bekannt sind. 46 Seiten Text in 8°. Nebst einer Vollansicht des Mondes in optischer Lichtwirkung und in fortschreitender Phase dargestellt nebst Erläuterungsblatt. 2 Blatt gr. Fol. 1879. ℳ 6.—

Poggendorff, J. C., Geschichte der Physik. Vorlesungen gehalten an der Universität zu Berlin. 8°. 937 Seiten mit Fig. 1879. ℳ 16.80.

Rühlmann, R., Die barometrischen Höhenmessungen u. ihre Bedeutung für die Physik der Atmosphäre. 133 Seiten. 8°. Mit 6 Tafeln. 1870. ℳ 4.—

Verlag von **Joh. Ambr. Barth** in Leipzig.

Annalen
der
PHYSIK UND CHEMIE.

Neue Folge,

unter Mitwirkung der physikal. Gesellschaft zu Berlin, insbesondere des Herrn Prof. Helmholtz

herausgegeben von

Prof. G. Wiedemann.

Jährlich 3 Bände in 12 Heften 8°. Mit Tafeln.

Preis ℳ 31.—

Bis Ende 1881 sind erschienen

unter Redaction von *Gilbert*, (1799—1824) Band 1—76.

" " " *Poggendorff* (1825—76) Band 77—236 (oder der Poggendorff'schen Folge Band 1—160). Ferner 8 Ergänzungsbände und der zur Feier des 50jähr. Redactions-Jubiläums Poggendorff's erschienene Jubelband.

" " " *Wiedemann* (seit 1877) Band 237—250 oder Neue Folge Band 1—14.

Im Ganzen 88 Jahrgänge in 250 Bänden, 9 Extrabänden und 5 Reg.

Obschon eine grosse Anzahl Bände vergriffen ist, stehen fast immer complete Exemplare aller 3 oder der einzelnen Reihen bei der Verlagshandlung zum Verkauf.

Zur Completirung ihrer Vorräthe sucht dieselbe stets einzelne Bände sowie Reihen anzukaufen und bittet im gegebenen Fall um Offerten.

Beiblätter
zu den
Annalen der Physik und Chemie

begründet von **J. C. Poggendorff**

herausgegeben unter Mitwirkung befreundeter Physiker

von

G. und E. Wiedemann.

Jährlich ein Band in 8° von 12 Heften. **Preis ℳ 16.—**

Die Beiblätter erscheinen seit 1877 und haben den Zweck eine möglichst vollständige und rasche Uebersicht der Arbeiten auf dem gesammten Gebiet der Physik zu geben.

Sie enthalten dementsprechend sorgfältig ausgearbeitete Referate über die laufende periodische Literatur (wozu von der Redaction mehr als

100 wissenschaftliche Zeitschriften des In- und Auslandes benutzt werden), über die Publikationen gelehrter Gesellschaften, Dissertationen, Programme u. s. w. soweit sie in das physikal. Gebiet einschlagen und von wissenschaftlichem Interesse sind; ferner eine Uebersicht über die gesammte Literatur inclusive der erschienenen Bücher. Soweit irgend thunlich, versendet die Redaction die Correcturabzüge der Referate an die betreffenden Herren Autoren zur Durchsicht, welche dieselben mit nicht dankbar genug anzuerkennender Bereitwilligkeit zu prüfen und event. zu ergänzen pflegen, so dass auf diese Weise den in den Beiblättern erscheinenden Berichten eine weit grössere Correctheit gesichert ist, als auf anderem Wege zu erreichen wäre.

Mittheilungen der Herren Autoren physikalischer Werke, in denen neue Untersuchungen enthalten oder neue Apparate beschrieben sind, werden von der Redaction mit Dank entgegengenommen und zur raschen Berichterstattung benutzt, zu gleichem Zweck wird um Zusendung von Separatabzügen, Programmen, Dissertationen u. s. w. ergebenst gebeten.

Der Inhalt der „Annalen der Physik und Chemie" wird in den „Beiblättern" nicht berücksichtigt, da letztere eine Ergänzung der „Annalen" bilden aber in selbständigem Abonnement erscheinen.

Journal
für
Praktische Chemie.
Neue Folge,

herausgegeben von

H. Kolbe und (seit 1879) **E. v. Meyer.**

Jährlich 2 Bände in 22 Heften. 8°. ℳ 22. —

Bis Ende 1881 ist erschienen:

Journal f. techn. u. öconom. Chemie, herausgegeben von *Erdmann*, 1828—33. 18 Bde. 8°.

——— **f. prakt. Chemie,** herausgegeben von *Erdmann, Schweigger-Seidel, Marchand* und *Werther*, 1834—69. Bd. 1—108.

——— ——— Neue Folge, herausgegeben von *H. Kolbe* (und *E. v. Meyer*), 1870—81. Band 1—24.

Im Ganzen 150 Bände nebst 5 Registern.

Complete Reihen sind fast immer bei der Verlagshandlung zu haben; dieselbe sucht zur Ergänzung ihrer Vorräthe einzelne Jahrgänge oder auch längere Reihen zurückzukaufen und bittet im gegebenen Fall um Offerten.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

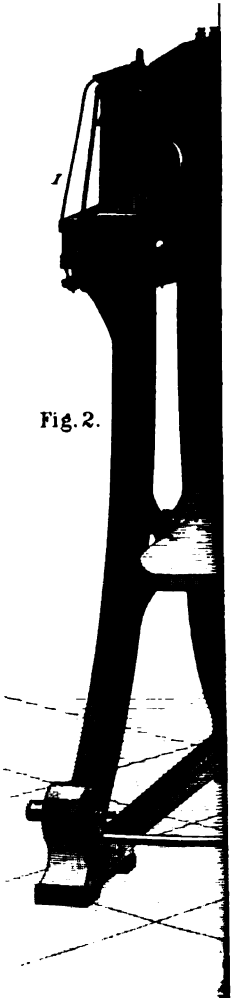


Fig. 2.

Lith. Anst. v. C. Kurst, Leipzig

3 2044 055 054 878

CONSERVED
12003 12 K 5
HARVARD COLLEGE